

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»
Кафедра математического анализа

«Утверждаю»
Проректор по учебно-
методической работе
Ю. А. Устименко.
«б» сентября 2022 г.

Рабочая программа дисциплины
Б1.В.04. Полианалитические функции и их обобщения

Направление подготовки: 02.04.01 Математика и компьютерные науки
Направленность (профиль): Методы моделирования в анализе и стохастике
Форма обучения - очная
Курс – 1,2
Семестры – 2,3
Всего зачетных единиц – 8, часов – 288
Форма отчетности: экзамен – 2 семестр, зачет – 3 семестр

Программу разработал
доктор физико-математических наук, профессор Расулов К.М.

Одобрена на заседании кафедры
«30» августа 2022 г., протокол № 11

Смоленск
2022

1. Место дисциплины в структуре ОП

Учебная дисциплина «Полианалитические функции и их обобщения» относится к той части учебного плана магистратуры направления подготовки 02.04.01 Математика и компьютерные науки (профиль: Методы моделирования в анализе и стохастике), которая формируется участниками образовательных отношений.

Содержание дисциплины тесно связано с научными исследованиями, ведущимися на кафедре математического анализа по теории краевых задач комплексного анализа, и призвано обеспечить необходимую для выпускников магистратуры фундаментальную подготовку по высшей математике. Кроме того, знание основ теории полианалитических функций и их обобщений является необходимым элементом при изучении некоторых дисциплин по выбору, предусмотренных учебным планом (классические краевые задачи для полианалитических функций, неклассические краевые задачи для полианалитических функций).

Изучение дисциплины основано на традиционных методах высшей школы, тесной взаимосвязи со смежными курсами, а также на использовании современной учебной, методической литературы, информационных и образовательных технологий.

Предполагается, что после изучения и освоения настоящего курса студенты магистратуры получат цельное представление об одной из важнейших разделов комплексного анализа – теории полианалитических функций и их обобщений. А это, в свою очередь, будет способствовать успешной научно-исследовательской работе магистрантов (в частности, при подготовке магистерских диссертаций), а также в дальнейшей их научно-педагогической деятельности.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
ПК-1. Способен осуществлять поиск, анализ и систематизацию научной информации в области анализа и стохастики для реализации научно-исследовательских проектов	Знает: теоретические основы и технологии организации научно-исследовательской деятельности, современный аппарат, методологическую базу и сферу приложения анализа и стохастики, пути использования имеющихся знаний при проведении научно-исследовательской работы. Умеет: осуществлять поиск, анализ, систематизацию научной информации в области анализа и стохастики и их приложений для реализации научно-исследовательских проектов. Владет: навыками организации и проведения научно-исследовательской деятельности в ходе выполнения профессиональных функций.
ПК-2. Способен применять методы стохастического и аналитического математического моделирования для решения прикладных задач	Знает: методы стохастического и аналитического математического моделирования. Умеет: выбирать методики разработки требований к модели, строить причинно-следственные связи, формулировать требования к модели и цели ее создания, исходя из анализа проблем, потребностей и возможностей, анализировать соответствие требованиям существующих моделей, алгоритмизировать деятельность. Владет: навыками анализа проблемной ситуации, разработки требований к модели, постановки цели, разработки концепции модели, стохастического и аналитического математического моделирования для решения прикладных задач.

3. Содержание дисциплины

2 семестр

Полианалитические функции и их связь с полигармоническими функциями двух действительных переменных. Различные определения полианалитических функций и их эквивалентность. Определение полигармонической функции двух действительных переменных. Основные теоремы, устанавливающие связь между полианалитическими и полигармоническими функциями.

Интегральные представления полианалитических функций. Внутренние теоремы единственности для аналитических и полианалитических функций. Интегральные представления полианалитических функций. Неизолированные нули полианалитических функций. Вырожденные полианалитические функции.

Целые полианалитические функции. Кольцо целых полианалитических функций. Полианалитические многочлены и их нули. Факторизация целых полианалитических функций. Вырожденные целые полианалитические функции.

