Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра прикладной математики

«Утверждаю»
Проректор по учебно-
методической работе
___________ Ю. А. Устименко
«7» сентября 2020 г.

Рабочая программа дисциплины
Б1.О.31 Линейная алгебра

Направление подготовки: **01.03.02 Прикладная математика и информатика**
Направленность (профиль): **Математическое и информационное моделирование**
Форма обучения: очная
Курс – 2
Семестр – 3
Всего зачетных единиц –3, часов – 108

Форма отчетности: зачет – 3 семестр

Программу разработал
кандидат физико-математических наук, доцент С.А. Гомонов

Одобрена на заседании кафедры
«31» августа 2020 г., протокол № 1

Заведующий кафедрой __________Г.С. Евдокимова

Смоленск
2020

1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Линейная алгебра» относится к дисциплинам обязательной части учебного плана данного направления подготовки.

В настоящее время математические методы исследования проникают во все области человеческой деятельности. Это повышает интерес к математике со стороны смежных наук, использующих различный объем математических знаний. Кроме того, развитие информационных технологий и систем компьютерной математики, которые применяются для решения многих математических задач, требует алгоритмической четкости при изучении математических дисциплин. Поэтому курс «Линейная алгебра» занимает важное место в предметной подготовке по основной образовательной программе направления подготовки «Прикладная математика и информатика».

Изучение основ теории линейных операторов, действующих в линейных пространствах, их применения необходимо для дальнейшего выполнения научно-исследовательской практики, планирования и проведения научно-исследовательской работы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	**Знать**: основные законы естественнонаучных дисциплин, базовый аппарат математики, необходимые для осуществления профессиональной деятельности; **Уметь**: применять знания в области естественнонаучных и математических дисциплин для проведения теоретических и экспериментальных исследований в профессиональной деятельности; **Владеть**: методами математического анализа и моделирования, навыками в области естественнонаучного и общеинженерного знания, позволяющими осуществлять исследования в профессиональной деятельности.

3. Содержание дисциплины

1. Линейные пространства. Теорема о существовании ненулевого решения однородной линейной системы. Три утверждения о линейной зависимости. Теорема о ранге матрицы. Теорема Кронекера-Капелли. Критерий единственности нулевого решения однородной линейной системы. Определение и свойства линейного пространства. Четыре утверждения о базисе. Теорема о невырожденности матрицы перехода. Теорема об изменении координат элемента при переходе к новому базису. Линейные подпространства. Критерий подпространства. Линейная оболочка элементов как подпространство. Пересечение подпространств как подпространство. Сумма подпространств как подпространство. Линейное пространство как прямая сумма подпространств. Линейный оператор. Нахождение координат элемента под действием на него линейного оператора. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Действия с линейными операторами. Матрицы суммы линейных операторов, произведения линейного оператора на число, произведения линейных операторов. Образ, ранг, ядро, дефект линейного оператора. Критерий собственного значения линейного оператора. Множество всех собственных векторов, отвечающих одному собственному значению как подпространство.
Теорема о линейной независимости собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям.

2. Евклидовы пространства. Скалярное произведение в действительном Евклидовом пространстве. Неравенство Коши-Буняковского. Норма в Евклидовом пространстве. Угол между элементами. Утверждение о том, что ортонормированный базис является базисом. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Процесс ортогонализации. Ортогональное дополнение подпространства как подпространство. Евклидово пространство как прямая сумма своего подпространства и ортогонального дополнения к нему. Теорема об изоморфности Евклидовых пространств одной размерности. Скалярное произведение в комплексном Евклидовом пространстве и его свойства. Неравенство Коши-Буняковского в комплексном Евклидовом пространстве. Линейное пространство операторов. Утверждение о том, что в случае взаимно однозначного оператора любой элемент пространства является образом некоторого элемента. Критерий существования обратного оператора (взаимная однозначность).Критерий того, что ядро оператора состоит только из нулевого элемента (взаимная однозначность оператора). Критерий того, что ядро оператора состоит только из нулевого элемента (линейное пространство является образом оператора). Размерность пространства как сумма размерностей ядра и образа. . Существование оператора, ядро и образ которого совпадают с данными подпространствами (сумма размерностей которых равна n – размерности пространства). Существование и единственность линейного оператора с заданной матрицей. Критерий диагональности матрицы линейного оператора.

