

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»
Проректор по учебно-
методической работе
_____ Ю. А. Устименко
«6» сентября 2021 г.

Рабочая программа дисциплины
Б1.В.06 СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ И СИСТЕМЫ
МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ

Направление подготовки: **01.03.02 Прикладная математика и информатика**
Направленность (профиль): **Математическое и информационное моделирование**

Форма обучения: очная
Курс – 4
Семестр – 7
Всего зачетных единиц – 4, часов – 144

Форма отчетности: 7 семестр – зачет

Программу разработал
доктор педагогических наук, профессор Г.С. Евдокимова

Одобрена на заседании кафедры
«30» августа 2021 г., протокол № 1

Заведующий кафедрой _____ К.М. Расулов

Смоленск
2021

1. Место дисциплины в структуре ОП

«Случайные процессы и системы массового обслуживания» относится к дисциплинам части, формируемой участниками образовательных отношений, учебного плана данного направления подготовки. Обучение проходит в течение седьмого семестра.

Изучение курса «Случайные процессы и системы массового обслуживания» позволяет создать условия, необходимые для формирования у студентов современного естественнонаучного мировоззрения и целостной научной картины мира, в которой органично сочетаются знания из различных областей науки.

Для освоения курса необходимы знания и навыки, приобретенные в результате предварительного обучения дисциплинам: «Математический анализ», «Функциональный анализ», «Алгебра», «Теория вероятностей и математическая статистика» и др.

Изучение курса основано на традиционных методах высшей школы, тесной взаимосвязи со смежными курсами, а также на использовании современной учебной и методической литературы.

Характерной чертой курса является сочетание теоретических основ современной теории вероятностей и математической статистики с практическими математическими приемами и методами, применяемыми при моделировании реальных процессов.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
ПК-1. Способен осуществлять поиск, анализ, систематизацию научной информации в области прикладной математики и информатики для реализации научно-исследовательских проектов и решения прикладных задач по проектированию и разработке программного обеспечения.	Знает: теоретические основы и технологии организации научно-исследовательской деятельности. Умеет: осуществлять поиск, анализ, систематизацию научной информации в области прикладной математики и информатики для реализации научно-исследовательских проектов и решения прикладных задач по проектированию и разработке программного обеспечения. Владеет: навыками организации и проведения научно-исследовательской деятельности в ходе выполнения профессиональных функций.
ПК-2. Способен анализировать требования и проектировать программное и информационное обеспечение компьютерных сетей, вычислительные модели и модели данных для реализации элементов новых (или известных) программных продуктов.	Знает: возможности существующей программно-технической аппаратуры, современных и перспективных средств разработки программных продуктов, технических средств; методологии разработки программного обеспечения, технологии программирования; методы и средства проектирования программного обеспечения, баз данных, программных интерфейсов; принципы построения архитектуры программного обеспечения и виды архитектуры программного обеспечения, типовые решения, библиотеки программных модулей, шаблоны, классы объектов, используемые при разработке программного обеспечения; методики формализации и алгоритмизации поставленных задач.

	<p>Умеет: проводить анализ требований к программному обеспечению, вырабатывать варианты их реализации, проводить оценку и обоснование вырабатываемых решений; использовать существующие типовые решения и шаблоны проектирования программного обеспечения, применять методы и средства проектирования программного обеспечения, структур данных, баз данных, программных интерфейсов; использовать методы и приемы формализации и алгоритмизации задач, применять стандартные алгоритмы, использовать программные средства для графического отображения алгоритмов.</p> <p>Владеет: методами анализа возможностей реализации требований к программному обеспечению, оценки времени и трудоемкости их реализации, навыками по проектированию программного обеспечения, баз данных, программных интерфейсов, информационных ресурсов сети Интернет.</p>
--	---

3. Содержание дисциплины

1. Основные понятия теории случайных процессов. Определение случайного процесса. Классификация случайных процессов. Законы распределения и числовые характеристики случайных процессов.

2. Поток событий, их свойства и классификация. Потоки событий. Некоторые свойства потоков Пальма. Потоки Эрланга. Предельные теоремы теории потоков.

3. Последовательности событий и случайных величин, связанных в цепь Маркова. Вероятности перехода (от одного состояния к другому). Возвратные и невозвратные состояния. Случайные блуждания. Классификация состояний. Сходимость к стационарному распределению.

4. Однородные Марковские процессы со счетным числом состояний. Примеры. Марковское свойство. Метод дифференциальных уравнений. Пуассоновский процесс. Сходимость к стационарному процессу.

5. Ветвящиеся процессы. Метод производящих функций. Дифференциальные уравнения для производящей функции. Вырождение процесса и явление взрыва.

6. Броуновское движение. Общее описание. Некоторое свойство траекторий броуновского движения. Распределения максимума и момента первого достижения. Ряды из независимых величин.

7. Марковские процессы. Общее понятие. Переходная плотность. Дифференциальные уравнения Колмогорова.

8. Стационарные процессы. Спектральное представление и линейные преобразования. Эргодическая теорема и ее применения. Стационарные в узком смысле процессы.

9. Содержание предмета, задачи и методы теории массового обслуживания. Введение. Основные элементы системы массового обслуживания. Входящий поток требований (заявок). Обслуживающие системы. Время обслуживания. Выходящий поток. Показатели эффективности обслуживающих систем.

10. Системы массового обслуживания с потерями. Формулы Эрланга. Неустановившийся процесс в системах массового обслуживания с отказами. Системы с поступлением групповых заявок. Системы с последовательно расположенными приборами. Одноканальная многофазная система с отказами.