Изолированные особые точки полианалитических функций. Изолированные особенности полианалитических функций. Факторизация полианалитической функции в окрестности её изолированной особенности.

Граничные свойства аналитических и полианалитических функций. Существование угловых пределов. Полианалитические функции в нерациональных образах круга. Граничные теоремы единственности для аналитических и полианалитических функций. Интеграл типа Коши для полианалитических функций и его основные свойства.

3 семестр

Основы теории линейных интегральных уравнений. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши. Методы регуляризации сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши.

Метааналитические функции. Определение метааналитических функций. Внутренние и граничные теоремы единственности для метаналитических функций. Модули полианалитического типа.

Квазигармонические функции комплексного переменного и их связь с полианалитическими функциями. Определение квазигармонической функции и её представление через аналитическую функцию комплексного переменного. О некоторых общих свойствах квазигармонических и полианалитических функций.

О некоторых общих фундаментальных свойствах полианалитических функций и их обобщений. Внутренние теоремы единственности. Граничные теоремы единственности. Конформная неэквивалентность.

4. Тематический план

2 семестр

№ п/п	Разделы и Темы	Всего часов	Формы занятий			
			лекции	практические занятия	лабораторные занятия	самостоятельная работа
1	Полианалитические функции и их связь с полигармоническими функциями двух действительных переменных	28	4	4	–	20
2	Внутренние теоремы	14	2	2	–	10

	единственности для аналитических и полианалитических функций.					
3	Интегральные представления полианалитических функций	14	2	2	–	10
4	Целые полианалитические функции	14	2	2	–	10
5	Изолированные особые точки полианалитических функций	14	2	2	–	10
6	Граничные свойства аналитических и полианалитических функций.	21	4	2	–	15
7	Контрольная работа	12		2	–	10
8	Экзамен	27			–	27
Всего за семестр		144	16	16	–	112

3 семестр

№ п/п	Разделы и Темы	Всего часов	Формы занятий			
			лекции	практические занятия	лабораторные занятия	самостоятельная работа
1	Линейные интегральные уравнения Фредгольма и их классификация.	20	2	2	–	16
2	Сингулярные интегральные уравнения. Характеристическое сингулярное интегральное уравнение и метод его решения.	24	4	2	–	18
3	Полные сингулярные интегральные уравнения и методы их регуляризации. Теоремы Нетера	20	2	2	–	16
4	Метаналитические функции комплексного переменного и их связь с аналитическими функциями	20	2	2	–	16
5	Внутренние и граничные теоремы единственности для метаналитических функций. Модули полианалитического типа	20	2	2	–	16
6	Квазигармонические функции комплексного переменного и их связь с	20	2	2	–	16

	полианалитическими функциями.					
7	О некоторых общих фундаментальных свойствах полианалитических функций и их обобщений	14	2	2	–	10
8	Контрольная работа	6		2	–	4
ИТОГО		144	16	16	–	112

5. Виды образовательной деятельности

2 семестр

Занятия лекционного типа

Лекции 1-2. Полианалитические функции и их связь с полигармоническими функциями двух действительных переменных. Различные определения полианалитических функций и их эквивалентность. Определение полигармонической функции двух действительных переменных. Основные теоремы, устанавливающие связь между полианалитическими и полигармоническими функциями.

Лекция 3. Внутренние теоремы единственности для аналитических и полианалитических функций. Нули аналитических функций и внутренние теоремы единственности для аналитических функций. Нули полианалитических функций и внутренние теоремы единственности для полианалитических функций.

Лекция 4. Интегральные представления полианалитических функций. Интегральные представления полианалитических функций. Неизолированные нули полианалитических функций. Вырожденные полианалитические функции.

Лекция 5. Целые полианалитические функции. Кольцо целых полианалитических функций. Полианалитические многочлены и их нули. Факторизация целых полианалитических функций. Вырожденные целые полианалитические функции.

Лекция 6. Изолированные особые точки полианалитических функций. Изолированные особенности полианалитических функций. Факторизация полианалитической функции в окрестности её изолированной особенности.