3. Линейные и полуторалинейные формы. Самосопряжённые операторы. Лемма о представлении линейной формы в виде скалярного произведения. Теорема о представлении полуторалинейной формы в виде скалярного произведения $(x,A(y))$, где $A(y)$ – линейный оператор. Следствие из теоремы о представлении полуторалинейной формы в виде скалярного произведения $(B(x),y)$, где $B(x)$ – линейный оператор. Матрица линейной формы. Матрица полуторалинейной формы. Её сравнение с матрицами линейных операторов, связанных с представлением формы в виде скалярного произведения. Оператор, сопряжённый к линейному. Его линейность. Теорема существования и единственности оператора, сопряжённого к линейному оператору. Свойства сопряжённых операторов. Самосопряжённый оператор. Представление линейного оператора в виде комплексной линейной комбинации самосопряжённых операторов. Критерий самосопряжённости произведения самосопряжённых операторов. Теорема о вещественности собственных значений самосопряжённого оператора. Теорема об ортогональности собственных векторов самосопряжённого оператора, отвечающих различным собственным значениям. Квадратичные формы.

4. Тематический план

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий		
			лекции	практические занятия	самостоятельная работа
1	Линейные пространства.	46	16	18	12
2	Евклидовы пространства	36	12	10	14
3	Линейные и полуторалинейные формы. Самосопряжённые операторы.	26	8	8	10
	ИТОГО	108	36	36	36

5. Виды образовательной деятельности

Занятия лекционного типа

Лекция 1,2. Теорема о существовании ненулевого решения однородной линейной системы. Три утверждения о линейной зависимости. Теорема о ранге матрицы. Теорема Кронекера-Капелли.

Лекция 3,4. Критерий единственности нулевого решения однородной линейной системы. Определение и свойства линейного пространства. Четыре утверждения о базисе. Теорема о невырожденности матрицы перехода.

Лекция 5,6. Теорема об изменении координат элемента при переходе к новому базису. Линейные подпространства. Критерий подпространства. Линейная оболочка элементов как подпространство. Пересечение подпространств как подпространство. Сумма подпространств как подпространство. Линейное пространство как прямая сумма подпространств.

Лекция 7,8. Линейный оператор. Матрица линейного оператора. Нахождение координат элемента под действием на него линейного оператора. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Действия с линейными операторами. Матрицы суммы линейных операторов, произведения линейного оператора на число, произведения линейных операторов. Образ, ранг, ядро, дефект линейного оператора.

Лекция 9,10. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора. Скалярное произведение в действительном Евклидовом пространстве. Неравенство Коши-Буняковского. Норма в Евклидовом пространстве. Угол между элементами. Утверждение о том, что ортонормированный базис является базисом. Скалярное произведение в ортонормированном базисе.

Лекция 11,12. Процесс ортогонализации..Ортогональное дополнение подпространства как подпространство. Евклидово пространство как прямая сумма своего подпространства и ортогонального дополнения к нему. Теорема об изоморфности Евклидовых пространств одной размерности. Скалярное произведение в комплексном Евклидовом пространстве и его свойства. Неравенство Коши-Буняковского в комплексном Евклидовом пространстве. Линейное пространство операторов. Утверждение о том, что в случае взаимно однозначного оператора любой элемент пространства является образом некоторого элемента.

Лекция 13,14. Критерий существования обратного оператора (взаимная однозначность). Критерий того, что ядро оператора состоит только из нулевого элемента (взаимная однозначность оператора). Критерий того, что ядро оператора состоит только из нулевого элемента (линейное пространство является образом оператора). Размерность пространства как сумма размерностей ядра и образа. Существование оператора, ядро и образ которого совпадают с данными подпространствами (сумма размерностей которых равна $\boldsymbol{n}$ – размерности пространства). Существование и единственность линейного оператора с заданной матрицей. Критерий диагональности матрицы линейного оператора.

