

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»
Проректор по учебно-
методической работе
Ю. А. Устименко.
«б» сентября 2022 г.

Рабочая программа дисциплины
Б1.В.01. Дополнительные главы теории вероятностей

Направление подготовки: 02.04.01 Математика и компьютерные науки
Направленность (профиль): Методы моделирования в анализе и стохастике
Форма обучения - очная
Курс – 1
Семестр – 1
Всего зачетных единиц – 6, часов – 216
Форма отчетности: экзамен – 1 семестр

Программу разработал
кандидат физико-математических наук, доцент Хартов А. А.

Одобрена на заседании кафедры
«30» августа 2022 г., протокол № 11

Смоленск
2022 г.

1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Дополнительные главы теории вероятностей» содержится в Блоке 1 дисциплин из части, формируемой участниками образовательных отношений. Она изучается в 1 семестре и является вспомогательной для изучения таких дисциплин, как «Дискретные и вероятностные модели», «Вероятность и аппроксимация», «Случайные процессы», «Прикладные стохастические модели», «Аналитические и вероятностные методы».

Целью освоения дисциплины является содействие становлению профессиональной компетентности магистра математики и компьютерных наук за счет углубленного изучения понятий и методов теории вероятностей и их применений.

Изучение курса основано на традиционных методах высшей школы, тесной взаимосвязи со смежными курсами, а также на использовании современной учебной, методической литературы, информационных и образовательных технологий.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
ПК-1. Способен осуществлять поиск, анализ и систематизацию научной информации в области анализа и стохастики для реализации научно-исследовательских проектов	Знает: теоретические основы и технологии организации научно-исследовательской деятельности, современный аппарат, методологическую базу и сферу приложения анализа и стохастики, пути использования имеющихся знаний при проведении научно-исследовательской работы. Умеет: осуществлять поиск, анализ, систематизацию научной информации в области анализа и стохастики и их приложений для реализации научно-исследовательских проектов. Владеет: навыками организации и проведения научно-исследовательской деятельности в ходе выполнения профессиональных функций.
ПК-2. Способен применять методы стохастического и аналитического математического моделирования для решения прикладных задач	Знает: методы стохастического и аналитического математического моделирования. Умеет: выбирать методики разработки требований к модели, строить причинно-следственные связи, формулировать требования к модели и цели ее создания, исходя из анализа проблем, потребностей и возможностей, анализировать соответствие требованиям существующих моделей, алгоритмизировать деятельность. Владеет: навыками анализа проблемной ситуации, разработки требований к модели, постановки цели, разработки концепции модели, стохастического и аналитического математического моделирования для решения прикладных задач.

3. Содержание дисциплины

Случайные величины и их характеристики. Вероятностное пространство. Свойства вероятности. Независимость событий. Условные вероятности. Классические вероятностные модели. Случайные величины и их распределения. Случайные векторы и их распределения. Числовые характеристики случайных величин и векторов. Вероятностные неравенства. Виды сходимости случайных величин.

Характеристические функции. Определение характеристической функции и ее элементарные свойства. Теорема единственности. Формулы обращения. Теорема о свертке. Теорема о моментах. Критерии принадлежности к классу характеристических функций. Дополнительные утверждения, связанные с характеристическими функциями. Гауссовские системы.

Сходимость вероятностных мер. Понятие слабой сходимости вероятностных мер. Относительная компактность и плотность семейств вероятностных мер. Слабая сходимость и сходимость характеристических функций (теорема непрерывности Леви).

Важнейшие предельные теоремы для сумм независимых случайных величин: закон больших чисел Хинчина, центральная предельная теорема Леви, теорема Линдберга. Метод одного вероятностного пространства. Сходимость по вариации вероятностных мер. Вероятностные метрики.

Поведение сумм случайных величин почти наверное. Теорема Бореля-Кантелли. Закон «нуля или единицы». Сходимость рядов из независимых случайных величин. Усиленный закон больших чисел. Закон повторного логарифма.