Лекции 7-8. Граничные свойства полианалитических функций. Существование угловых пределов. Полианалитические функции в нерациональных образах круга. Граничные теоремы единственности для полианалитических функций. Интеграл типа Коши и его основные свойства. Теоремы типа Лиувилля.

Занятия семинарского типа

Занятие № 1. Полианалитические функции и их общие представления через аналитические функции комплексного переменного

Основные понятия: полианалитические функции комплексного переменного, дифференциальный оператор Коши-Римана, обобщенное уравнение Коши-Римана, общие представления полианалитических функций.

Вопросы для обсуждения:

1. Каковы два основных определения полианалитической функции в области?
2. Как устанавливается эквивалентность различных определений полианалитических функций?
3. Каковы общие представления полианалитических функций через аналитические функции комплексного переменного?

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Подготовьте научный доклад на тему «Полианалитические функции и их приложения».

По указанному выше заданию кто-то из студентов должен подготовить доклад к практическому занятию.

Литература

Основная: 1, 2, 5.

Дополнительная: 1, 3.

Занятие № 2. Полигармонические функции двух действительных переменных

Основные понятия: обобщенное уравнение Лапласа, полигармонические функции двух действительных переменных в области, сопряженные полигармонические функции, общие представления полианалитических (полигармонических) функций в круговых областях.

Вопросы для обсуждения:

1. Какой вид имеет обобщенное уравнение Лапласа на плоскости?
2. Дайте определение полигармонической функции двух действительных переменных в области (в точке)?
3. Сформулируйте основные теоремы, устанавливающие связь между полианалитическими и полигармоническими функциями?
4. Какие функции называются сопряженными полигармоническими функциями?
5. Каковы общие представления полианалитических (полигармонических) в круге функций через аналитические функции (гармонические функции)?

Задания для самостоятельной работы

Задание 2. Подготовьте научный доклад на тему «*Полигармонические функции и их приложения*».

По указанному выше заданию кто-то из студентов должен подготовить доклад к практическому занятию.

Литература

Основная: 2, 4, 5.

Дополнительная: 1, 2, 3.

Занятие № 3. Внутренние теоремы единственности для аналитических и полианалитических функций

Основные понятия: предельной точки (точки сгущения) множества, порядок точки сгущения множества, аналитические кривые, нули аналитических (полианалитических) функций, порядок точки сгущения, внутренние теоремы единственности для аналитических (полианалитических) функций.

Вопросы для обсуждения:

1. Сформулируйте определение нуля аналитической (полианалитической) функции $f(z)$. Приведите примеры.
2. Что называется порядком (кратностью) нуля аналитической функции $f(z)$? Приведите примеры.
3. Какие способы определения порядка нулей аналитической функции Вам известны?
4. Дайте определение предельной точки порядка n (точки сгущения порядка n). Приведите примеры.
5. Сформулируйте основные внутренние теоремы единственности для аналитических (полианалитических) функций.

Задания для самостоятельной работы

Задание 3. Подготовьте научный доклад на тему «*Внутренние теоремы единственности для полианалитических функций*».

По указанному выше заданию кто-то из студентов должен подготовить доклад к практическому занятию.

Литература

Основная: 1, 2, 4.

Дополнительная: 1.

Занятие № 4. Интегральные представления полианалитических функций

Основные понятия: формула Теодореску для полианалитических функций, приведенная полианалитическая функция, интегральная формула для приведенных полианалитических функций, интеграл типа Коши для полианалитических функций.

Вопросы для обсуждения:

1. Какой вид имеет интегральная формула Теодореску для полианалитических функций?
2. Какая функция называется приведенной полианалитической функцией?
3. Каково интегральное представление приведенной полианалитической функции?
5. Как определяется интеграл типа Коши для полианалитических функций?

Задания для самостоятельной работы

Задание 4. Подготовьте научный доклад на тему «*Интегральные представления полианалитических функций и их приложения*».

По указанному выше заданию кто-то из студентов должен подготовить доклад к практическому занятию.

Литература

Основная: 2, 4, 5.

Дополнительная: 1, 3.