Лекция 15,16. Лемма о представлении линейной формы в виде скалярного произведения. Теорема о представлении полуторалинейной формы в виде скалярного произведения $\boldsymbol{(x,A(y))}$, где $\boldsymbol{A(y)}$ – линейный оператор. Следствие из теоремы о представлении полуторалинейной формы в виде скалярного произведения $\boldsymbol{(B(x),y)}$, где $\boldsymbol{B(x)}$ – линейный оператор. Матрица линейной формы. Матрица полуторалинейной формы. Её сравнение с матрицами линейных операторов, связанных с представлением формы в виде скалярного произведения. Оператор, сопряжённый к линейному. Его линейность. Теорема существования и единственности оператора, сопряжённого к линейному оператору. Свойства сопряжённых операторов.

Лекция 17,18. Самосопряжённый оператор. Представление линейного оператора в виде комплексной линейной комбинации самосопряжённых операторов. Критерий самосопряжённости произведения самосопряжённых операторов. Теорема о вещественности собственных значений самосопряжённого оператора. Теорема об ортогональности собственных векторов самосопряжённого оператора, отвечающих различным собственным значениям. Квадратичные формы.

Занятия семинарского типа (практические занятия) и самостоятельная работа

Занятие 1. *Определение и свойства линейного пространства*.

Теоретические вопросы

1. Определение линейного пространства.
2. Свойства линейного пространства.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Доказать, что множество всех матриц размера $n \times m$ с заданными естественным образом операциями суммы матриц и умножения матрицы на число образует линейное пространство.

2. Является ли линейным пространством множество квадратных матриц порядка n, если операции заданы следующим образом: $A \oplus B = A \cdot B$, $\lambda \odot A = \lambda A$?

3. Является ли линейным пространством множество диагональных матриц порядка n с нулевым определителем, если операции заданы следующим образом: $A \oplus B = A \cdot B$, $\lambda \odot A = \lambda A$?

4. Является ли линейным пространством множество всех вещественных функций, принимающих положительные значения на $(-\infty;+\infty)$, если операции заданы следующим образом: $f(x) \oplus g(x) = f(x) \cdot g(x)$, $\lambda \odot f(x) = f^{\lambda}(x)$?

5. Является ли линейным пространством множество всех нечетных функций, заданных на $[-1;1]$, если операции заданы следующим образом : $f(x) \oplus g(x) = f(x) + g(x)$, $\lambda \odot f(x) = \lambda f(x)$?

Задания для самостоятельной работы

1. Является ли линейным пространством множество всех целых чисел, если операции заданы следующим образом: $a \oplus b = a + b$, $\lambda \odot a = [\lambda a]$?

2. Является ли линейным пространством множество всех положительных чисел, если операции заданы следующим образом: $a \oplus b = a \cdot b$, $\lambda \odot a = a^{\lambda}$?

Занятие 2. *Линейная зависимость и независимость системы элементов линейного пространства.*

Теоретические вопросы

1. Определение линейной зависимости и независимости системы элементов линейного пространства.
2. Критерий линейной зависимости.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Исследовать на линейную зависимость систему элементов из линейного пространства матриц размера 1×3:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 10 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Исследовать на линейную зависимость систему элементов из линейного пространства матриц размера 2×2:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Исследовать на линейную зависимость систему элементов из линейного пространства функций, определенных на $(0;+\infty)$: $f(x)=\ln x$, $g(x)=\sin x$, $h(x)=e^{x}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Исследовать на линейную зависимость систему элементов из линейного пространства функций, определенных на $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$: $f(x)=\mathrm{tg}^2\, x$, $g(x)=\dfrac{2}{\cos^2 x}$, $h(x)=3$.

2. Исследовать на линейную зависимость систему элементов из линейного пространства, заданного в задаче № 2 занятия №1: $a = 2$, $b = 7$.

Занятия 3-4. *Базис линейного пространства.*

Теоретические вопросы

1. Определение базиса линейного пространства.
2. Четыре утверждения о базисе.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Образует ли базис система элементов из линейного пространства матриц размера 1×3:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;
б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

2. Образует ли базис система элементов из линейного пространства матриц размера 2×2:
а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$?

3. Найти какой-нибудь базис и определить размерность линейного пространства решений системы:

а) $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Образует ли базис система элементов из линейного пространства матриц размера 1×3:
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

2. Образует ли базис система элементов из линейного пространства матриц размера 2×2:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$?

