Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»
Проректор по учебно-
методической работе
____________ Ю.А. Устименко
«23» июня 2022 г.

Рабочая программа дисциплины
Б1.В.11 КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

Направление подготовки: **01.03.02 Прикладная математика и информатика**
Профиль: **Математическое и информационное моделирование**
Форма обучения – очная
Курс – 4
Семестр –7
Всего зачетных единиц – 3, часов – 108
Форма отчетности: зачет – 7 семестр

Программу разработал
доктор физ.-мат. наук, профессор Расулов К.М.

Одобрена на заседании кафедры
«16» июня 2022 г., протокол № 10
Заведующий кафедрой _____________ К.М. Расулов

Смоленск
2022

1. Место дисциплины в структуре ОП

Учебная дисциплина «Краевые задачи комплексного анализа» относится к той части учебного плана бакалавриата направления подготовки 01.03.02 Прикладная математика и информатика (профиль: Математическое и информационное моделирование), которая формируется участниками образовательных отношений. В ней рассматриваются основные линейные краевые задачи современной теории аналитических и гармонических функций, для решения которых используются теоретические основы практически всех основных математических дисциплин (математического анализа, алгебры, геометрии, комплексного анализа, дифференциальных уравнений, уравнений математической физики), предусмотренных в учебном плане данного направления подготовки. Главное назначение данной учебной дисциплины – на основе теории краевых задач комплексного анализа сформировать понятия, необходимые для развития практических навыков математического моделирования реальных процессов.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
ПК-1. Способен осуществлять поиск, анализ, систематизацию научной информации в области прикладной математики и информатики для реализации научно-исследовательских проектов и решения прикладных задач по проектированию и разработке программного обеспечения	**Знать**: постановки краевых задач Римана и Гильберта для аналитических функций комплексного переменного в односвязных областях и основные методы их решения; **Уметь**: использовать методы комплексного анализа при решении конкретных краевых задач типа Римана и типа Гильберта для аналитических функций в круговых областях; **Владеть**: техникой вычисления интегралов типа Коши и индексов краевых задач Римана и Гильберта для аналитических функций комплексного переменного в односвязных областях с использованием систем компьютерной математики.

3. Содержание дисциплины

Раздел 1. Аналитические функции комплексного переменного и их связь с гармоническими функциями двух действительных переменных. О различных определениях аналитических функций комплексного переменного. Уравнение Лапласа и гармонические функции. Теоремы, устанавливающие связь аналитических функций комплексного переменного и гармонических функций.

Раздел 2. Класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера. Гладкие, кусочно-гладкие и аналитические кривые на комплексной плоскости и их свойства. Классы функций $C(L)$, $C^1(L)$ и $H_\mu(L)$.

Раздел 3. Интеграл типа Коши и его основные свойства. Особый (сингулярный) интеграл с ядром Коши и его вычисление. Понятие интеграла типа Коши и его основные свойства. Особый (сингулярный) интеграл с ядром Кошии его вычисление. Граничные свойства интеграла типа Коши и формулы Сохоцкого-Племели. Формулы обращения особого интеграла с ядром Коши.

Раздел 4. Основные теоремы комплексного анализа, используемые в теории краевых задач. Теорема об аналитическом продолжении, теорема Лиувилля, принцип симметрии, принцип аргумента.

Раздел 5. Индекс непрерывной функции и его вычисление. Понятие индекса непрерывной функции и его геометрический смысл. Методы вычисления индекса.

Раздел 6. Краевая задача Римана для аналитических функций в односвязных областях и метод ее решения. Задача о скачке. Однородная задача Римана. Неоднородная задача Римана.

Раздел 7. Сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши и их связь с краевой задачей Римана. Характеристическое сингулярное интегральное уравнение и метод его решения. Теоремы Нетера.

Раздел 8. Краевая задача Гильберта для аналитических функций и методы ее решения. Постановка краевой задачи Гильберта для аналитических функций в односвязных областях. Метод конформного отображения при решении задачи Гильберта. О решении задачи Гильберта в круговых областях. Методы решения краевых задач Дирихле и Неймана для гармонических функций.

Раздел 9. О некоторых приложениях основных краевых задач комплексного анализа. Комплексные аналитические методы решения краевых задач Дирихле и Неймана для гармонических функций. Приложения задачи Римана в теории фильтрации. Обобщенная задача Римана для аналитических функций с вырожденными ядрами.

4. Тематический план

№ п/п	Темы	Всего часов	Формы занятий		
			Лекции	Практи-ческие занятия	Самостоя-тельная работа
1.	Аналитические функции комплексного переменного и их связь с гармоническими функциями двух действительных переменных	6	2	2	2
2.	Гладкие, кусочно-гладкие и аналитические кривые на комплексной плоскости и их свойства. Класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера	6	2	2	2
3.	Интеграл типа Коши и его основные свойства. Особый (сингулярный) интеграл и его вычисление	12	4	4	4
4.	Основные теоремы комплексного анализа, используемые в теории краевых задач	10	4	2	4
5.	Индекс непрерывной функции и его вычисление.	6	2	2	2
6.	Краевая задача Римана для аналитических функций в односвязных областях и метод ее решения	22	6	6	10
7	Сингулярные интегральные уравнения и их связь с краевой задачей Римана	16	4	6	6
8.	Краевая задача Гильберта для аналитических функций и методы ее решения	18	6	6	6
9.	Некоторые приложения основных краевых задач комплексного анализа	12	4	4	4
	Всего:	108	34	34	40

5. Виды образовательной деятельности

Лекции

Лекция 1. Аналитические функции комплексного переменного и их связь с гармоническими функциями двух действительных переменных. О различных определениях аналитических функций комплексного переменного. Уравнение Лапласа и гармонические функции. Теоремы, устанавливающие связь аналитических функций комплексного переменного и гармонических функций.

Лекция 2. Класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера. Гладкие, кусочно-гладкие и аналитические кривые на комплексной плоскости и их свойства. Классы функций $C(L)$, $C^1(L)$ и $H_\mu(L)$.

Лекции 3-4. Интеграл типа Коши и его основные свойства. Особый (сингулярный) интеграл с ядром Коши и его вычисление. Понятие интеграла типа Коши и его основные свойства. Особый (сингулярный) интеграл с ядром Кошии его вычисление. Граничные свойства интеграла типа Коши и формулы Сохоцкого-Племели. Формулы обращения особого интеграла с ядром Коши.

Лекции 5-6. Основные теоремы комплексного анализа, используемые в теории краевых задач. Теорема об аналитическом продолжении**,** теорема Лиувилля**,** принцип симметрии, принцип аргумента.

Лекция 7. Индекс непрерывной функции и его вычисление. Понятие индекса непрерывной функции и его геометрический смысл. Методы вычисления индекса.

Лекции 8-10. Краевая задача Римана для аналитических функций в односвязных областях и метод ее решения. Задача о скачке и метод ее решения. Однородная задача Римана и метод ее решения в классах ограниченных (исчезающих) на бесконечности функций. Неоднородная задача Римана и метод ее решения в односвязных областях. Задача Римана с рациональными коэффициентами в краевом условии. Задача Римана в исключительном случае.

Лекции 11-12. Сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши и их связь с краевой задачей Римана. Интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Характеристическое сингулярное интегральное уравнение и метод его решения. Теоремы Нетера.