Занятие № 5. Факторизация целых полианалитических функций

Основные понятия: целая полианалитическая функция, кольцо целых полианалитических функций, полианалитические многочлены, нули целых полианалитических функций, факторизация целых полианалитических функций.

Вопросы для обсуждения:

1. Дайте определение целой полианалитической функции.
2. Почему целые полианалитические функции образует кольцо?
3. Какое количество изолированных нулей может иметь полианалитический многочлен?
4. Какая функция называется полимероморфной?
5. Каковы основные теоремы факторизации для целых полианалитических функций?

Задания для самостоятельной работы

Задание 5. Подготовьте научный доклад на тему «*Факторизация целых полианалитических функций и её приложения*».

По указанному выше заданию кто-то из студентов должен подготовить доклад к практическому занятию.

Литература

Основная: 2, 5.

Дополнительная: 1.

Занятие № 6. Изолированные особые точки полианалитических функций

Основные понятия: проколота окрестность точки, изолированная особая точка, предельное значение функции, предельное множество функции в точке, лорановское изображение полианалитической функции, особая точка непрерывности, особая точка окружностного типа, полярная особенность, существенная особенность.

Вопросы для обсуждения:

1. Дайте определение изолированной особой точки для полианалитической функции.
2. Каково предельное множество полианалитической функции в ее изолированной особой точке?

- Какая точка называется особой точкой непрерывности (окружностного типа, полярной особенностью, существенной особенностью) полианалитической функции?
- Каковы основные теоремы факторизации для полианалитической функции в окрестности ее изолированной особенности?

Задания для самостоятельной работы

Задание 6. Подготовьте научный доклад на тему «Факторизация полианалитической функции в окрестности ее изолированной особенности».

По указанному выше заданию кто-то из студентов должен подготовить доклад к практическому занятию.

Литература

Основная: 2, 5.

Дополнительная: 1.

Занятие № 7. Граничные свойства полианалитических функций

Основные понятия: согласованная функция, сектор Штольца, жорданова область, круговой сектор, угловые предельные значения, нерациональные образы круга, бианалитические функции, радиальные предельные значения.

Вопросы для обсуждения:

- Дайте определение функции, согласованной с полианалитической функцией.
- Каково общее представление согласованной функции?
- Какая область называется жордановой?
- Как определяется сектор Штольца с вершиной в данной граничной точке области?
- Каковы основные граничные свойства согласованной функции?
- Сформулируйте теорему Линделёфа для полианалитических функций?
- Каковы основные теоремы о существовании угловых граничных значений для полианалитических функций?

Задания для самостоятельной работы

Задание 7. Подготовьте научный доклад на тему «Граничные свойства полианалитических функций и их приложения».

По указанному выше заданию кто-то из студентов должен подготовить доклад к практическому занятию.

Литература

Основная: 2, 4, 5.

Дополнительная: 1, 3.

Занятие № 8. Контрольная работа

Образец контрольной работы

- Является ли функция $w = z^3 - 10|z - 1|^2$ бианалитической в какой-либо области? Ответ обосновать.
- Является ли функция $u = x^4 - y^4 + 5xy$ бигармонической в какой-либо области? Ответ обосновать.
- Имеет ли бианалитическая функция $f(z) = \sin z + \bar{z} \cos z$ неизоллированные нули? Ответ обосновать.
- Найдите угловые граничные значения бианалитической функции $f(z) = 100(1 - z\bar{z})$ на единичной окружности.
- Докажите, что для того чтобы бианалитическая функция $f(z)$ была вырожденной в области G , необходимо и достаточно, чтобы она была представима в одном из следующих видов:

$$f(z) = A \cdot (e^{i\alpha} z + \bar{z}) + B; \quad f(z) = A \cdot (z - c)^\gamma (\bar{z} - \bar{c}) + B,$$

где A, B, c, α, γ – постоянные, причем $\text{Im } \alpha = 0, |\gamma| = 1$.

3 семестр

Занятия лекционного типа

Лекция 1. Интегральные уравнения Фредгольма и их классификация. Определения интегральных уравнений Фредгольма. Теоремы Фредгольма для интегральных уравнений второго рода. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода с вырожденными ядрами и методы их решения.