Метод приближенной оценки пропускных способностей многоканальной многофазной системы. Системы с накопителем заявок. Пропускные способности системы с накопителем в нестационарном режиме

11. Системы массового обслуживания с ожиданием. Система с неограниченным потоком требований (разомкнутые системы). Системы с ограниченным потоком требований (замкнутые системы). Двухфазные системы массового обслуживания с ожиданием. Система, состоящая из нескольких неодинаковых приборов. Работа системы массового обслуживания при поступлении смешанного потока требований. Неустановившийся режим работы в разомкнутой системе массового обслуживания с ожиданием. Групповое поступление заявок. Системы, в которых перед второй фазой невозможно установление очереди. Системы с бесконечным числом одинаковых приборов.

12. Задачи обслуживания в смешанных системах. Системы с ограниченным средним временем ожидания заявок в очереди. Системы с ограниченной длиной очереди. Оценка влияния нестационарности на вероятностные состояния системы. Особенности функционирования многоканальных систем массового обслуживания смешанного типа при поступлении потока групповых заявок. Одноканальная система с переменным временем обслуживания. Система массового обслуживания, состоящая из приборов разной производительности.

13. Учет надежности работы обслуживающих приборов. Система ненадежных приборов с отказами. Пропускные способности систем с запасными частями (блоками) на случай выхода из строя приборов. Среднее время работы рабочего элемента до появления отказа в системе со скользящим резервом. Учет надежности приборов в смешанной многоканальной системе. Повышение надежности системы путем резервирования.

14. Некоторые вопросы управления работой систем. Групповое обслуживание. Обслуживание случайным числом свободных приборов. Учет противодействующих факторов со стороны заявок. Эффективность полного обслуживания. Работа системы по обслуживанию заявок группой приборов в нестационарном режиме. Выбор последовательности приоритетов, максимизирующей вероятность полного обслуживания. Нестационарный процесс в системе с выбором последовательности приоритетов. Системы с переменной структурой.

15. Оценка точности и моделирование работы систем массового обслуживания. Оценка точности результатов расчетов по формулам теории массового обслуживания. Решение задач массового обслуживания с помощью физической модели.

4. Тематический план

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий			
			лекции	практические занятия	лабораторные занятия	самостоятельная работа
1	Основные понятия теории случайных процессов	6	2	–	4	–
2	Поток событий, их свойства и классификация	6	2	–	–	4
3	Последовательности событий и случайных величин, связанных в цепь Маркова	12	2	–	4	6
4	Однородные процессы Маркова со счетным	6	2	–	–	4

	числом состояний.					
5	Ветвящиеся процессы	6	2	–	–	4
6	Броуновское движение	6	2	–		4
7	Марковские процессы	14	4	–	6	4
8	Стационарные процессы	14	4	–	6	4
9	Содержание предмета, задачи и методы теории массового обслуживания	4	2	–	–	2
10	Системы массового обслуживания с потерями	12	2	–	6	4
11	Системы массового обслуживания с ожиданием	12	2		6	4
12	Задачи обслуживания в смешанных системах	12	2	–	6	4
13	Учет надежности работы обслуживающих приборов	14	2	–	6	6
14	Некоторые вопросы управления работой систем	12	2	–	6	4
15	Оценка точности и моделирование работы систем	8	2	–	–	6
Всего за семестр		144	34	–	50	60

5. Виды образовательной деятельности

Занятия лекционного типа

1. Основные понятия теории случайных процессов. Определение случайного процесса. Классификация случайных процессов. Законы распределения и числовые характеристики случайных процессов.

2. Поток событий, их свойства и классификация. Поток событий. Некоторые свойства потоков Пальма. Потоки Эрланга. Предельные теоремы теории потоков.

3. Последовательности событий и случайных величин, связанных в цепь Маркова. Вероятности перехода (от одного состояния к другому). Возвратные и невозвратные состояния. Случайные блуждания. Классификация состояний. Сходимость к стационарному распределению.

4. Однородные Марковские процессы со счетным числом состояний. Марковское свойство. Метод дифференциальных уравнений. Пуассоновский процесс. Сходимость к стационарному процессу.

5. Ветвящиеся процессы. Метод производящих функций. Дифференциальные уравнения для производящей функции. Вырождение процесса и явление взрыва.

6. Броуновское движение. Общее описание. Некоторое свойство траекторий броуновского движения. Распределения максимума и момента первого достижения. Ряды из независимых величин.

7-8. Марковские процессы. Общее понятие. Переходная плотность. Дифференциальные уравнения Колмогорова.

9-10. Стационарные процессы. Спектральное представление и линейные преобразования. Эргодическая теорема и ее применения. Стационарные в узком смысле процессы.

11. Содержание предмета, задачи и методы теории массового обслуживания.

Основные элементы системы массового обслуживания. Входящий поток требований (заявок). Обслуживающие системы. Время обслуживания. Выходящий поток. Показатели эффективности обслуживающих систем.

12. Системы массового обслуживания с потерями. Формулы Эрланга. Неустойчивый процесс в системах массового обслуживания с отказами. Системы с поступлением групповых заявок. Системы с последовательно расположенными приборами. Одноканальная многофазная система с отказами. Метод приближенной оценки пропускных способностей многоканальной многофазной системы.

Системы с накопителем заявок. Пропускные способности системы с накопителем в нестационарном режиме.

13. Системы массового обслуживания с ожиданием. Система с неограниченным потоком требований (разомкнутые системы). Системы с ограниченным потоком требований (замкнутые системы). Двухфазные системы массового обслуживания с ожиданием. Система, состоящая из нескольких неодинаковых приборов. Работа системы массового обслуживания при поступлении смешанного потока требований. Неустойчивый режим работы в разомкнутой системе массового обслуживания с ожиданием. Групповое поступление заявок. Системы, в которых перед второй фазой невозможно установление очереди. Системы с бесконечным числом одинаковых приборов.

14. Задачи обслуживания в смешанных системах. Системы с ограниченным средним временем ожидания заявок в очереди. Системы с ограниченной длиной очереди. Оценка влияния нестационарности на вероятностные состояния системы. Особенности функционирования многоканальных систем массового обслуживания смешанного типа при поступлении потока групповых заявок. Одноканальная система с переменным временем обслуживания. Система массового обслуживания, состоящая из приборов разной производительности.