Лекции 13-15. Краевая задача Гильберта для аналитических функций и методы ее решения. Постановка краевой задачи Гильберта для аналитических функций в односвязных областях. Метод конформного отображения при решении задачи Гильберта. О различных методах решения краевой задачи Гильберта в круговых областях.

Лекции 16-17. О некоторых приложениях основных краевых задач комплексного анализа. Комплексные аналитические методы решения краевых задач Дирихле и Неймана для гармонических функций. Приложения задачи Римана в теории фильтрации. Обобщенная задача Римана для аналитических функций с вырожденными ядрами.

Практические занятия

Практическое занятие №1.

Тема. Аналитические функции комплексного переменного и их связь с гармоническими функциями двух действительных переменных.

Контрольные вопросы и задания:

1. Какие подходы к определению аналитических функций комплексного переменного Вы знаете?
2. Каковы необходимые и достаточные условия дифференцируемости функций комплексного переменного в точке.

3. Дайте определение гармонической функции двух действительных переменных в точке $M_0(x_0, y_0)$. Приведите примеры.

4. Когда функция $U(x,y)$ называется гармонической на множестве D? Приведите примеры гармонических функций в единичном круге.

5. Верно ли утверждение: *если функция* $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ *является аналитической в точке* $z_0=x_0+iy_0$, *то функции* $U(x,y), V(x,y)$ *являются гармоническими в точке* $M_0(x_0,y_0)$?

6. Всякая ли гармоническая в области D функция $U(x,y)$ является действительной (мнимой) частью аналитической в области D функции $f(z)$?

7. Задана гармоническая в односвязной области G функция $U(x,y)$. По какой формуле можно найти аналитическую в G функцию $f(z)$, для которой $\operatorname{Re} f(z)=U(x,y)$ ($\operatorname{Im} f(z)=U(x,y)$)?

Задания для аудиторной работы:

1. Проверьте, является ли следующие функции гармоническими в своей области определения:

   а) $U(x,y)=arctg\frac{y}{x}$; б) $\varphi(x,y)=\ln(x^2+y^2)$; в) $V(x,y)=x^3+y^3$.
2. Существует ли аналитическая функция $f(z)$, у которой:

   а) $\operatorname{Re} f(z)=x^2-y^2$; б) $\operatorname{Im} f(z)=xy^2$; в) $\operatorname{Re} f(z)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$?
3. Найдите аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,u)$ по ее действительной части $u(x,y)=x^2-y^2+5x+y-\dfrac{y}{x^2+y^2}$.
4. Найдите аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,u)$ по ее мнимой части $v(x,y)=e^{-2y}\cos 2x$.
5. Найдите аналитическую функцию $f(z)$ такую, что $\operatorname{Re} f(z)=x^2-y^2+x$ и $f(0)=i$.

Задания для самостоятельной работы:

1. Проверьте, является ли следующие функции гармоническими в своей области определения:

   а) $U(x,y)=e^x\sin y$; б) $\varphi(x,y)=x^3-3xy^2$; в) $V(x,y)=x^4+y^4+1$.
2. Существует ли аналитическая функция $f(z)$, у которой:

   а) $\operatorname{Re} f(z)=x^2+y^2$; б) $\operatorname{Im} f(z)=3xy^2-x^3$; в) $\operatorname{Re} f(z)=\dfrac{x^2-x+y^2}{x^2+y^2}$?
3. Найдите аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,u)$ по ее действительной части $u(x,y)=e^y\cos x$.
4. Найдите аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ по ее мнимой части $v(x,y)=\ln(x^2+y^2)+x-2y$.
5. Найдите аналитическую функцию $f(z)$ такую, что $\operatorname{Re} f(z)=3x^2y-y^3$ и $f(0)=0$.

Практическое занятие №2.
Тема. Кривые на комплексной плоскости. Класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера

Контрольные вопросы и задания:

1. Какая кривая называется жордановой?
2. Дайте определение гладкой кривой на комплексной плоскости переменного $z = x + iy$.
3. Напишите параметрическое уравнение окружности с центром в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ и радиусом ρ.
4. В чем отличие гладкой кривой от аналитической кривой?
5. Какая связь между функцией Шварца аналитической кривой и конформными отображениями?
6. Дайте определение функции, удовлетворяющей условию Гельдера.
7. Каковы основные свойства функций, удовлетворяющих условию Гельдера?

Задания для аудиторной работы:

1. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, заданное соотношением:
   а) $|z+1+i| = 2$; б) $\operatorname{Im}\frac{z}{1+i} = 0$; в) $|z+i| + |z-i| = 2$;
   г) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 2$; д) $\operatorname{Re} z^2 = 1$; е) $Arg(2iz-4) = 0$.
2. Задайте в комплексной форме следующие множества точек:
   а) окружность с центром в точке $2-i$ и радиусом 4;
   б) прямую, проходящую через точку $1+i$, образующую с действительной осью угол $\frac{\pi}{3}$;
   в) гиперболу с фокусами $2i$ и -2, эксцентриситетом $\varepsilon = 2$.
3. Изобразите на комплексной плоскости линию L, которая определяется уравнением $z(t) = x(t) + i \cdot y(t)$, если:
   а) $z(t) = 2 - 3it$, $t \in R$;
   б) $z(t) = 2t + 1 + (t-2)i$, $t \in [-1; 2]$;
   в) $z(t) = 2\sin t + i3\cos t$, $0 < t < \pi$.
4. Напишите уравнение линии L в комплексной параметрической форме, если:
   а) L – парабола с фокусом $z = i$ и директрисой $\operatorname{Im} z = -1$;
   б) L – верхняя дуга единичной окружности ;
   в) L – отрезок прямой, соединяющей точки $-1+i$ и $2-3i$.

5. Напишите уравнение Шварца окружности с центром в точке $2-i$ и радиусом 4.

6. Удовлетворяет ли функция $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ \frac{1}{\ln x}, & \text{если } x \in (0; 0{,}5] \end{cases}$ условию Гельдера на отрезке $[0; 0{,}5]$?

7. Верно ли соотношение: $C(L) \subset C^1(L) \subset H_\mu(L)$? Ответ обосновать.

Задания для самостоятельной работы:

1. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, заданное соотношением:

   а) $|z+1+i| = |iz+1+i|$;   б) $\operatorname{Re}\dfrac{z+1}{1-i} = 0$;   в) $|iz+1| + |iz-1| = 2$;

   г) $|z-2| + |z+i| = 4$.

2. Задайте в комплексной форме следующие множества точек:

   а) окружность с центром в точке $1+i$ и радиусом 2;

   б) прямую, проходящую через точку $1-i$, параллельную прямой $|z-1| = |z-i|$;

   в) эллипс с фокусами i и -2, эксцентриситетом $\varepsilon = 0{,}5$.

3. Изобразите на комплексной плоскости линию L, которая определяется уравнением $z(t) = x(t) + i \cdot y(t)$, если:

   а) $z(t) = 3t + 4it$, $t \in R$;

   б) $z(t) = 2t + 1 + (t+1)^2 i$, $t \in [-1; 2]$;

   в) $z(t) = e^t + ie^{-t}$, $-1 < t < 1$.