Лекции 2-4. Сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши. Краевая задача Римана для аналитических функций. Характеристическое сингулярное интегральное уравнение и метод его решения. Полные сингулярные интегральные уравнения и методы их регуляризации. Теоремы Нетера. Сингулярные интегральные уравнения с вырожденными ядрами и методы их решения.

Лекция 5. Метаналитические функции. Определение метаналитических функций комплексного переменного и их связь с аналитическими функциями. Обобщенные метаналитические функции.

Лекция 6. Внутренние и граничные теоремы единственности для метаналитических функций. Нули метаналитических функций и внутренние теоремы единственности для метаналитических функций. Граничные теоремы единственности для метаналитических функций. Модули полианалитического типа.

Лекция 7. Квазигармонические функции. Определение квазигармонических функций и их связь с полианалитическими функциями комплексного переменного. Граничное поведение квазигармонических функций в круговых областях.

Лекция 8. О некоторых общих фундаментальных свойствах полианалитических функций и их обобщений. Внутренние теоремы единственности. Граничные теоремы единственности. Конформная неэквивалентность.

Занятия семинарского типа

Занятие № 1. Интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода

Основные понятия: интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода, условия разрешимости, собственные значения и собственные функции ядра интегрального уравнения, резольвента ядра интегрального уравнения, спектр уравнения, вырожденные ядра.

Вопросы для обсуждения:

1. Какое интегральное уравнение называется уравнением Фредгольма второго рода?
2. Когда ядро интегрального уравнения Фредгольма называется вырожденным?
3. Каковы основные методы решения интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода?
4. Сформулируйте основные теоремы о разрешимости интегральных уравнений Фредгольма второго рода (теоремы Фредгольма).

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Подготовьте научный доклад на тему «Интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода с вырожденными ядрами и методы их решения».

По указанному выше заданию кто-то из студентов должен подготовить доклад к практическому занятию.

Литература

Основная: 3, 4.

Дополнительная: 3.

Занятие № 2. Характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши

Основные понятия: сингулярный оператор с ядром Коши, характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши, полное сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши, краевая задача Римана для аналитических функций.

Вопросы для обсуждения:

1. Дайте определение сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши.
2. Какое сингулярное уравнение называется характеристическим?
3. Какая связь между краевой задачей Римана и характеристическим сингулярным интегральным уравнением?
4. Изложите логическую схему решения характеристического сингулярного интегрального уравнения.

Задания для самостоятельной работы

Задание 2. Подготовьте научный доклад на тему «Характеристические сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши и методы их решения».

По указанному выше заданию кто-то из студентов должен подготовить доклад к практическому занятию.

Литература

Основная: 1, 3, 4.

Дополнительная: 2, 3.

Занятие № 3. Полные сингулярные интегральные уравнения и методы их регуляризации

Основные понятия: характеристическое сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши, полное сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши, регуляризация полного уравнения, методы регуляризации, регуляризирующий оператор, теоремы Нетера.

Вопросы для обсуждения:

1. Дайте определение полного сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши.
2. Что называется регуляризацией полных сингулярных интегральных уравнений?
3. Сформулируйте основные теоремы об сингулярных интегральных уравнениях (теоремы Нетера).
4. Каков общий вид полного сингулярного интегрального уравнения с вырожденным ядром?
5. Изложите логические схемы основных методов решения сингулярных интегральных уравнений с вырожденными ядрами.

Задания для самостоятельной работы

Задание 3. Подготовьте научный доклад на тему «Сингулярные интегральные уравнения с вырожденными ядрами и методы их решения».

По указанному выше заданию кто-то из студентов должен подготовить доклад к практическому занятию.

Литература

Основная: 3, 4.

Дополнительная: 2, 3.

Занятие № 4. Метааналитические функции и их обобщения

Основные понятия: метааналитическая функция, характеристическое уравнение, корни характеристического уравнения, общее представление метааналитических функций, обобщенные метааналитические функции.