4. Тематический план

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий				
			лекции	семинары	практические занятия	лабораторные занятия	самостоятельная работа
1.	Случайные величины и их характеристики.	69	12		12		45
2.	Характеристические функции	48	8		8		32
3.	Сходимость вероятностных мер.	48	8		8		32
4.	Поведение сумм случайных величин почти наверное.	24	4		4		16
	Контроль	27	27				
	Итого	216	32		32		152

5. Виды образовательной деятельности

Занятия лекционного типа

Лекция 1-2. Случайные величины и их характеристики. Вероятностное пространство. Свойства вероятности. Независимость событий. Условные вероятности.

Лекция 3. Случайные величины и их характеристики. Классические вероятностные модели.

Лекция 4. Случайные величины и их характеристики. Случайные величины и их распределения.

Лекция 5. Случайные величины и их характеристики. Случайные векторы и их распределения. Числовые характеристики случайных величин и векторов.

Лекция 6. Случайные величины и их характеристики. Вероятностные неравенства. Виды сходимости случайных величин.

Лекции 7. Характеристические функции. Определение характеристической функции и ее элементарные свойства.

Лекции 8. Характеристические функции. Теорема единственности. Формулы обращения. Теорема о свертке.

Лекция 9. Характеристические функции. Теорема о моментах. Критерии принадлежности к классу характеристических функций.

Лекция 10. Характеристические функции. Дополнительные утверждения, связанные с характеристическими функциями. Гауссовские системы.

Лекция 11-12. Сходимость вероятностных мер. Понятие слабой сходимости вероятностных мер. Относительная компактность и плотность семейств вероятностных мер. Слабая сходимость и сходимость характеристических функций (теорема непрерывности Леви).

Лекция 13-14. Сходимость вероятностных мер. Важнейшие предельные теоремы для сумм независимых случайных величин: закон больших чисел Хинчина, центральная предельная теорема Леви, теорема Линдеберга. Сходимость по вариации вероятностных мер. Вероятностные метрики.

Лекции 15-16. Поведение сумм случайных величин почти наверное. Теорема Бореля-Кантелли. Закон «нуля или единицы». Сходимость рядов из независимых случайных величин. Усиленный закон больших чисел. Закон повторного логарифма.

Занятия семинарского типа

Практические занятия 1-6. Случайные величины и их характеристики.

Задания для аудиторной работы: задачи из Глав 1-3 из [2] списка доп. литературы. Например, №1.26, 1.29, 2.1, 2.10, 2.40, 2.63, 2.101, 3.1, 3.19, 3.91, 3.185, 3.237, 3.255.

Задания для самостоятельной работы: задачи из Глав 1-3 из [2] списка доп. литературы. Например, №1.27, 1.30, 2.2, 2.11, 2.41, 2.64, 2.102, 3.2, 3.20, 3.92, 3.186, 3.238, 3.256

Практические занятия 7-10. Характеристические функции.

Задания для аудиторной работы: задачи из Главы 4 из [2] списка доп. литературы. Например, №4.13-4.42 (нечетные), 4.70-4.100 (нечетные), №4.115-4.133 (нечетные)

Задания для самостоятельной работы: задачи из Главы 4 из [2] списка доп. литературы. Например, №4.13-4.42 (четные), №4.70-4.100 (четные), №4.115-4.133 (четные).

Практические занятия 11-14. Сходимость вероятностных мер.

Задания для аудиторной работы: задачи из Главы 5 и из параграфов 1,4, 6 Главы 6 из [2] списка доп. литературы. Например, №5.33-5.52 (нечетные), 6.1-6.20 (нечетные), №6.77-6.99 (нечетные), №6.134-6.157 (нечетные).