15. Учет надежности работы обслуживающих приборов. Система ненадежных приборов с отказами. Пропускные способности систем с запасными частями (блоками) на случай выхода из строя приборов. Среднее время работы рабочего элемента до появления отказа в системе со скользящим резервом. Учет надежности приборов в смешанной многоканальной системе. Повышение надежности системы путем резервирования.

16. Некоторые вопросы управления работой систем. Групповое обслуживание. Обслуживание случайным числом свободных приборов. Учет противодействующих факторов со стороны заявок. Эффективность полного обслуживания. Работа системы по обслуживанию заявок группой приборов в нестационарном режиме. Выбор последовательности приоритетов, максимизирующей вероятность полного обслуживания. Нестационарный процесс в системе с выбором последовательности приоритетов. Системы с переменной структурой.

17. Оценка точности и моделирование работы систем массового обслуживания. Оценка точности результатов расчетов по формулам теории массового обслуживания. Решение задач массового обслуживания с помощью физической модели.

Лабораторные работы

Лабораторная работа № 1-2. *Основные понятия теории случайных процессов. Поток событий, их свойства и классификации*

Теоретические вопросы

1. Определение случайного процесса.

2. Классификация случайных процессов.
3. Законы распределения и числовые характеристики случайных процессов.
4. Потоки событий.
5. Некоторые свойства потоков Пальма.
6. Потоки Эрланга.
7. Предельные теоремы теории потоков.

Задания для аудиторной работы:

[10,Примеры] Глава 4, №№ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Задания для самостоятельной работы:

[10, Задачи] Глава 4, №№ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Лабораторная работа № 3-4. Стационарные процессы

Теоретические вопросы

1. Определение стационарного случайного процесса.
2. Стационарный процесс в узком смысле.
3. Стационарный процесс в широком смысле.
4. Спектральное разложение случайного процесса.
5. Спектральное разложение корреляционной функции.
6. Спектральная плотность.

Задания для аудиторной работы:

[10,Примеры] Глава 4.1 №№ 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.

Задания для самостоятельной работы:

[10, Задачи] Глава 4.1, №№ 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17.

Лабораторная работа № 5-7. Преобразование случайных процессов динамическими системами

Теоретические вопросы

1. Понятие динамической системы.
2. Как находятся характеристики сигнала на выходе.
3. Понятие оператора.
4. Определение стационарной линейной динамической системы.

Задания для аудиторной работы:

[10,Примеры] Глава 4.2 №№ 18,19, 20, 21, 22.

Задания для самостоятельной работы:

[10, Задачи] Глава 4.2, №№ 18,19, 20, 21, 22.

Лабораторная работа № 8-10. Процессы «гибели и размножения»

Теоретические вопросы

1. В какие моменты времени возможны переходы из состояния в состояние.
2. Особенность этих переходов.
3. Нарисовать схему возможных переходов.
4. Процессы гибели и размножения служат математической моделью для чего?
5. В терминах процессов гибели и размножения можно осуждать технические задачи?

Задания для аудиторной работы:

[10,Примеры] Глава 4.3 №№ 23, 24, 25, 26, 27, 28.

Задания для самостоятельной работы:

[10, Задачи] Глава 4.3, №№ 23, 24, 25, 26, 27, 28.

Лабораторная работа № 11-13. Марковские процессы с дискретным множеством состояний. Цепи Маркова.

Теоретические вопросы

1. Определение Марковского процесса.
2. Граф состояний.
3. Классификация взаимного расположения состояний в графе.
4. Определение цепи Маркова.
5. Важная характеристика цепи Маркова.
6. Определение однородной цепи Маркова.
7. Финальные вероятности.

Задания для аудиторной работы:

[10,Примеры] Глава 4.5 №№ 30, 31, 32, 33.

Задания для самостоятельной работы:

[10, Задачи] Глава 4.5, №№ 30, 31, 32, 33.

Лабораторная работа № 14-16. *Марковские процессы с непрерывным временем и дискретным множеством состояний.*

Теоретические вопросы

1. Общее понятие. Переходная плотность.
2. Дифференциальные уравнения Колмогорова.

Задания для аудиторной работы:

[10,Примеры] Глава 4.6 №№ 34, 35.

Задания для самостоятельной работы:

[10,Задачи] Глава 4.6 №№ 34, 35.

Лабораторная работа № 17-18. *Системы массового обслуживания с потерями*

Теоретические вопросы

1. Формулы Эрланга.
2. Неустановившийся процесс в системах массового обслуживания с отказами.
3. Системы с поступлением групповых заявок.
4. Системы с последовательно расположенными приборами. Одноканальная многофазная система с отказами.
5. Метод приближенной оценки пропускных способностей многоканальной многофазной системы.
6. Системы с накопителем заявок. Пропускные способности системы с накопителем в нестационарном режиме.

Задания для аудиторной работы:

Задание 1.

Необходимо спроектировать такую автоматическую телефонную станцию, чтобы она обладала пропускной способностью, при которой вероятность получения абонентом отказа в обслуживании не превосходила $p_n \leq 0,01$. АТС проектируется из условия, что поток вызовов характеризуется плотностью $\lambda = 0,5$ вызовов в минуту. Считается, что средняя продолжительность разговора равна $t_{обс} = 2$ мин. Определить необходимое число линий связи.

Задание 2.

Оценить эффективность некоторой противокатерной обороны соединения кораблей, состоящей из трех единиц ($n=3$), когда катера противника производят атаку с плотностью $\lambda=1$ группа/мин. Группа может состоять с равной вероятностью из одного, двух или трех катеров противника. Время, необходимое противокатерному средству на обстрел одного катера, равно 1 мин.