3. Найти какой-нибудь базис и определить размерность линейного пространства решений системы:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - x_5 - 2x_6 = 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 8x_3 - 2x_4 - 2x_5 - 4x_6 = 0 \end{cases}$.

Занятие 5. *Преобразование координат при изменении базиса*

Теоретические вопросы

1. Определение матрицы перехода.
2. Теорема о невырожденности матрицы перехода.
3. Теорема об изменении координат элемента при переходе к новому базису.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

Найти координаты элемента x в базисе $B' = \{e_1'; e_2'; e_3'\}$, если заданы его координаты в базисе $B = \{e_1; e_2; e_3\}$.

а) x = (1; 2; 4)
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 3e_3 \\ e_2' = \dfrac{3}{2}e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases};$$
б) x = (-3; 2; 4)
$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - e_3 \\ e_2' = \dfrac{1}{2}e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases};$$

Задания для самостоятельной работы

Найти координаты элемента x в базисе $B' = \{e_1'; e_2'; e_3'\}$, если заданы его координаты в базисе $B = \{e_1; e_2; e_3\}$.

x = (5; -5; -4)

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \dfrac{4}{5}e_3 \\ e_2' = -4e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}.$$

Занятие 6. *Определение линейного оператора.*

Теоретические вопросы

1. Определение линейного оператора.
2. Свойства линейного оператора.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

Пусть элемент x имеет координаты (x_1; x_2; x_3). Являются ли линейными преобразования *A*, *B* и *C*, которые задаются следующим образом:

а) *A* x = (x_1; $x_1+2x_2+3x_3$; $4x_1+5x_2+6x_3$),

B x = (x_1; x_1+2x_2+3; $4x_1+5x_2+6$),

C x = (x_1; $x_1+2x_2+3x_3$; $4x_1^4+5x_2+6x_3$);

б) *A* x = ($3x_1-2x_2-1$; 0 ; $x_1+2x_2+3x_3$),

B x = ($3x_1^2-2x_2-x_3$; 0 ; 0),

C x = ($3x_1-2x_2-x_3$; 0 ; $x_1+2x_2+3x_3$)

Задания для самостоятельной работы

Пусть элемент x имеет координаты (x_1; x_2; x_3). Являются ли линейными преобразования *A*, *B* и *C*, которые задаются следующим образом:

A x = (x_1^2 ; $x_1- x_3$; x_2+x_3),

B x = (1; $x_1- x_3$; x_2+x_3),

C x = (x_1; x_1-x_3; x_2+x_3)?

Занятия 7-9. *Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.*

Теоретические вопросы

1. Определение собственных значений и собственных векторов линейного оператора.
2. Критерий собственного значения.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора *A*, заданного своей матрицей A:

а) A = $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; б) A = $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора *A*, действующего в линейном пространстве геометрических векторов на плоскости Oxy:

а) *A* - проекция вектора на ос Ox;

б) *A* – отображение вектора относительно оси Oy;

в) *A* – отображение вектора относительно начала координат.

3. Вектор *x* имеет координаты (x_1;x_2;x_3) в некотором базисе. Оператор *A* действует на *x* следующим образом: *Ax*=(x_1;x_3+x_2;x_1-x_2) . Является ли этот оператор линейным?

4. Найдите для оператора из задачи 1 $(A^6+A^5)x$ по определению действий с операторами.

5. Составьте матрицу оператора из задачи 1.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора *A*, заданного своей матрицей A:

а) $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$.

2. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора *A*, действующего в линейном пространстве геометрических векторов на плоскости Oxy:

$A=B\cdot C$, где C – проекция вектора на ось Оу, B - умножение вектора на 2.

Занятие 10. *Определение и свойства Евклидова пространства.*

Теоретические вопросы

1. Скалярное произведение в действительном Евклидовом пространстве.
2. Неравенство Коши-Буняковского.
3. Норма в Евклидовом пространстве.
4. Угол между элементами.
5. Скалярное произведение в ортонормированном базисе.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

Выясните, являются ли следующие множества Евклидовыми пространствами. Если да, найдите норму указанного элемента *а* и угол между указанными элементами *в* и *с*.