Задания для самостоятельной работы: задачи из Главы 5 и из параграфов 1, 4, 6 Главы 6 из [2] списка доп. литературы. Например, №5.33-5.52 (четные), 6.1-6.20 (четные), №6.77-6.99 (четные), №6.134-6.157 (четные).

Практические занятия 15-16. Поведение сумм случайных величин почти наверное.

Задания для аудиторной работы: задачи из параграфов 2, 3, 5 Главы 6 из [2] списка доп. литературы. Например, №6.33-6.50 (нечетные), №6.64-6.76 (нечетные), №6.119-6.122 (нечетные).

Задания для самостоятельной работы: задачи из параграфов 2, 3, 5 Главы 6 из [2] списка доп. литературы. Например, №6.33-6.50 (четные), №6.64-6.76 (четные), №6.119-6.122 (четные).

На каждом практическом занятии обучающимся задаются *контрольные вопросы*: по материалам соответствующей лекции дать определения важнейших понятий, перечислить свойства объекта, изложить метод, напомнить формулировку той или иной теоремы.

Самостоятельная работа

Задания для самостоятельной работы приводятся в планах практических занятий.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Текущая аттестация осуществляется на каждом практическом занятии в процессе выполнения заданий для аудиторной работы, в процессе проверки домашней самостоятельной работы. Проведение текущего контроля осуществляется также посредством проведения аудиторных проверочных работ.

Образец проверочной работы

1. Найти х.ф. для $2X_1 - 3X_2 - 1$, где $X_1 \sim \text{Exp}(1/2)$ и $X_2 \sim \mathcal{N}(1, 2)$ независимы.
2. Доказать, что функция $f(t) = \exp\{\cos t - 1\}$ является характеристической. Описать соответствующее распределение и найти математическое ожидание и дисперсию (с помощью х. ф.).
3. Пусть $X \sim \text{Geom}(p)$ (первый успех), $p \in (0, 1)$. С помощью х.ф. найти предельное распр. $(X_p - 1)/|\ln p|$ при $p \uparrow 1$.
4. Пусть X_1, X_2, \dots — последовательность независимых случайных величин, $X_j \sim U[0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$. Найти предел по вероятности для $\exp\{\frac{1}{n}(X_1^k + \dots + X_n^k)\}$ при $n \rightarrow \infty$ и любом $k \in \mathbb{N}$.
5. Пусть X_1, X_2, \dots — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $EX_1 = 0$, $0 < DX_1 < \infty$. Известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\frac{1}{\sqrt{n}}|\sum_{k=1}^n X_k| > 1) = 1/3$. Найти EX_k^2 (значения функции Φ и ее квантилей полагать известными).

Критерии оценивания проверочной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть проверочной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно решено одно задание	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация осуществляется посредством проведения экзамена.

Вопросы к экзамену

1. Вероятностное пространство.
2. Основные свойства вероятности.
3. Классическое определение вероятности и геометрические вероятности.
4. Независимость событий.
5. Схема Бернулли и ее обобщения.
6. Условные вероятности.
7. Формула умножения вероятностей, формула полной вероятностей и формула Байеса.
8. Случайные величины и их распределения.
9. Типы распределений случайных величин. Разложение Лебега.
10. Важные примеры одномерных распределений
11. Случайные векторы и их распределения
12. Типы распределений случайных векторов.
13. Важные примеры многомерных распределений.