Задание для самостоятельной работы

Готовые электроизмерительные приборы подвергаются проверке на надежность работы перед отправкой с завода на базу. Бригада рабочих проверяет одновременно один прибор. На заводе имеются три бригады рабочих, причем одна из них состоит из рабочих, которые работают давно и поэтому обладают высоким опытом проверки приборов. Среднее время, необходимое этой бригаде на проверку одного прибора, равно 0,5 час. Вторая бригада состоит из менее опытных рабочих, и среднее время на контроль прибора у них равно одному часу. Третья бригада укомплектована неполностью, и поэтому время на контроль прибора ей требуется больше и равно в среднем 0,75 час. Завод производит в среднем 2 прибора в час. Те приборы, которые были подвергнуты выборочному контролю на заводе и обеспечивают выполнение технических требований, отправляются непосредственно на базу и дальнейшему контролю не подлежат. Приборы, которые не проверялись на заводе и отправлены на базу, подвергаются выборочному контролю, который осуществляет одна бригада. Время, необходимое этой бригаде на контроль одного прибора, равно одному часу. Определить, какой процент приборов будет подвергнут контролю на надежность работы на заводе и на базе?

Лабораторная работа №19-20. Системы массового обслуживания с ожиданием

Теоретические вопросы

1. Система с неограниченным потоком требований (разомкнутые системы).
2. Системы с ограниченным потоком требований (замкнутые системы).
3. Двухфазные системы массового обслуживания с ожиданием.
4. Система, состоящая из нескольких неодинаковых приборов.
5. Работа системы массового обслуживания при поступлении смешанного потока требований.
6. Неустановившийся режим работы в разомкнутой системе массового обслуживания с ожиданием.
7. Групповое поступление заявок.
8. Системы, в которых перед второй фазой невозможно установление очереди.
9. Системы с бесконечным числом одинаковых приборов.

Задание для аудиторной работы:

Ателье по ремонту различной радиоаппаратуры имеет $n=5$ опытных мастеров. В среднем в течение рабочего дня от населения поступает в ремонт $\lambda=10$ радиоаппаратов. Общее число радиоаппаратов, находящихся в эксплуатации у населения, очень велико, и они независимо друг от друга в различное время выходят из строя. Поэтому есть все основания полагать, что поток заявок на ремонт аппаратуры является случайным, пуассоновским. В свою очередь, каждый аппарат в зависимости от характера неисправности также требует различного, случайного времени на ремонт. Время на проведение ремонта зависит во многом от серьезности полученного повреждения, квалификации мастера и множества других причин. Пусть статистика показала, что в среднем в течение рабочего дня каждый из мастеров в ателье успевает отремонтировать $\mu=2,5$ радиоаппарата. Требуется оценить работу ателье по ремонту радиоаппаратуры.

Задание для самостоятельной работы

Имеется $n=3$ мастерских по ремонту 10 образцов определенного вида вооружения, которые распределены по различным частям и подразделениям. Обслуживание можно организовать силами подвижных мастерских, которые всякий раз могут быть направлены в то подразделение, где имеется потребность в ремонте, или стационарных достаточно мощных мастерских с хорошо организованным технологическим потоком, куда будет доставляться неисправная техника. В обоих случаях время, необходимое для ремонта неисправного вооружения, будет складываться по-разному. В первом случае оно будет состоять из времени, необходимого для вызова мастерской, ее движения к месту ремонта и развертывания, и времени, нужного для проведения осмотра и собственно ремонта. Во втором случае оно будет определяться временем, необходимым для доставки неисправного вооружения в тыловую ремонтную мастерскую, просмотра ее и ремонта. В рассмотренных случаях соответствующие составляющие времени обслуживания будут разные. Полагаем, что время обслуживания — случайная величина с показательным законом распределения с параметром μ , где

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_p},$$

$$\bar{t}_p = \bar{t}_{\text{выз}} + \bar{t}_{\text{дв. м}} + t_{\text{осм}} + \bar{t}_{\text{раз}} + t_{\text{св}} + \bar{t}_{\text{рем}},$$

$\bar{t}_{\text{выз}}$ — среднее время, необходимое для вызова мастерской;

$\bar{t}_{\text{дв. м}}$ — среднее время движения мастерской;

$t_{\text{осм}}$ — среднее время осмотра;

$\bar{t}_{\text{раз}}, \bar{t}_{\text{св}}$ — среднее время развертывания и свертывания мастерской;

$\bar{t}_{\text{рем}}$ — среднее время ремонта;

\bar{t}_p — среднее суммарное время, необходимое для производства ремонта вооружения,

На основании статистики получено, что для вызова мастерской и ремонта техники в среднем требуется около 6 дней, $\mu=5$ образцов в месяц. По аналогичной схеме можно определить среднее время \bar{t}_p для обслуживания полустационарных мастерских. Поток поступающих заявок на ремонт ограничен числом обслуживаемых подразделений, на вооружении которых находится боевая техника, и принимается пуассоновским. Пусть плотность потока равна $\lambda=1$ образец в месяц.

Полагаем, что если поступила заявка на ремонт вооружения, то мастерская сразу направляется в соответствующее подразделение. Если все мастерские уже заняты, то вышедшее из строя вооружение ждет своей очереди для проведения ремонта.

Лабораторная работа №21-22. Задачи обслуживания в смешанных системах

Теоретические вопросы

1. Системы с ограниченным средним временем ожидания заявок в очереди.
2. Системы с ограниченной длиной очереди.
3. Оценка влияния нестационарности на вероятностные состояния системы.
4. Особенности функционирования многоканальных систем массового обслуживания смешанного типа при поступлении потока групповых заявок.
5. Одноканальная система с переменным временем обслуживания
6. Система массового обслуживания, состоящая из приборов разной производительности.

Задания для аудиторной работы:

Задание 1.