1. Рассмотрим линейное пространство матриц размера $n \times m$ с заданными естественным образом операциями суммы матриц и умножения матрицы на число. Скалярное произведение – определитель произведения двух матриц. *а* – единичная матрица, *в=а, с*—матрица из единиц.

2. Множество квадратных матриц порядка *n*, операции заданы следующим образом: $A\oplus B=A\cdot B$, $\lambda\odot A=\lambda A$. Скалярное произведение – определитель произведения двух матриц. *а* – единичная матрица, *в=а, с*—матрица из единиц.

3. Множество диагональных матриц порядка *n* с нулевым определителем, операции заданы следующим образом: $A\oplus B=A\cdot B$, $\lambda\odot A=\lambda A$. Скалярное произведение – определитель произведения двух матриц. *а* – единичная матрица, *в=а, с*—матрица из единиц.

4. Множество всех вещественных функций, принимающих положительные значения на $(-\infty;+\infty)$, операции заданы следующим образом: $f(x)\oplus g(x)=f(x)\cdot g(x)$, $\lambda\odot f(x)= f^{\lambda}(x)$. Скалярное произведение – определённый интеграл по отрезку *[0,1]* от произведения двух функций. *а=Exp x, в=Sin x +2, с= Cos x +3.*

Задания для самостоятельной работы

Выясните, являются ли следующие множества Евклидовыми пространствами. Если да, найдите норму указанного элемента *а* и угол между указанными элементами *в* и *с*.

1. Множество всех целых чисел, операции заданы следующим образом: $a\oplus b=a+b$, $\lambda\odot a=[\lambda a]$. Скалярное произведение *а* и *в равно ав. а=2, в=3, с=4.*

2. Множество всех положительных чисел, операции заданы следующим образом: $a\oplus b=a\cdot b$, $\lambda\odot a=a^{\lambda}$. Скалярное произведение *а* и *в равно ав. а=2, в=3, с=4.*

Занятия 11-12. *Процесс ортогонализации.*

Теоретические вопросы

1. Алгоритм процесса ортогонализации.
2. Основные формулы процесса ортогонализации.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

С помощью процесса ортогонализации получите ортонормированный базис из следующих элементов: а) *(1,2,0,3), (2,0,-1,1), (1,1,1,1),(-1,0,1,0),* б) *(1,-2,0,3,-1), (2,0,1,1,0), (1,1,1, 0,1),(-1,0,1,0,1), (1,0,1,0,1).*

Задания для самостоятельной работы

С помощью процесса ортогонализации получите ортонормированный базис из следующих элементов: а)*(2,0,3), (0,-1,1), (1,1,1), б)(-2,0,3,-1), (0,1,1,0), (1,1, 0,1),((1,0,1,0).*

Занятие 13 –14. *Скалярное произведение в комплексном Евклидовом пространстве.*

Теоретические вопросы

1. Скалярное произведение в комплексном Евклидовом пространстве и его свойства.
2. Неравенство Коши-Буняковского в комплексном Евклидовом пространстве.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

Выясните, являются ли следующие множества Евклидовыми пространствами. Если да, найдите норму указанных элементов *а, в* и *с*.

1. Рассмотрим линейное пространство комплексных матриц размера $n \times m$ с заданными естественным образом операциями суммы матриц и умножения матрицы на число. Скалярное произведение – определитель произведения двух матриц. *а* – единичная матрица, *в=а, с*—матрица из единиц.

2. Множество квадратных комплексных матриц порядка n, операции заданы следующим образом: $A \oplus B = A \cdot B$, $\lambda \odot A = \lambda A$. Скалярное произведение – определитель произведения двух матриц. *а* – единичная матрица, *в=а, с*—матрица из единиц.

3. Множество диагональных комплексных матриц порядка n с ненулевым определителем, операции заданы следующим образом: $A \oplus B = A \cdot B$, $\lambda \odot A = \lambda A$. Скалярное произведение – определитель произведения двух матриц. *а* – единичная матрица, *в=а, с*—матрица из единиц.