Вопросы для обсуждения:

1. Дайте определение метааналитической функции в области.
2. Какая связь между метааналитическими и бианалитическими функциями?
3. Каково общее представление метааналитических функций через аналитические функции комплексного переменного?

4. Как определяется интеграл типа Коши для метааналитических функций?
5. Каковы основные внутренние и граничные теоремы единственности для метааналитических функций?
6. Дайте определение обобщенных метааналитических функций.

Задания для самостоятельной работы

Задание 4. Подготовьте научный доклад на тему «*Метааналитические функции и их обобщения*».

По указанному выше заданию кто-то из студентов должен подготовить доклад к практическому занятию.

Литература

Основная: 2, 4, 5.

Дополнительная: 1.

Занятие № 5. Внутренние и граничные теоремы единственности для метааналитических функций

Основные понятия: предельные точки (точки сгущения) множества, порядок точки сгущения множества, аналитические кривые, нули метааналитических функций, порядок точки сгущения, угловые предельные значения, радиальные предельные значения.

Вопросы для обсуждения:

1. Сформулируйте определение нуля метааналитической функции $f(z)$. Приведите примеры.
2. Дайте определение предельной точки порядка n (точки сгущения порядка n). Приведите примеры.
3. Сформулируйте основные внутренние теоремы единственности для метааналитических функций.
4. Сформулируйте основные граничные теоремы единственности для метааналитических функций.

Задания для самостоятельной работы

Задание 5. Подготовьте научный доклад на тему «*Граничные теоремы единственности для метааналитических функций*».

По указанному выше заданию кто-то из студентов должен подготовить доклад к практическому занятию.

Литература

Основная: 2, 4, 5.

Дополнительная: 1.

Занятие № 6. Квазигармонические функции комплексного переменного

Основные понятия: дифференциальный оператор Лапласа, дифференциальное уравнение Бауэра, гармоническая функция, квазигармоническая функция, род квазигармонической функции, общее представление квазигармонической функции рода n в области.

Вопросы для обсуждения:

1. Дайте определение квазигармонической функции рода n в области.
2. Какая связь между квазигармоническими и полианалитическими функциями?
3. Почему квазигармонические функции являются обобщениями аналитических функций комплексного переменного?

Задания для самостоятельной работы

Задание 7. Подготовьте научный доклад на тему «*Квазигармонические функции комплексного переменного и некоторые их приложения*».

По указанному выше заданию кто-то из студентов должен подготовить доклад к практическому занятию.

Литература

Основная: 3.

Дополнительная: 4.

Занятие № 7. О некоторых общих фундаментальных свойствах полианалитических функций и их обобщений

Основные понятия: полианалитические функции, метааналитические функции, обобщенные метааналитические функции, квазигармонические функции, конформная эквивалентность функций.

Вопросы для обсуждения:

1. Каким дифференциальным уравнением порождается полианалитическая (метааналитическая) функция?
2. Какой вид имеет дифференциальное уравнение Бауэра?
3. Сформулируйте основные внутренние и граничные теоремы единственности для полианалитических (метааналитических) функций.
4. Почему не обладают свойством конформной эквивалентности классы полианалитических, метааналитических и квазигармонических функций?

Задания для самостоятельной работы

Задание 5. Подготовьте научный доклад на тему «О конформной неэквивалентности классов полианалитических функций».

По указанному выше заданию кто-то из студентов должен подготовить доклад к практическому занятию.

Литература

Основная: 2, 3, 4, 5.

Дополнительная: 1, 3, 4.