4. Напишите уравнение линии L в комплексной параметрической форме, если:

   а) L – эллипс с фокусами $z = i$, $z = -2i$ и большой полуосью $a = 4$;

   б) L – правая ветвь гиперболы $xy = 1$;

   в) L – отрезок прямой, соединяющей точки $1+2i$ и $3-4i$.

5. Напишите уравнение Шварца окружности с центром в точке $1+i$ и радиусом 2.

6. Удовлетворяет ли функция $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ \dfrac{\sin x}{x}, & \text{если } x \in (0; 0{,}5] \end{cases}$ условию Гельдера на отрезке $[0; 0{,}5]$?

Практическое занятие №3.

Тема. Интеграл типа Коши и его основные свойства.

Контрольные вопросы и задания:

1. Дайте определение интеграла типа Коши с непрерывной плотностью.
2. Сформулируйте теорему о дифференцируемости интеграла типа Коши.
3. Чему равно значение интеграла типа Коши в точке $z = \infty$?
4. Каковы основные способы вычисления интегралов типа Коши?
5. По какой формуле можно вычислять производные высших порядков аналитических в области D функции?

Задания для аудиторной работы:

1. Пользуясь формулой для производных высших порядков, вычислите следующие интегралы:

   а) $\oint\limits_L \dfrac{\cos z}{z^2}\,dz$, где $L = \{z : |z| = 1\}$;

   б) $\oint\limits_L \dfrac{\sin z}{\left(z - \dfrac{\pi}{3}\right)^3}\,dz$, где $L = \{z : |z - i| = 4\}$.

2. Найдите первообразные функций, где a и b - отличные от нуля константы:

   а) e^{az};

б) $\sin az$;
в) $e^{az}\cos bz$.

3. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в кольце $r < |z-a| < R$. Докажите, что интеграл $\int\limits_{|z-a|=\rho} f(z)dz$, где $r < \rho < R$, не зависит от числа ρ.

Задания для самостоятельной работы:
а. Пользуясь формулой для производных высших порядков, вычислите следующие интегралы:
а) $\oint\limits_L \frac{\cos z}{(z-i)^3}dz$, где $L = \{z : |z-i| = 1\}$;
б) $\oint\limits_L \frac{e^z}{(z-1)^3}dz$, где $L = \{z : |z-1| = 1\}$.
2. Найдите первообразные следующих функций, где a - отличная от нуля константа:
а) $\cos az$;
б) ze^{az};
в) $z\cos az$.
3. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в кольце $r < |z-a| < R$. Докажите, что интеграл $\int\limits_{|\varsigma-a|=\rho} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma$, где $r < \rho < R$, не зависит от числа ρ.

Практическое занятие №4.
Тема. Особый (сингулярный) интеграл с ядром Коши и его вычисление. Формулы Сохоцкого-Племели.

Контрольные вопросы и задания:
1. Дайте определение главного значения сингулярного интеграла с ядром Коши и непрерывной (в смысле Гельдера) плотностью.
2. Какова асимптотика интеграла типа Коши вблизи концевых точек кривой интегрирования?
3. По каким формулам определяются граничные значения интеграла типа Коши с плотностью из класса Гельдера?
4. Напишите формулы обращения сингулярного интегрального оператора по замкнутой кривой.

Задания для аудиторной работы: задачи №№ 1, 3, 7, 8(а), 9, 13 к главе I книги [3] из списка рекомендованной литературы.
Задания для самостоятельной работы: задачи №№ 2, 4, 6, 8(б), 10 к главе I книги [3] из списка рекомендованной литературы.

Практическое занятие №5.
Тема. Основные теоремы комплексного анализа, используемые в теории краевых задач.

Контрольные вопросы и задания:
1. Сформулируйте теорему об аналитическом продолжении, теорему Лиувилля**,** принцип симметрии и принцип аргумента.

2. Сколькими способами можно аналитически продолжить функцию с заданного множества, имеющего предельную точку?
3. В чем состоит суть теоремы Руше для аналитических функций?
4. Сформулируйте основную теорему высшей алгебры и докажите ее.

Задания для аудиторной работы:

1. Докажите, что функция $F(z)=\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{z-1}\right)^n$ является аналитическим продолжением функции $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$.

2. Найдите число нулей функции $f(z)=e^z+3z^4-1$ в единичном круге.

3. Пользуясь теоремой Руше, найдите число корней приведенных уравнений в областях, указанных в скобках:

а) $z^4-3z+1=0 \quad (|z|<1)$; б) $z^7-5z^4+z^2-2=0 \quad (|z|<1)$.

4. Для аналитической в единичном круге функции $\Phi^+(z)=\frac{2z^4-5z+2}{z^5-32}$ постройте функцию $\Phi^-(z)$, аналитическую вне единичного круга и такую, что $\Phi^-(t)=\overline{\Phi^+(t)}, \quad t\in L=\{|t|=1\}$. Определите порядок найденной функции $\Phi^-(z)$ в точке $z=\infty$.

Задания для самостоятельной работы:

1. Докажите, что функция $F(z)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{4^n}$ является аналитическим продолжением функции $f(z)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+1)^n}{3^n}$.

2. Найдите число нулей функции $f(z)=z^8-7z^5-3z^4+1$ в единичном круге.

3. Пользуясь теоремой Руше, найдите число корней приведенных уравнений в областях, указанных в скобках:

а) $2z^4-5z+2=0 \quad (|z|<1)$; б) $z^8-4z^5+z^2-1=0 \quad (|z|<1)$.

4. Для аналитической в единичном круге функции $\Phi^+(z)=\frac{5iz^5-3z^4+2i}{z^3+27}$ постройте функцию $\Phi^-(z)$, аналитическую вне единичного круга и такую, что $\Phi^-(t)=\overline{\Phi^+(t)}, \quad t\in L=\{|t|=1\}$. Определите порядок найденной функции $\Phi^-(z)$ в точке $z=\infty$.

Практическое занятие №6.
Тема. Индекс непрерывной функции и его вычисление.

Контрольные вопросы и задания:

1. Дайте определение главного значения сингулярного интеграла с ядром Коши и непрерывной (в смысле Гельдера) плотностью.
2. Какова асимптотика интеграла типа Коши вблизи концевых точек кривой

интегрирования?

3. По каким формулам определяются граничные значения интеграла типа Коши с плотностью из класса Гельдера?

4. Напишите формулы обращения сингулярного интегрального оператора по замкнутой кривой.

Задания для аудиторной работы: задачи №№ 1, 3, 7, 8(а), 9, 13 к главе I книги [3] из списка рекомендованной литературы.
Задания для самостоятельной работы: задачи №№ 2, 4, 6, 8(б), 10 к главе I книги [3] из списка рекомендованной литературы.

Практическое занятие №7.
Тема. Постановка краевой задачи Римана (задачи сопряжения) для аналитических функций комплексного переменного. Метод решения однородной задачи Римана в односвязных областях.

Контрольные вопросы и задания:
1. Сформулируйте задачу Римана (задачу сопряжения) для аналитических функций в случае гельдеровых коэффициентов и гладкого контура.
2. Какова структура общего решения неоднородной задачи Римана?
3. Как решается задача о скачке для аналитических функций?
4. Дайте определение канонической функции однородной задачи Римана.
5. Какова формула факторизации коэффициента однородной задачи Римана?
6. В чем состоит основная логическая схема метода решения однородной задачи Римана для аналитических функций ?
7. Сколько линейно независимых (над полем $\boldsymbol{C}$) решений имеет однородная задача Римана в классе ограниченных на бесконечности функций, если ее индекс равен 5 ?
8. Сформулируйте теорему Ф.Д. Гахова о разрешимости однородной задачи Римана в классе исчезающих на бесконечности функций.