14. Принадлежность к классу случайных величин. Функция от случайной величины.
15. Независимость случайных величин.
16. Критерий независимости случайных величин.
17. Сумма независимых случайных величин.
18. Математическое ожидание случайной величины.
19. Свойства математического ожидания.
20. Дисперсия случайной величины.
21. Свойства дисперсии.
22. Другие числовые характеристики: моменты, мода, медиана
23. Ковариация и коэффициент корреляции и их свойства.
24. Вероятностные неравенства.
25. Типы сходимости случайных величин и соотношения между ними.
26. Характеристическая функция. Определение, элементарные свойства и примеры
27. Теорема единственности и формулы обращения.
28. Теорема о свертке. Применения к сумме независимых случайных величин.
29. Теорема о моментах.
30. Условия принадлежности к классу характеристических функций: критерий Бохнера, теорема Пойа.
31. Неравенства для характеристических функций.
32. Слабая сходимость вероятностных мер.
33. Относительная компактность и плотность семейства вероятностных мер.
34. Теоремы Хелли
35. Теорема Прохорова
36. Теорема непрерывности Леви
37. Законы больших чисел Бернулли, Чебышева и Хинчина.
38. Центральная предельная теорема Леви, интегральная теорема Муавра-Лапласа.
39. Центральная предельная теорема Линдберга. Дробь Ляпунова.
40. Сходимость по вариации вероятностных мер.
41. Вероятностные метрики: Леви, Прохорова, равномерная, Ки Фан, полной вариации.
42. Теорема Бореля-Кантелли
43. Хвостовая сигма-алгебра. Примеры. «Закон нуля или единицы» Колмогорова.
44. Теорема о двух рядах.
45. Теорема о трех рядах.
46. Усиленные законы больших чисел Колмогорова.
47. Закон повторного логарифма и его смысл.

Образец экзаменационного задания

1. Вероятностные неравенства.
2. Теорема о трех рядах.
3. Постройте пример, когда $X_n \rightarrow X$, $n \rightarrow \infty$, по распределению, но сходимости в $L_2(\Omega, \mathbb{P})$ нет.
4. Является ли функция $f(t) = \exp\{4(e^{it} - 1 - it - t^2)\}$ характеристической? Если да, то какого распределения и с каким м.о.? Если нет, объяснить почему?
5. Пусть X_1, X_2, \dots — нез. случайные величины, $X_j \sim U[-1, 1]$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\sum_{k=1}^n X_k > -\sqrt{n})$.

Критерии оценивания ответа на экзамене

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Правильный ответ на каждый вопрос	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Основная литература

1. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 479 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-00211-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/488573>

2. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник и практикум для вузов / Н. Ш. Кремер. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 538 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10004-4. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/475438>

7.2. Дополнительная литература

1. Боровков А. А. Теория вероятностей, – Москва: Книжный дом «Либроком», 2014.

2. Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г., Задачи по теории вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы: учебное пособие, – Москва: Изд-во «КДУ», 2009.

3. Ротарь В. И. Теория вероятностей, – Москва: Изд-во «Высшая школа», 1992.

4. Ширяев А. Н. Вероятность в 2-х кн., – Москва: Изд-во «МЦНМО», 2017.

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

- Система дистанционного обучения Смоленского государственного университета <http://cdo.smolgu.ru>
- Электронно-библиотечная система университета <http://biblioteka.smolgu.ru>
- Национальный открытый университет <http://www.intuit.ru>
- Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru>

8. Материально-техническое обеспечение

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, оснащенная стандартной учебной мебелью, интерактивной доской, мультимедиапроектором, ноутбуком и колонками.

Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенная стандартной учебной мебелью, компьютерами с выходом в Интернет.

Помещение для самостоятельной работы – компьютерный класс с доступом к сети «Интернет» и ЭИОС СмолГУ.

9. Программное обеспечение

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине используется Информационно-вычислительный центр физико-математического факультета.

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используются:

1. Система дистанционного обучения СмолГУ. URL: <http://www.cdo.smolgu.ru>. (СДО Русский Moodle 3KL Norm с техническим обслуживанием, Акт на передачу прав №УТДЮ0001785 от 06.12.2016)

2. Microsoft Open License (Windows XP, 7, Office 2003-2016) - Лицензия 66975477 от 03.06.2016 – в составе: ОС Windows, MS Excel 2003/2007.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 03B6A3C600B7ADA9B742A1E041DE7D81B0
Владелец: Артеменков Михаил Николаевич
Действителен: с 04.10.2021 до 07.10.2022