В магазин поступают фрукты нового урожая из отдаленных хозяйств с $\lambda=10$ т в декаду. Время доставки фруктов из колхозов в город является величиной случайной. Вероятность поступления фруктов в магазин из нескольких колхозов одновременно очень мала. Среднее количество поставок фруктов в магазин в период сбора урожая более или менее стабильно. Перечисленные причины позволяют принять предположение о пуассоновском потоке поставок фруктов в магазин. Сроки хранения фруктов в магазине зависят от их состояния, условий доставки, степени зрелости и других причин. Естественно предположить, что время хранения их является величиной случайной. Пусть среднее время хранения равно $\bar{t}_{ож} = 1,7$ суток. Тогда значение параметра $\nu=6$. В течение декады магазина может продать в среднем $\mu=10$ т. Среднесуточная продажа является величиной случайной. Например, в предпраздничные, праздничные, предвыходные и воскресные дни продажа фруктов будет более интенсивной.

Требуется оценить работу магазина и целесообразность открытия ряда дополнительных палаток по продаже фруктов в течение сезона. Для простоты расчетов примем, что пропускная способность палаток по продаже фруктов равноценна магазину.

Задание 2

У нападающей стороны имеется два образца вооружения. Для обстрела маневрирующей цели в среднем требуется 2 мин ($\bar{t}_{обс} = 2$ мин). Вероятность поражения цели при обстреле равна $P_{п} = 0,9$. Нападающая сторона обладает системой разведки, позволяющей в среднем обнаруживать одну цель в минуту ($\lambda = \text{цель/мин}$). Среднее время пребывания цели в зоне обстрела после ее обнаружения $\bar{t}_{ож}$ равно 4 мин. Независимо от того, обстреливается цель или нет, она по истечении определенного времени покидает свою позицию и для нападающей стороны считается потерянной, так как поражена быть не может.

Необходимо определить эффективность вооружения нападающей стороны по поражению появляющихся целей, определить, сколько единиц вооружения необходимо иметь нападающей стороне, чтобы ее потери не превосходили в среднем 10%, если цель противника в случае ее непоражения может нанести ответный удар с эффективностью $W_{пр} = 0,5$.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1.

На станцию текущего ремонта сельскохозяйственной техники поступают в случайные моменты времени различные машины (косилки, сеялки, плуги и т. д.). Станция имеет одно помещение для одного технологического потока ремонта. Во дворе станции имеется небольшая крытая площадка, где одновременно может находиться, ожидая очереди, не более трех машин.

В зависимости от характера неисправности, наличия запасных частей и квалификации ремонтных рабочих время на ремонт каждой машины затрачивается случайное. Статистика ремонтного времени

в этой мастерской показала, что оно распределено по показательному закону со средним значением $\bar{t}_{обс} = 2$ суток.

Неисправная техника в мастерскую поступает из близлежащих хозяйств. Случайные, независимые друг от друга, моменты выхода из строя сельскохозяйственных машин и разное удаление мест их эксплуатации от ремонтной мастерской позволяет предположить, что поток поступающей неисправной техники в мастерскую простейший со средней плотностью $\lambda = 0,5$ машин в сутки. Необходимо определить:

- пропускную способность мастерской;
- среднее время простоя мастерской;
- среднее число машин, ожидающих ремонта.

Интересно определить, насколько изменятся эти характеристики, если оборудовать второе помещение с новым технологическим потоком для ремонта техники.

Задание 2.

Рыболовецкий колхоз вылавливает в среднем около 10 т рыбы в сутки. Улов зависит от ряда случайных факторов (обнаружения косяка рыбы, расстояния от причала до места лова, погоды и т. д.). Поэтому можно считать, что поток выловленной рыбы имеет пуассоновское распределение. Часть рыбы колхоз перерабатывает на собственном пункте, состоящем из двух одинаковых цехов. Производительность каждого цеха $\mu=2$ т в сутки. Остальную часть улова колхоз отгружает для отправки на завод переработки рыбы. Колхозный завод имеет холодильник для хранения рыбы объемом 2 т, где она может храниться не более одних суток. Если за это время рыбу не начали обрабатывать, то ее немедленно отправляют на другой завод, который производит ее копчение. В противном случае она испортится.

Необходимо определить, сколько в среднем надо выделить автомашин для перевозки рыбы, если при существующем состоянии дорог и расстоянии до завода переработки машина грузоподъемностью 2,5 т может сделать два рейса в сутки, а до завода копчения — один рейс в сутки.

Лабораторная работа № 23-24. Учет надежности работы обслуживающих приборов

Теоретические вопросы

1. Система ненадежных приборов с отказами.
2. Пропускные способности систем с запасными частями (блоками) на случай выхода из строя приборов.
3. Среднее время работы рабочего элемента до появления отказа в системе со скользящим резервом.
4. Учет надежности приборов в смешанной многоканальной системе.
5. Повышение надежности системы путем резервирования.

Задания для аудиторной работы:

Задание 1.

Электронно-вычислительная машина состоит из 500 однотипных блоков, каждый из которых имеет надежность работы, характеризующую средней наработкой на один отказ, равной 500 час/отказ. Время выхода каждого блока из строя случайное. Примем, что оно имеет показательное распределение. Вышедший из строя блок поступает в ремонт. Время ремонта является случайной величиной и зависит от ряда факторов: характера неисправности, квалификации оператора, наличия инструмента и ремонтного материала и др. Положим, что время ремонта имеет показательное распределение с параметром $\mu=1$. Ремонт производят два оператора. Как только блок выйдет из строя, машина останавливается и не работает до тех пор, пока не будет либо устранена неисправность, либо поставлен исправный блок, причем на замену блока времени затрачивается мало и его можно практически считать равным нулю. Очевидно, для того чтобы машина работала без остановок, необходимо иметь запасные блоки, которыми можно было бы сразу заменять вышедшие из строя блоки. Однако запасные блоки обходятся довольно дорого, поэтому иметь их много неэкономично. Необходимо определить число запасных блоков, если стоимость одного блока $C_{зап}=100$ ед. стоимости. Стоимость одного часа простоя машины равна $C_{пр}=0,7$ ед. стоимости.

Задание 2.