Задания для аудиторной работы:
1. Пусть $L=\{t:|t|=1\}$. Вычислите индексы следующих функций контуру L: а) $w=\dfrac{t^3}{t^2+4i}$; б) $w=\dfrac{\operatorname{Re} t}{\operatorname{Im} t}$; в) $w=\dfrac{t+2i}{t-2i}$; г) $w=5\overline{t^2}$.

2. Найдите решение следующей задачи о скачке в классе ограниченных на бесконечности функций:
$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=2e^t+\frac{1}{t^5},\quad t\in L,$$
где $L=\{t:|t|=1\}$.

3. Решите следующие однородные задачи Римана в классе функций, ограниченных на бесконечности:
а) $\Phi^+(t)=\dfrac{5+t}{t}\Phi^-(t),\ t\in L$; б) $\Phi^+(t)=\dfrac{t(t-2i)}{t^2+3}\Phi^-(t),\quad t\in L$,
где $L=\{t:|t|=1\}$.

4. Решите следующие однородные задачи Римана в классе функций, исчезающих на бесконечности:

а) $\Phi^+(t) = \dfrac{t^3}{t^3+9}\Phi^-(t),\ \ t \in L$; б) $\Phi^+(t) = \dfrac{t^2(t-4i)}{2t-1}\Phi^-(t),\ \ t \in L$,

где $L = \{t : |t| = 1\}$.

5. Пусть $L = \{t : |t| = 1\}$. При каких значениях параметра a однородная задача Римана

$$\Phi^+(t) = \frac{t}{t^2+a}\Phi^-(t),\ \ t \in L,$$

в классе ограниченных на бесконечности функций имеет (ненулевые) решения ? Ответ обоснуйте.

Задания для самостоятельной работы:

1. Пусть $L = \{t : |t| = 1\}$. Вычислите индексы следующих функций контуру L:

а) $w = \dfrac{3t^2}{t^2-4i}$; б) $w = \operatorname{Re} t + \operatorname{Im} t$; в) $w = \dfrac{t^4+16}{t}$; г) $w = \dfrac{2i}{t^4}$.

2. Найдите решение следующей задачи о скачке в классе ограниченных на бесконечности функций:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = 3i\sin t - \frac{\sqrt{2}}{t^2},\ \ t \in L,$$

где $L = \{t : |t| = 1\}$.

3. Решите следующие однородные задачи Римана в классе функций, ограниченных на бесконечности:

а) $\Phi^+(t) = \dfrac{t}{t-3}\Phi^-(t),\ \ t \in L$; б) $\Phi^+(t) = \dfrac{t^3(t-5i)}{t^2-2}\Phi^-(t),\ \ t \in L$,

где $L = \{t : |t| = 1\}$.

4. Решите следующие однородные задачи Римана в классе функций, исчезающих на бесконечности:

а) $\Phi^+(t) = \dfrac{t+2}{t^2-9}\Phi^-(t),\ \ t \in L$; б) $\Phi^+(t) = \dfrac{t^8}{4t-1}\Phi^-(t),\ \ t \in L$,

где $L = \{t : |t| = 1\}$.

5. Пусть $L = \{t : |t| = 1\}$. При каких значениях параметра a однородная задача Римана

$$\Phi^+(t) = \frac{t^2-a}{t^2+a}\Phi^-(t),\ \ t \in L,$$

в классе ограниченных на бесконечности функций имеет (ненулевые) решения ? Ответ обоснуйте.

Практическое занятие №8.
Тема. Метод решения неоднородной краевой задачи Римана для аналитических функций комплексного переменного

Контрольные вопросы и задания:

1. Сформулируйте постановку неоднородной задачи Римана (задачи сопряжения) для аналитических функций в случае гельдеровых коэффициентов и гладкого контура.
2. Что называется индексом неоднородной задачи Римана для аналитических функций?
3. Какова структура общего решения неоднородной задачи Римана?
4. В чем состоит основная логическая схема метода решения неоднородной задачи Римана для аналитических функций ?
5. Сформулируйте теорему Ф.Д. Гахова о разрешимости неоднородной задачи Римана в классе ограниченных (исчезающих) на бесконечности функций.
6. Изложите суть «упрощенного» метода решения неоднородной задачи Римана в односвязных областях в случае, когда коэффициент краевого условия есть рациональная функция, не имеющая нулей и полюсов на контуре.

Задания для аудиторной работы:

1. Пусть $L=\{t:|t|=1\}$. Решите следующие краевые задачи Римана в классе кусочно аналитических функций, ограниченных на бесконечности:

а) $\Phi^{+}(t)=\dfrac{5+t}{t}\Phi^{-}(t)+t^{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{t},\ \ t\in L$;

б) $\Phi^{+}(t)=\dfrac{t(t-2i)}{t^{2}+3}\Phi^{-}(t)-21t^{5}+\dfrac{7}{t^{5}},\ \ t\in L$;

в) $\Phi^{+}(t)=\dfrac{3}{t^{3}}\Phi^{-}(t)+t^{6}-\dfrac{11}{t^{10}},\ \ t\in L$.

2. Решите следующие неоднородные задачи Римана в классе функций, исчезающих на бесконечности:

а) $\Phi^{+}(t)=\dfrac{t^{3}}{t^{3}+9}\Phi^{-}(t)+4t-\dfrac{6}{t^{2}},\ \ t\in L$;

б) $\Phi^{+}(t)=\dfrac{t^{2}(t-4i)}{2t-1}\Phi^{-}(t)+8t^{3},\ \ t\in L$;

где $L=\{t:|t|=1\}$.

3. Требуется решить неоднородную задачу Римана в классе функций, исчезающих на бесконечности, если ее краевое условие имеет вид

$$\Phi^{+}(t)=\frac{t}{t^{2}-1}\Phi^{-}(t)+\frac{t^{3}-t^{2}+1}{t^{3}-t},\quad t\in L,$$

где L - произвольный простой замкнутый гладкий контур следующего вида:

а) контур L содержит внутри себя точку $z_0=0$ и не содержит точек $z_1=1$ и $z_2=-1$;

б) контур L содержит внутри себя точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$, и не содержит точки $z_0 = 0$.

Задания для самостоятельной работы:

1. Пусть $L = \{t : |t| = 1\}$. Решите следующие краевые задачи Римана в классе кусочно аналитических функций, ограниченных на бесконечности:

   а) $\Phi^+(t) = t^2\Phi^-(t) + t^{10} - \dfrac{1}{t}$, $t \in L$;

   б) $\Phi^+(t) = \dfrac{(t-5i)}{t^2}\Phi^-(t) - 2t^4 + \dfrac{8}{t^5}$, $t \in L$;

   в) $\Phi^+(t) = \dfrac{t+3}{t^5}\Phi^-(t) + t^2 - \dfrac{2}{t^4}$, $t \in L$.