Занятие № 8. Контрольная работа

Образец контрольной работы

1. Решите следующее интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$\varphi(t) + \int_L \left(\frac{2t}{\tau} + 5\tau^{-2} \right) \varphi(\tau) d\tau = 3t + 1, \text{ где } L = \{t : |t| = 1\}.$$

2. Решите следующее характеристическое сингулярное интегральное уравнение:

$$t(t-2)\varphi(t) + \frac{t^2 - 6t + 8}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \frac{1}{t}, \text{ где } L = \{t : |t| = 1\}.$$

3. Решите следующее сингулярное интегральное уравнение с вырожденным ядром:

$$t\varphi(t) - \frac{t-2}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \int_L (\tau - t)\varphi(\tau) d\tau = 2(t^2 + 1), \text{ где } L = \{t : |t-1| = 2\}.$$

4. Напишите общий вид метааналитической функции $F(z)$, определяемой следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial \bar{z}^2} - 3 \frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}} + 4F(z) = 0.$$

5. Докажите, что класс $A_2(G)$ бианалитических функций в области G не обладает свойством конформной эквивалентности.

Самостоятельная работа

Списки теоретических вопросов и задания для самостоятельной работы приводятся в планах практических занятий.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Проведение текущего контроля в каждом семестре осуществляется на каждом семинарском занятии - в процессе выполнения и обсуждения научных докладов.

Критерии оценивания заданий (докладов)

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Критерии	Количество баллов (*)
1	Полнота и качество выполнения задания	3 балла
2	Качество подачи и оформления	2 балла

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания задания:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	5
2	Хорошо	4
3	Удовлетворительно	3
4	Неудовлетворительно	0-2

Проведение текущего контроля осуществляется также посредством проведения аудиторных контрольных работ.

2 семестр

Образец контрольной работы

1. Является ли функция $w = z^3 - 10|z-1|^2$ бианалитической в какой-либо области? Ответ обосновать.
2. Является ли функция $u = x^4 - y^4 + 5xy$ бигармонической в какой-либо области? Ответ обосновать.
3. Имеет ли бианалитическая функция $f(z) = \sin z + \bar{z} \cos z$ неизоллированные нули? Ответ обосновать.
4. Найдите угловые граничные значения бианалитической функции $f(z) = 100(1 - z\bar{z})$ на единичной окружности.
5. Докажите, что для того чтобы бианалитическая функция $f(z)$ была вырожденной в области G , необходимо и достаточно, чтобы она была представима в одном из следующих видов:

$$f(z) = A \cdot (e^{i\alpha} z + \bar{z}) + B; \quad f(z) = A \cdot (z - c)^\gamma (\bar{z} - \bar{c}) + B,$$

где A, B, c, α, γ – постоянные, причем $\text{Im } \alpha = 0, |\gamma| = 1$.

Критерии оценивания контрольной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно реализован каждый метод решения	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

3 семестр

Образец контрольной работы

1. Решите следующее интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$\varphi(t) + \int_L \left(\frac{2t}{\tau} + 5\tau^{-2} \right) \varphi(\tau) d\tau = 3t + 1, \text{ где } L = \{t : |t| = 1\}.$$

2. Решите следующее характеристическое сингулярное интегральное уравнение:

$$t(t-2)\varphi(t) + \frac{t^2 - 6t + 8}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = \frac{1}{t}, \text{ где } L = \{t : |t| = 1\}.$$

3. Решите следующее сингулярное интегральное уравнение с вырожденным ядром:

$$t\varphi(t) - \frac{t-2}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau - \int_L (\tau - t)\varphi(\tau) d\tau = 2(t^2 + 1), \text{ где } L = \{t : |t-1| = 2\}.$$

4. Напишите общий вид метааналитической функции $F(z)$, определяемой следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial^2 F(z)}{\partial \bar{z}^2} - 3 \frac{\partial F(z)}{\partial \bar{z}} + 4F(z) = 0.$$

5. Докажите, что класс $A_2(G)$ бианалитических функций в области G не обладает свойством конформной эквивалентности.

Критерии оценивания контрольной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно реализован каждый метод решения	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

2 семестр

Промежуточная аттестация во 2-м семестре осуществляется посредством проведения экзамена.

Вопросы к экзамену

1. Различные определения полианалитических функций и их эквивалентность.
2. Определение полигармонической функции двух действительных переменных.