4. Выясните, является ли следующее множество Евклидовым пространством. Если да, найдите норму указанного элемента *а* и угол между указанными элементами *в* и *с*. Множество всех целых чисел, операции заданы следующим образом: $a \oplus b = a + b$, $\lambda \odot a = [\lambda a]$. Скалярное произведение *а* и *в равно а+в. а=2, в=5, с=4.*

5. С помощью процесса ортогонализации получите ортонормированный базис из следующих элементов: *(1,1,3), (2,-1,1), (1,1,0).*

Задания для самостоятельной работы

Выясните, являются ли следующие множества Евклидовыми пространствами. Если да, найдите норму указанных элементов *а, в* и *с*.

1. Множество всех комплексных чисел с целыми действительными и мнимыми частями, операции заданы следующим образом: $a \oplus b = a + b$, $\lambda \odot (a+ib) = [\lambda a] + i[\lambda b]$. Скалярное произведение *а* и *в равно ав. а=2+i, в=3-i, с=8.*

2. Множество всех комплексных чисел с положительными действительными и мнимыми частями, операции заданы следующим образом: $a \oplus b = a \cdot b$, $\lambda \odot (a+ib) = a^{\lambda} + ib$. Скалярное произведение *а* и *в равно ав. а=2+i, в=3-i, с=8.*

Занятие 15–16. *Линейные и полуторалинейные формы.*

Теоретические вопросы

1. Определение линейной формы.
2. Специальное представление линейной формы.
3. Определение полуторалинейной формы.
4. Специальное представление полуторалинейной формы.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Какие из следующих операторов *f*, принадлежащих *L(V,R)*, являются линейными формами?

а) V – Евклидово пространство геометрических векторов на плоскости Oxy, вектор a имеет координаты (x,y). $f(a)=x+y$.

б) V -- Евклидово пространство геометрических векторов в пространстве $Oxyz$, вектор a имеет координаты (x,y,z). $f(a)=x+z+y$.

в) V -- Евклидово пространство вещественных функций, непрерывных на $(-\infty;+\infty)$. Скалярное произведение – определённый интеграл по отрезку $[0,1]$ от произведения двух функций. $f(a)=(a,a)$.

2. Для каждой линейной формы из задачи 1найдите такой элемент h из V, что $f(x)=(x,h)$.

3. Какие из следующих функций $B(a,b)$, заданных на Евклидовом пространстве V, являются полуторалинейными формами?

а) V – Евклидово пространство геометрических векторов на плоскости Oxy, вектор a имеет координаты $(x1,y1)$, вектор b имеет координаты $(x2,y2)$. $B(a,b)=x1*y1+x2*y2$.

б) V -- Евклидово пространство геометрических векторов в пространстве $Oxyz$, вектор a имеет координаты $(x1,y1,z1)$, вектор b имеет координаты $(x2,y2,z2)$. $B(a,b)=x1+y1+z1+x2+y2+z2$.

в) V -- Евклидово пространство вещественных функций, непрерывных на $(-\infty;+\infty)$. Скалярное произведение – определённый интеграл по отрезку $[0,1]$ от произведения двух функций. $B(a,b)=(a,a)+(b,b)$.

4. Для каждой полуторалинейной формы из задачи 3найдите такой оператор A из $L(V,V)$, что $B(a,b)=(a,Ab)$.

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. Какие из следующих операторов f, принадлежащих $L(V,C)$, являются линейными формами?

а) V – Евклидово пространство геометрических векторов на плоскости Oxy, вектор a имеет координаты (x,y). $f(a)=x+iy$.

б) V -- Евклидово пространство геометрических векторов в пространстве $Oxyz$, вектор a имеет координаты (x,y,z). $f(a)=x+z+iy$.

в) V -- Евклидово пространство вещественных функций, непрерывных на $(-\infty;+\infty)$. Скалярное произведение – определённый интеграл по отрезку $[0,1]$ от произведения двух функций. $f(a)=i(a,a)$.

2. . Какие из следующих функций $B(a,b)$, заданных на Евклидовом пространстве V, являются полуторалинейными формами?

а) V – Евклидово пространство геометрических векторов на плоскости Oxy, вектор a имеет координаты $(x1,y1)$, вектор b имеет координаты $(x2,y2)$. $B(a,b)=x1*y1+ix2*y2$.