Для повышения производительности труда на производстве устанавливается автоматизированная система управления процессами, которая состоит из четырех звеньев ($m=4$). Каждое звено имеет электронно-вычислительную машину и пункты сбора и обработки информации. Питание ЭВМ производится от отдельных агрегатов питания. Во время работы агрегаты питания могут выходить из строя и требовать некоторого времени на ремонт. Среднее время наработки на один отказ равно $\bar{t}_n=100$ час. Ремонт производится одной бригадой ($c=1$). Среднее время восстановления одного неисправного агрегата равно $\bar{t}_{обс}=10$ час. Чтобы из-за выхода из строя агрегата питания ЭВМ меньше простаивали, имеются два запасных ($n=2$), которые в случае выхода из строя любого из агрегатов питания могут мгновенно заменять их. Если нет исправных запасных агрегатов, то машина простаивает.

От того, сколько в среднем машины будут простаивать, зависит процент увеличения производительности труда. Положим, что повышение производительности труда пропорционально числу работающих ЭВМ и выражается зависимостью (в %)

$$\Delta\Pi = \frac{m - N_0}{m} 100,$$

где N_0 — среднее число ЭВМ, простаивающих из-за того, что нет запасных исправных агрегатов питания; m — число ЭВМ.

Требуется определить процент увеличения производительности труда от введенной автоматизации процессов.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1.

На предприятии имеется пять агрегатов ($n=5$), которые имеют свои идентичные источники электропитания. Время от времени источники могут выходить из строя. Опыт показал, что в среднем время наработки на один отказ для каждого из них равно $\bar{t}_n=100$ час. Время восстановления вышедшего из строя источника электропитания распределено по показательному закону. Оно зависит от множества случайных факторов: характера неисправности, квалификации рабочих ремонтной бригады и других. Среднее значение параметра $\mu=0,1$.

Когда источник электропитания неисправен, агрегат не работает. Для повышения общего времени работы агрегатов решено иметь один источник питания в качестве скользящего резерва. Требуется определить надежность снабжения электропитанием каждого агрегата.

Задание 2.

На автоматизированном предприятии имеется сложный комплекс радиоэлектронной аппаратуры, состоящий из пяти однотипных блоков. Из них три ($n=3$) находятся в рабочем состоянии и осуществляют управление процессом производства, а два ($m=2$) находятся в нагруженном резерве.

Блоки могут выходить из строя. Среднее время безотказной работы равно 100 час ($\bar{t}_n=100$ час). Вышедший из строя блок восстанавливается ремонтной бригадой ($r=1$). Если один блок находится уже на ремонте и выйдет из строя еще один, то последний будет ожидать своего ремонта.

Время восстановления — величина случайная и зависит от ряда факторов: характера неисправности, наличия запасных деталей,

квалификации операторов в ремонтной бригаде и др. Опыт эксплуатации показал, что в среднем время восстановления равно 10 час ($\bar{t}_{вос}=10$ час).

Требуется определить, что производство работает исправно.

Лабораторная работа №25. Некоторые вопросы управления работой систем

Теоретические вопросы

1. Групповое обслуживание.
2. Обслуживание случайным числом свободных приборов.
3. Учет противодействующих факторов со стороны заявок.
4. Эффективность полного обслуживания.
5. Работа системы по обслуживанию заявок группой приборов в нестационарном режиме.
6. Выбор последовательности приоритетов, максимизирующей вероятность полного обслуживания.
7. Нестационарный процесс в системе с выбором последовательности приоритетов.
8. Системы с переменной структурой.

Задание для аудиторной работы:

Налет самолетов противника производится в некоторой полосе. Чтобы пройти в глубину, самолеты должны преодолеть зону ПВО, которая состоит из $n=3$ зенитных средств, более менее равномерно расположенных в пределах этой полосы. В зависимости от направления полета самолета противника в его обстреле может принять участие различное число зенитных средств. Зона поражения зенитных средств очень мала и поэтому, если при появлении в ней самолета все средства будут заняты, он пройдет безнаказанно в глубину. Пусть на обстрел каждому самолета зенитному средству требуется в среднем одна минута. Плотность нелетающих самолетов равна $\lambda = 2$ самолета в минуту. Требуется оценить эффективность ПВО.

Задание для самостоятельной работы

В бюро прогнозирования погоды поступает информация с ряда пунктов, производящих систематические замеры метеоданных. Поток информации будем считать простейшим с плотностью $\lambda = 2$ сводки информации в час. Для обработки информации в отделе имеется 5 сотрудников. Время обработки каждой сводки метеоданных в общем случае — величина случайная, зависящая от многих причин. Пусть это время имеет показательный закон распределения. Как показал опыт работы, среднее значение времени обработки одной сводки

данных сотрудником бюро равно 1,25 час .Информация со временем быстро старее. Среднее время, в течение которого информацию еще можно использовать, равно 30 мин.. Требуется определить процент своевременно использованной информации, если одновременно ее начинают обрабатывать все операторы.

Самостоятельная работа

Текущая самостоятельная работа студента направлена на углубление и закрепление знаний и развития практических умений. Она заключается в работе с лекционными материалами, поиске и обзоре литературы и электронных источников, информации по заданным темам курса, опережающей самостоятельной работе, в изучении тем, вынесенных на самостоятельную проработку, подготовке к лабораторным занятиям.

Самостоятельная внеаудиторная работа студентов состоит:

- в проработке лекционного материала, составлении конспекта лекций по темам, вынесенным на самостоятельное изучение;
- в выполнении домашних заданий.

Темы для самостоятельного изучения

1. Ветвящиеся процессы. Метод производящих функций. Дифференциальные уравнения для производящей функции. Вырождение процесса и явление взрыва. Полиномиальная схема

2. Некоторые вопросы управления работой систем.

Выбор последовательности приоритетов, максимизирующей вероятность полного обслуживания. Нестационарный процесс в системе с выбором последовательности приоритетов. Системы с переменной структурой.