2. Решите следующие неоднородные задачи Римана в классе функций, исчезающих на бесконечности:

   а) $\Phi^+(t) = \dfrac{t}{t^2+9}\Phi^-(t) + t^3 - \dfrac{1}{t^2}$, $t \in L$;

   б) $\Phi^+(t) = \dfrac{t^3(t-8)}{4t-1}\Phi^-(t) + 3t^3 - \dfrac{\sqrt{2}}{t^2}$, $t \in L$,

   где $L = \{t : |t| = 1\}$.

3. Требуется решить неоднородную задачу Римана в классе функций, исчезающих на бесконечности, если ее краевое условие имеет вид

$$\Phi^+(t) = \frac{t}{t^2-1}\Phi^-(t) + \frac{t^3 - t^2 + 1}{t^3 - t}, \quad t \in L,$$

   где L - произвольный простой замкнутый гладкий контур следующего вида:

   а) контур L содержит внутри себя точки $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ и не содержит точки $z_2 = -1$;

   б) контур L содержит внутри себя точки $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$.

Практическое занятие №9.

Тема. Краевая задача Римана для аналитических функций в исключительном случае

Контрольные вопросы и задания:

1. Сформулируйте постановку краевой задачи Римана для аналитических функций в исключительном случае.
2. Как определяются каноническая функция неоднородной краевой задачи Римана в исключительном случае?
3. Сформулируйте теорему Л.А. Чикина о разрешимости неоднородной задачи Римана в исключительном случае?

Задания для аудиторной работы: задачи №№ 5, 7 к главе I пособия [1], указанного в разделе 10; .задачи №№ 5, 7, 9 к главе II книги [3] из списка рекомендованной литературы.
Задания для самостоятельной работы: задачи №№ 4, 6 к главе I пособия [1], указанного в разделе 10; задачи №№ 4, 6, 8 к главе II книги [3] из списка рекомендованной литературы.

Практическое занятие №10.
Тема. Характеристическое сингулярное интегральное уравнение и его связь с краевой задачей Римана для аналитических функций. Уравнения Фредгольма 2-го рода.

Контрольные вопросы и задания:

1. Дайте определение сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши.
2. Какое сингулярное уравнение называется характеристическим?
3. Какая связь между краевой задачей Римана и характеристическим сингулярным интегральным уравнением?
4. Изложите логическую схему решения характеристического сингулярного интегрального уравнения.
5. Какое интегральное уравнение называется уравнением Фредгольма второго рода?
6. Сформулируйте основные теоремы о разрешимости интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Задания для аудиторной работы: задачи №№ 1, 3, 5 к главе III книги [3] из списка рекомендованной литературы.
Задания для самостоятельной работы: задачи №№ 2, 4, 6 к главе III книги [3] из списка рекомендованной литературы.

Практическое занятие №11.
Тема. Полные сингулярные интегральные уравнения и методы их регуляризации.

Контрольные вопросы и задания:

1. Дайте определение полного сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши.
2. Какая связь между краевой задачей Римана и характеристическим сингулярным интегральным уравнением?
3. Что называется регуляризацией сингулярных интегральных уравнений?
4. Сформулируйте основные теоремы об сингулярных интегральных уравнениях (теоремы Нетера).

Задания для аудиторной работы: задачи №№ 9, 11, 13 к главе III книги [3] из списка рекомендованной литературы.
Задания для самостоятельной работы: задачи №№ 8, 12, 14 к главе III книги [3] из списка рекомендованной

Практическое занятие №12.
Тема. Сингулярные интегральные уравнения с вырожденными ядрами и методы их решения.

Контрольные вопросы и задания:

1. Дайте определение полного сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши.
2. Каков общий вид сингулярного интегрального уравнения с вырожденным ядром?
3. Изложите логические схемы основных методов решения сингулярных интегральных уравнений с вырожденными ядрами.

Задания для аудиторной работы:

1. Пусть $L=\{t:|t|=1\}$. Решите следующие интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода:

а) $\varphi(t)+\int_L\left(\frac{2t}{\tau}+5\tau^{-2}\right)\varphi(\tau)d\tau=3t+1,$

б) $\varphi(t)-\int_L\left(\frac{t^2}{\tau^2}+2\tau\right)\varphi(\tau)d\tau=t^2-\frac{1}{t};$

в) $\varphi(t)-\int_L(\tau-t)\varphi(\tau)d\tau=5t^2-t^3-\frac{4}{t}.$

2. Решите следующие сингулярные интегральные уравнения с вырожденными ядрами:

а) $t(t-2)\varphi(t)+\frac{t^2-6t+8}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\int_L\left(\frac{2t}{\tau}+5\tau^{-2}\right)\varphi(\tau)d\tau=\frac{1}{t},$ где $L=\{t:|t|=1\};$

б) $(t^2-2)\varphi(t)+\frac{3t}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau-\int_L\left(\frac{t^2}{\tau^2}+2\tau\right)\varphi(\tau)d\tau=\frac{2t}{t^2+1},$ где $L=\{t:|t-2i|=2\};$

в) $t\varphi(t)-\frac{t-2}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau-\int_L(\tau-t)\varphi(\tau)d\tau=2(t^2+1),$ где $L=\{t:|t-1|=2\}.$

Задания для самостоятельной работы:

1. Пусть $L=\{t:|t|=1\}$. Решите следующие интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода:

а) $\varphi(t)+\int_L\left(\frac{\tau}{t}+\frac{t}{\tau}\right)\varphi(\tau)d\tau=t^2-\frac{1}{t},$

б) $\varphi(t)-\int_L\left(\frac{t}{\tau^2}+2\tau\cdot t^2\right)\varphi(\tau)d\tau=4t+\frac{1}{t^2};$

в) $\varphi(t)+\int_L\left(\tau^2-t^2\right)\varphi(\tau)d\tau=t^2-t^3+\frac{1}{t}.$

2. Решите следующие сингулярные интегральные уравнения с вырожденными ядрами:

а) $t(t-2)\varphi(t)+\frac{t^2-6t+8}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\int_L\left(\frac{\tau}{t}+\frac{t}{\tau}\right)\varphi(\tau)d\tau=\frac{1}{t},$ где $L=\{t:|t|=1\};$

б) $(t^2-2)\varphi(t)+\dfrac{3t}{\pi i}\int\limits_L\dfrac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau-\int\limits_L\left(\dfrac{t}{\tau^2}+2\tau\cdot t^2\right)\varphi(\tau)d\tau=\dfrac{2t}{t^2+1}$, где $L=\{t:|t-2i|=2\}$;

в) $t\varphi(t)-\dfrac{t-2}{\pi i}\int\limits_L\dfrac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau+\int\limits_L\left(\tau^2-t^2\right)\varphi(\tau)d\tau=2(t^2+1)$, где $L=\{t:|t-1|=2\}$.

Практическое занятие №13.
Тема. Постановка краевой задачи Гильберта для аналитических функций. Метод Н.И. Мусхелишвили решения однородной краевой задачи Гильберта в круговых областях.

Контрольные вопросы и задания:

1. Сформулируйте постановку краевой задачи Гильберта для аналитических функций в односвязных областях.
2. Каким способом краевая задача Гилберта в произвольных односвязных областях можно свести к эквивалентной задаче Гильберта в круговых областях?
3. В чем состоит суть метода Н.И. Мусхелишвили решения внутренней однородной задачи Гильберта в круговых областях?
4. Изложите алгоритм решения внешней однородной задачи Гильберта для единичного круга методом Н.И. Мусхелишвили.