б) V -- Евклидово пространство геометрических векторов в пространстве $Oxyz$, вектор a имеет координаты $(x1,y1,z1)$, вектор b имеет координаты $(x2,y2,z2)$. $B(a,b)=x1+y1+z1+i(x2+y2+z2)$.

в) V -- Евклидово пространство вещественных функций, непрерывных на $(-\infty;+\infty)$. Скалярное произведение – определённый интеграл по отрезку $[0,1]$ от произведения двух функций. $B(a,b)=(a,a)+i(b,b)$.

Занятие 17. *Самосопряжённый оператор.*

<u>Теоретические вопросы</u>

1. Оператор, сопряжённый к линейному.
2. Теорема существования и единственности оператора, сопряжённого к линейному оператору.
3. Свойства сопряжённых операторов.
4. Самосопряжённый оператор.
5. Критерий самосопряжённости произведения самосопряжённых операторов.

<u>Задачи и упражнения для аудиторной работы</u>

1. Найдите оператор, сопряжённый к заданному оператору A из $L(V,V)$.

а) V – Евклидово пространство геометрических векторов на плоскости Oxy, вектор a имеет координаты (x,y). $A(a)=10a$.

б) V – Евклидово пространство геометрических векторов на плоскости Oxy, вектор a имеет координаты (x,y). $A(a)=(x+y,x-y)$.

в) V -- Евклидово пространство геометрических векторов в пространстве $Oxyz$, вектор a имеет координаты (x,y,z). $f(a)=(x+z+y,y,z)$.

г) V -- Евклидово пространство геометрических векторов в пространстве $Oxyz$, вектор a имеет координаты (x,y,z). $f(a)=(10x,y,z)$.

д) V -- Евклидово пространство геометрических векторов в пространстве $Oxyz$, вектор a имеет координаты (x,y,z). $f(a)=(x,0,0)$.

е) V -- Евклидово пространство вещественных функций, непрерывных на $(-\infty;+\infty)$. Скалярное произведение – определённый интеграл по отрезку $[0,1]$ от произведения двух функций. $A(a)=-2a$.

2. Какие из операторов задачи 1 являются самосопряжёнными?

Задания для самостоятельной работы

1. Найдите оператор, сопряжённый к заданному оператору A из $L(V,V)$.

а) V – Евклидово пространство геометрических векторов на плоскости Oxy, вектор a имеет координаты (x,y). $A(a)=-a$.

б) V – Евклидово пространство геометрических векторов на плоскости Oxy, вектор a имеет координаты (x,y). $A(a)=(0,x-y)$.

в) V -- Евклидово пространство геометрических векторов в пространстве $Oxyz$, вектор a имеет координаты (x,y,z). $f(a)=(x+z,y+x,z+y)$.

г) V -- Евклидово пространство геометрических векторов в пространстве $Oxyz$, вектор a имеет координаты (x,y,z). $f(a)=(-x,-y,-z)$.

д) V -- Евклидово пространство геометрических векторов в пространстве $Oxyz$, вектор a имеет координаты (x,y,z). $f(a)=(0,y,0)$.

е) V -- Евклидово пространство вещественных функций, непрерывных на $(-\infty;+\infty)$. Скалярное произведение – определённый интеграл по отрезку $[0,1]$ от произведения двух функций. $A(a)=a$.

2. Какие из операторов задачи 1 являются самосопряжёнными?

Занятие 18. *Квадратичные формы.*

Теоретические вопросы

1. Определение квадратичной формы.
2. Приведение квадратичной формы к каноническому виду.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

Приведите следующие квадратичные формы к каноническому виду двумя способами:

$2x1^2+ x2^2-4x1*x2-4x2*x3;$

$x1*x2+x2*x3;$

$x1^2+ x2^2 + x3^2-x1*x2+x2*x3;$

$x1^2 +x2*x3- x3^2.$

Задания для самостоятельной работы

Приведите следующие квадратичные формы к каноническому виду двумя способами:

$x1^2+ 4x2^2-2x1*x2-x2*x3;$

$x1*x2+2x2*x3;$

$x1^2+ x2^2 -x1*x2+x2*x3;$

$x1^2 +x2*x3- x2^2.$

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Контрольная работа № 1

1. Вектор x имеет координаты (x_1;x_2;x_3) в некотором базисе. Оператор A действует на x следующим образом: Ax=(x_1;x_3+x_2;x_1-x_2) . Является ли этот оператор линейным?
2. Найдите для оператора из задачи 1 (A^6+A^5)x по определению действий с операторами.
3. Составьте матрицу оператора из задачи 1.