3. Оценка точности и моделирование работы систем массового обслуживания. Решение задач массового обслуживания с помощью физической модели.

Задания для самостоятельной работы представлены к каждому практическому занятию.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Текущая аттестация осуществляется на каждом лабораторном занятии в процессе фронтального опроса, выполнения заданий для аудиторной работы, в процессе проверки домашней самостоятельной работы.

Проведение текущего контроля осуществляется также посредством проведения аудиторных контрольных работ и разноуровневых самостоятельных работ.

Оценочные средства

I. Контрольные вопросы для проверки теоретической подготовки к практическому занятию.

Перечень вопросов приводится в планах практических занятий.

II. Задания для самостоятельной работы.

Перечень практических заданий для самостоятельной работы приводится в планах практических занятий.

III. Контрольные работы по дисциплине.

7 семестр

Образец контрольной работы №1

Задача 1. Элементарная случайная функция $Y(t)$ имеет вид

$$Y(t) = e^{-Xt} \quad t > 0,$$

где X – случайная величина, распределенная по показательному закону с плотностью

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x > 0, \lambda > 0).$$

Найти характеристики элементарной случайной функции $Y(t)$: математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, корреляционную функцию, нормированную корреляционную функцию.

Задача 2. В цепи Маркова с двумя состояниями 1 и 2 начальным состоянием является 1. Найти вероятности цепочек состояний 111, 122, 121, если вероятности переходов p_{ij} ($i, j = 1, 2$) задаются равенствами $p_{12} = 1/3$, $p_{21} = 1/4$.

Задача 3. Система S представляет собой техническое устройство (ТУ), которое может находиться в одном из состояний:

s_1 – ТУ исправно (работает);

s_2 – ТУ неисправно (находится в ремонте).

На ТУ, находящееся в состоянии s_1 , действует поток отказов с интенсивностью $\lambda(t)$, переводящей ТУ в состояние s_2 . На ТУ, находящееся в состоянии s_2 , действует поток восстановлений с интенсивностью $\mu(t)$. Оба потока – пуассоновские, независимые. Написать уравнение Колмогорова для вероятностей состояний и решить их, считая, что в начальный момент при $t = 0$ ТУ исправно.

Задача 4. Найти характеристики производной с.п.

$$Y(t) = W e^{-Ut},$$

где W – случайная величина W распределена нормально с параметрами m_w, σ_w ; а случайная величина U распределена равномерно в интервале $(0, a)$; $t > 0, a > 0$; случайные величины W и U независимы.

Задача 5. Найти корреляционную функцию стационарного случайного процесса $X(t)$, если ее спектральную плотность $S_x(\omega)$ постоянна на интервале и равна c , а вне этого интервала равна нулю

$$S_x(\omega) = \begin{cases} c & \text{при } \omega \in (\omega_1, \omega_2), \\ 0 & \text{при } \omega \notin (\omega_1, \omega_2). \end{cases}$$

Критерии оценивания контрольной работы №1

1. Нормы оценивания:

№п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов(*)
1	Задание 1	0.75 балл
2	Задание 2	0..5 балла
3	Задание 3	1.5 балла
4	Задание 4	1,5 балла
5	Задание 5	0.75 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

№ п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

Образец контрольной работы №2

Задача 1. На железнодорожной станции находятся три кассы для продажи билетов на поезд дальнего следования. Когда все кассы заняты, пассажиры встают в очередь. Длина очереди не может превышать 50 человек. Среднее время обслуживания в одной кассе составляет 5 минут. Пассажиры прибывают на станцию для покупки билетов в среднем по два человека в минуту. Найти вероятность отказа и общее количество человек (требований), находящихся в системе.

Задача 2. Программист обслуживает вычислительный центр из 50 вычислительных машин (ВМ). В среднем ВМ дает сбой $0,05 \text{ час}^{-1}$. Процесс наладки занимает в среднем 45 минут. Требуется определить абсолютную пропускную способность наладки ВМ программистом.

Задача 3. Оценить эффективность некоторой противокатерной обороны соединения кораблей, состоящей из трех единиц, когда катера противника производят атаку с плотностью $\lambda = 1 \text{ группа/мин}$. Группа может с равной вероятностью состоять из одного, двух или трех катеров противника. Время, необходимое противокатерному средству на обстрел одного катера, равно 1 минуте.

1. Нормы оценивания:

№п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов(*)
1	Задание 1	1.75 балла

2	Задание 2		1.25 балла
3	Задание 3		2 балла

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

№ п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация осуществляется посредством проведения зачета

Вопросы для подготовки к зачету

1. Определение случайного процесса. Классификация случайных процессов.
2. Законы распределения и основные характеристики случайных процессов.
3. Потoki событий.
4. Простейший поток и его свойства.
5. Нестационарный пуассоновский поток.
6. Некоторые свойства потоков Пальма.
7. Потoki Эрланга.
8. Предельные теоремы теории потоков.
9. Граф состояний. Классификация состояний. Вероятности состояний.
10. Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и дискретным временем (цепи Маркова).
11. Стационарный режим для цепи Маркова.
12. Описание Марковского процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем. Уравнения Колмогорова.
13. Однородные Марковские случайные процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем. Стационарный режим, уравнения для предельных вероятностей.
14. Закон распределения и числовые характеристики времени однократного пребывания Марковского процесса с непрерывным временем и дискретными состояниями в произвольном подмножестве состояний.
15. Определение Марковского процесса гибели и размножения с непрерывным временем, его размеченный граф состояний, условия существования стационарного режима, предельные вероятности состояний.
16. Стационарный случайный процесс в узком и широком смысле.
17. Линейные и нелинейные преобразования случайных процессов.
18. Спектральное разложение стационарной случайной функции на конечном участке времени. Спектр дисперсий.
19. Спектральное разложение стационарной случайной функции на бесконечном участке времени. Спектральная плотность стационарной случайной функции. Теорема Винера -Хинчина
20. Стационарный белый шум.
21. Преобразование стационарной случайной функции стационарной линейной динамической системой.