Задания для аудиторной работы:

1. Требуется найти все аналитические в круге $T^+=\{z:|z|<1\}$ функции $\Phi^+(z)$, непрерывные в $T^+\cup\Gamma$ и удовлетворяющие на $\Gamma=\{t:|t|=1\}$ краевому условию
$$\mathrm{Re}\{\frac{1}{t}\Phi^+(t)\}=0.$$

2. Требуется найти аналитические в круге $T^+=\{z:|z|<1\}$ функции $\Phi^+(z)$, непрерывные в $T^+\cup\Gamma$ и удовлетворяющие на $\Gamma=\{t:|t|=1\}$ краевому условию
$$\mathrm{Re}\left\{\frac{t}{t-2i}\Phi^+(t)\right\}=0.$$

3. Пусть $L=\{\mathrm{w}:\mathrm{Im}\,w=0\}$ и $\boldsymbol{C}_+=\{w:\mathrm{Im}\,w>0\}$. Найдите аналитическую в полуплоскости $\boldsymbol{C}_+$ функцию $\Phi^+(w)$, непрерывную в $\boldsymbol{C}_+\cup L$ и удовлетворяющую на L краевому условию
$$\mathrm{Re}\left\{\frac{\tau-i}{\tau+i}\Phi^+(\tau)\right\}=0.$$

4. Пусть D^+ – конечная односвязная область на плоскости $\boldsymbol{C}_w$ комплексного переменного $w=\xi+i\eta$, ограниченная *улиткой Паскаля* L, т.е. замкнутой кривой, задаваемой параметрическим уравнением вида

$$w=\rho\left(e^{i\theta}+me^{i2\theta}\right),$$

где $\rho>0$, $0<m<\dfrac{1}{2}$ $0\le\theta\le 2\pi$. Требуется найти все аналитические в области D^{+} функции, непрерывные в $D^{+}\cup L$ и удовлетворяющие на L краевому условию

$$\mathrm{Re}\{\overline{h(\tau)}\Phi^{+}(\tau)\}=0,$$

где $h(\tau)=a(\tau)+ib(\tau)$, $q(\tau)$ – заданные на L функции класса $H(L)$, причем $h(\tau)\neq 0$.

5. Пусть $T^{+}=\{z:|z|<1\}$, $\Gamma=\{t:|t|=1\}$ и $T^{-}=\overline{\boldsymbol{C}}_{z}\setminus(T^{+}\cup\Gamma)$. Найдите все аналитические в T^{-} функции $\Phi^{-}(z)$, непрерывные в $T^{-}\cup\Gamma$ и удовлетворяющие на Γ краевому условию

$$\mathrm{Re}\{\frac{1}{t}\cdot\Phi^{-}(t)\}=0.$$

Задания для самостоятельной работы:

1. Разрешима ли в единичном круге $T^{+}=\{(r,\varphi):\ 0<r<1,\ -\pi\le\varphi\le\pi\}$ однородная задача Гильберта с краевым условием:

$$[5\cos\varphi+\sin 2\varphi]\cdot U(\cos\varphi,\sin\varphi)-[5\sin\varphi-\cos 2\varphi]\cdot V(\cos\varphi,\sin\varphi)=0\,?$$

2. Пусть $T^{+}=\{z:|z|<1\}$, $\Gamma=\{t:|t|=1\}$ и $T^{-}=\overline{\boldsymbol{C}}_{z}\setminus(T^{+}\cup\Gamma)$. Найдите все аналитические в T^{-} функции $\Phi^{-}(z)$, непрерывные в $T^{-}\cup\Gamma$ и удовлетворяющие на Γ краевому условию

$$\mathrm{Re}\{t^{-2}\cdot\Phi^{-}(t)\}=0.$$

3. Требуется найти аналитические в круге $T^{+}=\{z:|z|<1\}$ функции $\Phi^{+}(z)$, непрерывные в $T^{+}\cup\Gamma$ и удовлетворяющие на $\Gamma=\{t:|t|=1\}$ краевому условию

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{t}{t-3i}\Phi^{+}(t)\right\}=0.$$

4. Пусть $T^{+}=\{z:|z|<1\}$, $\Gamma=\{t:|t|=1\}$ и $T^{-}=\overline{\boldsymbol{C}}_{z}\setminus(T^{+}\cup\Gamma)$. Найдите все аналитические в T^{-} функции $\Phi^{-}(z)$, непрерывные в $T^{-}\cup\Gamma$ и удовлетворяющие на Γ краевому условию

$$\mathrm{Re}\{t\cdot\Phi^{-}(t)\}=0.$$

Практическое занятие №14.

Тема. Метод Н.И. Мусхелишвили решения неоднородной краевой задачи Гильберта для аналитических функций в круговых областях.

Контрольные вопросы и задания:

1. Сформулируйте постановку неоднородной краевой задачи Гильберта для

аналитических функций в односвязных областях.
2. В чем состоит суть метода Н.И. Мусхелишвили решения неоднородной внутренней задачи Гильберта в круговых областях?
4. Изложите алгоритм решения внешней неоднородной задачи Гильберта для единичного круга методом Н.И. Мусхелишвили.

Задания для аудиторной работы:

1. Требуется найти все аналитические в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функции $\Phi^+(z)$, непрерывные в $T^+ \cup \Gamma$ и удовлетворяющие на $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$ краевому условию

$$\operatorname{Re}\{\Phi^+(t)\} = \frac{1}{2i}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

2. Требуется найти аналитические в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функции $\Phi^+(z)$, непрерывные в $T^+ \cup \Gamma$ и удовлетворяющие на $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$ краевому условию

$$\operatorname{Re}\left\{t^2\Phi^+(t)\right\} = t^3 + \frac{1}{t^3}.$$

3. Решите в единичном круге задачу Гильберта с краевым условием:

$$\left(\cos 2s - \cos s + \frac{1}{4}\right)\cdot U(s) + \left(\sin 2s - \sin s\right)\cdot V(s) = \left(\frac{5}{4} - \cos s\right)^2 \left(\cos 2s + h_1 \cos s + h_2\right),$$

где h_1 и h_2 – некоторые числа.

4. Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$ и $T^- = \overline{\boldsymbol{C}}_z \setminus (T^+ \cup \Gamma)$. Найдите все аналитические в T^- функции $\Phi^-(z)$, непрерывные в $T^- \cup \Gamma$ и удовлетворяющие на Γ краевому условию

$$\operatorname{Re}\{\frac{1}{t}\cdot \Phi^-(t)\} = \frac{1}{2i}\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right).$$

Задания для самостоятельной работы:

1. Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$ и $T^- = \overline{\boldsymbol{C}}_z \setminus (T^+ \cup \Gamma)$. Найдите все аналитические в T^+ функции $\Phi^+(z)$, непрерывные в $T^+ \cup \Gamma$ и удовлетворяющие на Γ краевому условию

$$\operatorname{Re}\{\Phi^-(t)\} = \frac{1}{2}\left(t^4 + \frac{1}{t^4}\right).$$

2. Требуется найти аналитические в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функции $\Phi^+(z)$, непрерывные в $T^+ \cup \Gamma$ и удовлетворяющие на $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$ краевому условию

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{t^2}{t+2i}\Phi^+(t)\right\} = 5.$$

3. Решите в единичном круге задачу Гильберта с краевым условием:

$$\left(\cos 2s - \cos s + \frac{1}{4}\right)\cdot U(s) - (\sin 2s - \sin s)\cdot V(s) = (\cos 2s + h_1 \cos s + h_2),$$

где h_1 и h_2 – некоторые числа.

4. Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$ и $T^- = \overline{\mathbf{C}}_z \setminus (T^+ \cup \Gamma)$. Найдите все аналитические в T^- функции $\Phi^-(z)$, непрерывные в $T^- \cup \Gamma$ и удовлетворяющие на Γ краевому условию

$$\operatorname{Re}\{t \cdot \Phi^-(t)\} = \frac{1}{2i}\left(t - \frac{1}{t}\right).$$

Практическое занятие №15.
Тема. О решении краевой задачи Гильберта для аналитических функций в односвязных областях методом регуляризующего множителя.

Контрольные вопросы и задания:
1. Сформулируйте постановку краевой **задачи А** для аналитических функций в односвязных областях.
2. Как определяется регуляризующий множитель для функций, удовлетворяющих условию Гельдера?
3. Каковы основные типы регуляризующих множителей?
4. Изложите алгоритм решения однородной (неоднородной) внутренней задачи Гильберта методом регуляризующего множителя.
5. Каковы основные формулы для общего решения задачи Гильберта в единичном круге?

Задания для аудиторной работы: .задачи №№ 5, 7, 9, 13 к главе IV книги [3] из списка рекомендованной литературы.
Задания для самостоятельной работы:.задачи №№ 2, 4, 6, 8 к главе IV книги [3] из списка рекомендованной литературы.

Практическое занятие №16.
Тема. Комплексные аналитические методы решения краевых задач Дирихле и Неймана для гармонических функций в единичном круге

Контрольные вопросы и задания:
1. Дайте определение гармонической функции двух действительных переменных в точке $M_0(x_0, y_0)$. Приведите примеры.
2. Когда функция $U(x, y)$ называется гармонической на множестве D?
3. Какая связь между гармоническими функциями двух действительных переменных и аналитическими функциями комплексного переменного?
4. Сформулируйте постановку внутренней краевой задачи Дирихле (задачи Неймана) для гармонических функций в односвязных областях.

5. Может ли задача Дирихле (задачи Неймана) для гармонических функций иметь более одного решения?
6. Сформулируйте постановку краевой задачи Шварца для аналитических функций комплексного переменного в круговых областях.
7. Какая связь между краевыми задачами Дирихле и Шварца?
8. Какие методы решения краевых задач Дирихле и Неймана в круговых областях Вы знаете?
9. Укажите некоторые практические приложения краевых задач Дирихле и Неймана для гармонических функций.

Задания для аудиторной работы:

1. Проверьте, является ли следующие функции гармоническими в своей области определения:

   а) $U(x,y) = arctg\dfrac{y}{x}$; б) $\varphi(x,y) = \ln(x^2+y^2)$; в) $V(x,y) = x^3 + y^3$.

2. Существует ли аналитическая функция $f(z)$, у которой:

   а) $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2$; б) $\operatorname{Im} f(z) = xy^2$; в) $\operatorname{Re} f(z) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$?

3. Напишите краевое условие $u(x,y)\big|_{\Gamma} = y^2 - x^2 - \dfrac{1}{2}y$, где $\Gamma = \{(x,y): x^2+y^2 = \rho^2\}$, в комплексной форме.

4. Найдите гармоническую в единичном круге $T^+ = \{z: |z|<1\}$ функцию $U(x,y)$, если известно, что ее граничные значения на $\Gamma = \{t: |t| = 1\}$ удовлетворяют условию: $U\big|_{\Gamma} = 5 + t^2 + \dfrac{1}{t^2}$.

5. Внутри круга $D^+ = \{(x,y): x^2+y^2 < \rho^2\}$ найдите гармоническую функцию $u(x,y)$, принимающую на границе $\Gamma = \{(x,y): x^2+y^2 = \rho^2\}$ следующие значения: $u\big|_{\Gamma} = x^2 + 2xy - 4y^2$.

6. Внутри единичного круга $0 \le r \le 1$ найдите гармоническую функцию $u(r,\varphi)$, принимающую на границе Γ данного круга значения: $u\big|_{\Gamma} = \pi^2 - \varphi^2, \quad -\pi \le \varphi \le \pi$.

7. Внутри круга $D^+ = \{(x,y): x^2+y^2 < \rho^2\}$ найдите гармоническую функцию $u(x,y)$, принимающую на границе Γ данного круга следующие значения: $u\big|_{\Gamma} = A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi$, где A и B - некоторые постоянные, а $-\pi \le \varphi \le \pi$.

8. Пусть $T^+ = \{z: |z|<1\}$, $\Gamma = \{t: |t| = 1\}$. Выясните, при каком значении параметра a задача Неймана с краевым условием

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 3a + t^3 + \frac{1}{t^3}, \quad t \in \Gamma,$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к Γ, будет иметь решение. Решите задачу при найденном значении a.

Задания для самостоятельной работы:

1. Требуется найти аналитические в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функции $\Phi^+(z)$, непрерывные в $T^+ \cup \Gamma$ и удовлетворяющие на $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$ краевому условию $\mathrm{Re}\{\Phi^+(t)\} = t + \dfrac{1}{t} + 1$.
2. Напишите краевое условие $u(x,y)\big|_\Gamma = 2x^2 - 4xy$, где $\Gamma = \{(x,y) : x^2 + y^2 = \rho^2\}$, в комплексной форме.
3. Внутри круга $0 \le r \le \rho$ найдите гармоническую функцию $u(r,\varphi)$, принимающую на границе Γ данного круга значения: $u\big|_\Gamma = \sin 2\varphi, \quad -\pi \le \varphi \le \pi$.
4. Внутри круга $D^+ = \{(x,y) : x^2 + y^2 < \rho^2\}$ найдите гармоническую функцию $u(x,y)$, принимающую на границе $\Gamma = \{(x,y) : x^2 + y^2 = \rho^2\}$ следующие значения: $u\big|_\Gamma = y^2 - x^2 - \dfrac{1}{2}y$.
5. Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$. Выясните, при каком значении параметра b задача Неймана с краевым условием
$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_\Gamma = 10b + t^2 + \frac{1}{t^2}, \quad t \in \Gamma,$$
где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к Γ, будет иметь решение. Решите задачу при найденном значении b.

Практическое занятие №17.
Тема. Обобщенная краевая задача Римана для аналитических функций с вырожденными ядрами

Контрольные вопросы и задания:

1. Сформулируйте постановку обобщенной краевой задачи Римана для аналитических функций.
2. Каким методом можно решить обобщенную краевую задачу Римана в односвязных областях?
3. Изложите логическую схему решения обобщенной краевой задачи Римана с вырожденными ядрами.
4. Каковы условия нетеровости обобщенной краевой задачи Римана для аналитических функций?