3. Основные теоремы, устанавливающие связь между полианалитическими и полигармоническими функциями.
4. Внутренние теоремы единственности для полианалитических функций.
5. Интегральные представления полианалитических функций.
6. Неизолированные нули полианалитических функций.
7. Вырожденные полианалитические функции.
8. Кольцо целых полианалитических функций.
9. Полианалитические многочлены и их нули.
10. Факторизация целых полианалитических функций.
11. Вырожденные целые полианалитические функции.
12. Изолированные особенности полианалитических функций.
13. Факторизация полианалитической функции в окрестности её изолированной особенности.
14. Условия существования угловых пределов для полианалитических функций.
15. Полианалитические функции в нерациональных образах круга.
16. Граничные теоремы единственности для полианалитических функций.
17. Интеграл типа Коши для полианалитических функций и его основные свойства.
18. Теоремы типа Лиувилля для полианалитических функций.

Образец экзаменационного задания

Вариант k

(в практических заданиях значение параметра k равно номеру варианта)

1. Внутренние теоремы единственности для полианалитических функций.
2. Факторизация целых полианалитических функций.
3. Является ли функция $w = z^3 - k|z - 1|^2$ бианалитической в какой-либо области? Ответ обосновать.
4. Является ли функция $u = x^4 - y^4 + kxy$ бигармонической в какой-либо области? Ответ обосновать.
5. Напишите уравнение Шварца для окружности $|z - i| = k^2$.

Критерии оценивания ответа на экзамене

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Правильный ответ на вопрос	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25, 0,5 и 0,75 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

3 семестр

Промежуточная аттестация в 3 семестре осуществляется посредством прохождения зачета. Зачет выставляется по результатам работы студента в течение семестра.

Критерии выставления зачёта.

Для получения зачета студент должен выполнить на оценку не ниже «удовлетворительно» всех видов работ для текущей аттестации. В противном случае ставится «не зачтено».

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Основная литература

1. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного : учебник для вузов / И. И. Привалов. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 402 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-14313-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/468294> .

2. Балк М.Б. Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники ВИНТИ. Сер. «Сов. пробл. матем. фун. напр.» – Т. 85. – М.: ВИНТИ, 1991. – С. 187–246.

3. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. Смоленск: СмолГУ, 2013.

4. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СПГУ, 1998.

5. Balk M.V. Polyanalytic functions. – Berlin: Akademie Verlag, 1991.

7.2. Дополнительная литература

1. Балк М.Б., Зуев М.Ф. О метааналитических функциях // Успехи мат. наук. – 1970. – Т. 25, № 5. – С. 203-226.

2. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1984.

3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

4. Bauer K.W., Ruscheweyh S. Differential Operators for Partial Differential Equations and Function Theoretic Applications. – Berlin Heidelberg New York: Springer-Verlag (Lecture Notes in Mathematics. Edited by A.Dold and B. Eckmann, 791), 1980. – 253 p.

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

- Система дистанционного обучения Смоленского государственного университета <http://cdo.smolgu.ru>
- Электронно-библиотечная система университета <http://biblioteka.smolgu.ru>
- Национальный открытый университет <http://www.intuit.ru>
- Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru>

8. Материально-техническое обеспечение

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, оснащенная стандартной учебной мебелью, интерактивной доской, мультимедиапроектором, ноутбуком и колонками.

Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенная стандартной учебной мебелью, компьютерами с выходом в Интернет.

Помещение для самостоятельной работы – компьютерный класс с доступом к сети «Интернет» и ЭИОС СмолГУ.

9. Программное обеспечение

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине используется Информационно-вычислительный центр физико-математического факультета.

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используются:

1. Система дистанционного обучения СмолГУ. URL: <http://www.cdo.smolgu.ru>. (СДО Русский Moodle 3KL Norm с техническим обслуживанием, Акт на передачу прав №УТДЮ0001785 от 06.12.2016)

2. Microsoft Open License (Windows XP, 7, Office 2003-2016) - Лицензия 66975477 от 03.06.2016 – в составе: ОС Windows, MS Excel 2003/2007.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 03B6A3C600B7ADA9B742A1E041DE7D81B0
Владелец: Артеменков Михаил Николаевич
Действителен: с 04.10.2021 до 07.10.2022