22. Система массового обслуживания с отказами.
- 23 .Установившийся режим. Формулы Эрланга.
24. Система массового обслуживания с ожиданием.
25. Задачи обслуживания в смешанных системах.
26. Вопросы управления работой систем.

Образец письменного задания на зачете

1. Потоки Эрланга.

2. Преобразование стационарной случайной функции стационарной линейной динамической системой.

3. Найти одномерный закон распределения элементарной случайной функции

$$Y(t) = V \cos (\psi t - \theta),$$

где V и θ независимые случайные величины; случайная величина V распределена нормально с характеристиками m_v , σ_v ; ψ – неслучайный параметр; случайная величина θ распределена равномерно в интервале $(0, 2\pi)$.

4. Найти спектральную плотность $S_{x_k}(\omega)$ элементарного стационарного процесса

$$X_k(t) = V_k \cos \omega_k t + U_k \sin \omega_k t.$$

5. На базу данных (БД) сервера железной дороги поступает 10 запросов в секунду. Среднее время обработки каждого запроса составляет 1 секунду. Запрос, поступивший в момент обработки предыдущего запроса, становится в очередь. Определить вероятность наличия очереди и суммарное время, которое проведут запросы до обслуживания.

Критерии оценивания ответа на зачете

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Теоретический вопрос	1,75 балла
2	Реализация решения задачи	0.5 балла

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Основная литература

1. Круглов, В. М. Случайные процессы в 2 ч. Часть 1. Основы общей теории : учебник для академического бакалавриата / В. М. Круглов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 276 с. — (Серия : Авторский учебник). — ISBN 978-5-534-01748-9. — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/6961A84E-3B4E-46CE-AE75-2DDCDE788763.
2. Круглов, В. М. Случайные процессы в 2 ч. Часть 2. Основы стохастического анализа : учебник для академического бакалавриата / В. М. Круглов. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 280 с. — (Серия : Авторский учебник). — ISBN 978-5-534-02086-1. — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/0D8F2766-F866-4CEA-AE63-0B1F39288BF3.
3. Каштанов, В. А. Случайные процессы : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / В. А. Каштанов, Н. Ю. Энатская. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 156 с. — (Серия : Бакалавр. Прикладной курс). — ISBN 978-5-534-04482-9. — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/CDD9B4A8-9C08-4147-83D1-433AEE395EE3.
4. Энатская, Н. Ю. Математическая статистика и случайные процессы : учебное пособие для прикладного бакалавриата / Н. Ю. Энатская. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 201 с. — (Серия : Бакалавр. Прикладной курс). — ISBN 978-5-9916-9808-5. — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/E7144E93-751A-44FD-A63F-B50F18195681.

7.2 Дополнительная литература

1. Вентцель Е.С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. - М.: Высшая школа, 2002.- 575с.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология—М.: Наука, 2001.—207 с..
3. Володин Б.Г. и др. Сборник задач по теории вероятностей, математической статистике и теории случайных функций.- М.: Наука, 2005. 656 с.
4. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб.пособие для студентов вузов/ В. Е. Гмурман. - М.: Высшее образование, 2008. - 404 с.
5. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб.пособие для студентов вузов/ В. Е. Гмурман. - М.: Высшее образование, 2008. - 479 с.
6. Гнеденко Б.В., Коваленко И.Н. Введение в теорию массового обслуживания. М. КомКнига, 2005.– 400с.
7. Исследование операций в экономике. Под ред. Н.Ш. Кремера.- М.: Юрайт, 2010.
8. Карлин С. Основы теории случайных процессов.- М.: Мир, 2006. - 536 с.
9. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. =М.: Наука, 2004.- 271 с.
10. Крупин В.Г. Высшая математика. Теория вероятностей, математическая статистика, случайные процессы./ В.Г.Крупин., А.Л. Павлов, Л.Г.Попов.- М.: Издательский дом МЭИ. 2013. - 368 с.
- 11.Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций - М.: Наука,- 2008. - 463 с.

7.3 Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети Интернет

- Электронная библиотека <https://www.biblio-online.ru>;
- Электронно-библиотечная система <http://znanium.com>;
- Национальная платформа открытого образования (opened.ru);
- www.matburo.ru – матбюро: решения задач по высшей математике;
- www.nehudlit.ru - электронная библиотека учебных материалов.
- Система дистанционного обучения Смоленского государственного университета <http://moodle.smolgu.ru>

- Электронно-библиотечная система университета <http://biblioteka.smolgu.ru>
- Национальный открытый университет <http://www.intuit.ru>
- Образовательный математический сайт <http://exponenta.ru>
- Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru>

8. Материально-техническое обеспечение

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используется интерактивная доска; проектор. Осуществляется поиск информации в WWW-пространстве; работа с Web-страницами и ресурсами сети Интернет.

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине в университете имеется следующая необходимая инструментальная база: учебные аудитории для проведения практических занятий; компьютерный класс, оборудованный персональными ЭВМ с необходимым математическим софтом и выходом в Интернет; кабинеты, оборудованные проекторами и электронными досками для проведения лекционных занятий. Имеется кабинет ксерокопирования и кафедральный принтер для подготовки индивидуальных дидактических карточек, контрольных и экзаменационных материалов. Доступна электронная библиотека СмолГУ.

9. Программное обеспечение

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине используется Информационно-вычислительный центр физико-математического факультета (Положение о Центре утверждено приказом ректора №01-66 от 28.09.2015 г.).

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используются информационные технологии обработки данных с помощью прикладных программных продуктов. Осуществляется поиск информации в WWW-пространстве; работа с Web-страницами и социальными ресурсами сети Интернет, а также используются различные системы компьютерной математики.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 03B6A3C600B7ADA9B742A1E041DE7D81B0
Владелец: Артеменков Михаил Николаевич
Действителен: с 04.10.2021 до 07.10.2022