Задания для аудиторной работы:

1. Требуется найти все исчезающие на бесконечности кусочно аналитические функции $\Phi(z)=\{\Phi^{+}(z),\Phi^{-}(z)\}$ с линией скачков $L=\{t:|t|=1\}$, удовлетворяющие на L соотношению

$$\Phi^{+}(t)-t\Phi^{-}(t)-\left(\frac{1}{2}-t\right)\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\Phi^{+}(\tau)d\tau}{\tau}=3t^{3}+\frac{1}{2}t^{2}.$$

2. Требуется найти все ограниченные на бесконечности кусочно аналитические функции $F(z)=\{F^{+}(z),F^{-}(z)\}$ с линией скачков $L=\{t:|t|=1\}$, удовлетворяющие на L соотношению

$$F^{+}(t)-\frac{1}{t}F^{-}(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}(1-t\tau)F^{+}(\tau)d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{t^{2}}{\tau}F^{-}(\tau)d\tau=t^{2}+\frac{1}{2t}.$$

Задания для самостоятельной работы:

1. Требуется найти все кусочно аналитические функции $\varphi(z)=\{\varphi^{+}(z),\varphi^{-}(z)\}$ с линией скачков $L=\{t:|t|=1\}$, имеющие на бесконечности нуль второго порядка и удовлетворяющие на L условию

$$\varphi^{+}(t)-t^{2}\varphi^{-}(t)+\frac{(1-t^{-1})}{4\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi^{+}(\tau)}{\tau^{2}}d\tau=t-\frac{1}{t^{3}}.$$

2. Требуется найти все ограниченные на бесконечности кусочно аналитические функции $F(z)=\{F^{+}(z),F^{-}(z)\}$ с линией скачков $L=\{t:|t|=1\}$, удовлетворяющие на L соотношению

$$F^{+}(t)-\frac{1}{t^{2}}F^{-}(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\left(1-\frac{1}{t}\right)\cdot\tau\cdot F^{+}(\tau)d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{t^{2}+1}{\tau}F^{-}(\tau)d\tau=5+\frac{1}{t^{3}}.$$

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Текущая аттестация осуществляется на каждом практическом занятии в процессе фронтального опроса, выполнения заданий для аудиторной работы, в процессе проверки домашней самостоятельной работы.

Оценочные средства

I. Контрольные вопросы для проверки теоретической подготовки к практическому занятию.

Перечень вопросов приводится в планах практических занятий.

II. Задания для самостоятельной работы.

Перечень практических заданий для самостоятельной работы приводится в планах практических занятий.

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация осуществляется посредством проведения зачёта. Зачет выставляется по итогам практических занятий, а также на основе представленных обучающимися материалов самостоятельной работы в соответствии с Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации. Студенты, не выполнившие все задания для самостоятельной работы, предложенные в планах практических занятий, для получения зачета выполняют письменное зачетное задание, образец которого приводится ниже.

Оценочные средства

I. Задания для итогового (зачетного) занятия.

Образец зачетного задания

Примечание. *Во всех заданиях значение параметра k равно порядковому номеру студента в учебном журнале*

1. Задача Римана. Пусть T^+ - единичный круг на комплексной плоскости переменного $z = x + iy$, т.е. $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, а $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \cup L)$, где $L = \{t : |t| = 1\}$. Требуется найти две аналитические функции: $\Phi^+(z)$ - аналитическую в T^+ и $\Phi^-(z)$ - аналитическую в T^- ($\Phi^-(\infty) = k$), если их граничные значения на L удовлетворяют следующему условию:

$$\Phi^+(t) = t^{10-k}\Phi^-(t) + kt^k + (10-k)t^{-k}.$$

2. Задача Гильберта. Пусть T^+ - единичный круг на комплексной плоскости переменного $z = x + iy$, а $L = \{t : |t| = 1\}$ - граница этого круга. Требуется найти аналитическую в T^+ функцию $\Phi^+(z)$, если ее граничные значения на L удовлетворяют следующему условию:

$$\mathrm{Re}\{t^{-1}\Phi^+(t)\} = \frac{1}{2i^k}\left(t^{10-k} + (-1)^k t^{k-10}\right),$$ где i - мнимая единица.

<u>Критерии оценивания ответа на зачёте</u>

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Правильное решение задачи 1	2,5 балла
2	Правильное решение задачи 2	2,5 балла

(*) Возможна градация в 0,25, 0,5 и 0,75 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Зачтено	3-5
2	Незачтено	2 и менее

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Основная литература

1. *Расулов К.М.* Методы решения линейных краевых задач комплексного анализа: учебное пособие. – Смоленск: «Принт-Экспресс», 2019.

2 *Расулов К.М.* Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. – Смоленск: СмолГУ, 2013.

7.2. Дополнительная литература

3. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – М., Наука, 1977.

4. *Зверович Э.И.* Линейные краевые задачи теории аналитических функций. – Минск: БГУ, 2015.

5. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., Наука, 1968.

6. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М., Наука, 1966.

7. *Прусов И.А.* Двумерные краевые задачи фильтрации. – Минск, 1987. – 182 с.

8. *Расулов К.М.* Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СПГУ, 1998.

9. *Heinrich Begehr.* Boundary value problems in complex analysis I // Boletin de la Asociacion Matematica Venezolana. Vol. 12, No. 1 (2005). – P. 65-85.

10. *Heinrich Begehr.* Complex analytic methods for partial differential equations. – Singapure: World Scientific Publishing, 1994.

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

- Система дистанционного обучения Смоленского государственного университета http://cdo.smolgu.ru
- Электронно-библиотечная система университета http://biblioteka.smolgu.ru
- Национальный открытый университет http://www.intuit.ru
- Образовательный математический сайт http://exponenta.ru
- Общероссийский математический портал http://www.mathnet.ru

8. Материально-техническое обеспечение

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используется интерактивная доска; проектор. Осуществляется поиск информации в WWW-пространстве; работа с Web-страницами и ресурсами сети Интернет.

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине в университете имеется следующая необходимая инструментальная база: учебные аудитории для проведения практических занятий; компьютерный класс, оборудованный персональными ЭВМ с необходимым математическим софтом и выходом в Интернет для проведения практических занятий; кабинеты, оборудованные проекторами и электронными досками для проведения лекционных занятий. Имеется кабинет ксерокопирования и кафедральный принтер для подготовки индивидуальных дидактических материалов.

9. Программное обеспечение

Для осуществления образовательного процесса используется Информационно-вычислительный центр физико-математического факультета (Положение о Центре утверждено приказом ректора №01-66 от 28.09.2015 г.), включающий компьютерные классы, оснащённые выходом в интернет и системой компьютерной математики Wolfram Mathematica в текущей модификации.

Программное обеспечение: Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), Лицензия 66920993 от 24.05.2016, обновление раз в три года; Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), Лицензия 66975477 от 03.06.2016, обновление раз в три года; Dr. Web Server/Desktop Security Suite (Антивирус) Лицензия EE4E-QN5S-6FG2-N76B (Ежегодное обновление); Kaspersky Endpoint Security для бизнеса – Стандартный, Лицензия 1FB6151216081242, ежегодное обновление.

Электронные библиотечные системы и электронная информационно-образовательная среда: электронная библиотечная система «ЭБС ЮРАЙТ», Договор № 3074 от 15.11.2017, ежегодное обновление; СДО Русский Moodle 3KL Norm с техническим обслуживанием, Акт на передачу прав №УТДЮ0001785 от 06.12.2016, ежегодное обновление.