Критерии оценивания контрольной работы

Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно реализован каждый метод решения	1 балл
2	Анализ результатов	2 балла

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

Контрольная работа № 2

1. Выясните, является ли следующее множество Евклидовым пространством. Если да, найдите норму указанного элемента a и угол между указанными элементами $в$ и c. Множество всех целых чисел, операции заданы следующим образом: $a\oplus b=a+b$, $\lambda\odot a=[\lambda a]$. Скалярное произведение a и $в$ *равно* $a+в$. $a=2$, $в=5$, $c=4$.
2. С помощью процесса ортогонализации получите ортонормированный базис из следующих элементов: *(1,1,3), (2,-1,1), (1,1,0),*

Критерии оценивания контрольной работы

Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно реализован каждый метод решения	2 балл
2	Анализ результатов	1 балла

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Критерии получения зачета

Зачет выставляется по результатам работы студента в течение семестра.
«Зачтено» выставляется студенту если он:

– отвечает на теоретические вопросы, рассмотренные на лекциях и практических занятиях;

– выполняет практические задания, предложенные на занятиях;

– получает удовлетворительную оценку за контрольные работы.

«Не зачтено» выставляется студенту при невыполнении хотя бы одного из указанных условий.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Основная литература

1. Бурмистрова, Е. Б. Линейная алгебра : учебник и практикум для академического бакалавриата / Е. Б. Бурмистрова, С. Г. Лобанов. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 421 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-3588-2. — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/6A5A6F52-FA19-4717-80BF-28331B7BA668.
2. Смолин, Ю. Н. Алгебра и теория чисел [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Ю. Н. Смолин. — 4-е изд., стер. — М. : ФЛИНТА : Наука, 2012. — 464 с. - ISBN 978-5-9765-0050-1 (ФЛИНТА), ISBN 978-5-02-034913-1 (Наука).
3. Кремер, Н. Ш. Линейная алгебра : учебник и практикум для академического бакалавриата / Н. Ш. Кремер, М. Н. Фридман. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 309 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-02350-3. — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/B8B7FE48-028E-4707-BCDB-625FC196408E.

7.2. Дополнительная литература

1. Ф.Л. Варпаховский, А.С. Солодовников, И.В.Стеллецкий. Алгебра. Группы, кольца, поля. Векторные и линейные пространства. Линейные отображения.2003.
2. А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.
3. А.И. Кострикин. Введение в алгебру. Линейная алгебра. МЦНМО, 2009
4. А.И.Кострикин. Основы алгебры. М., 2001.
5. Л.Я.Куликов. Алгебра и теория чисел. М., 2000.
6. А.Г.Курош. Курс высшей алгебры. М., 2002.
7. Е.С.Ляпин, А.Е.Евсеев. Алгебра и теория чисел. Ч.1-2. М., 1978.
8. Д.К.Фаддеев. Лекции по алгебре. М., 1984.

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Электронная библиотека https://www.biblio-online.ru
2. http://www.intuit.ru – Интернет-Университет Информационных Технологий
3. http://window.edu.ru – Каталог образовательных Internet-ресурсов.
4. http://mathmod.ru/; www.exponenta.ru

8. Материально-техническое обеспечение

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, оснащенная стандартной учебной мебелью, мультимедиапроектором, ноутбуком, колонками и интерактивной доской.

Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенная стандартной учебной мебелью. Доступна электронная библиотека кафедры математического анализа. Используются портреты великих математиков, необходимые чертёжные инструменты.

Помещение для самостоятельной работы – компьютерный класс с доступом к сети «Интернет» и ЭИОС СмолГУ.

9. Программное обеспечение

Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), лицензия 66975477 от 03.06.2016 (бессрочно).

Обучающимся обеспечен доступ к ЭБС «Юрайт», а также доступ в электронную информационно-образовательную среду университета.