

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Смоленский государственный университет»  
Кафедра математического анализа

«Утверждаю»  
Проректор по учебно-  
методической работе  
Ю. А. Устименко.  
«б» сентября 2022 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Б1.В.ДВ.01.02 Стохастическое исчисление**

Направление подготовки: 02.04.01 Математика и компьютерные науки  
Направленность (профиль): Методы моделирования в анализе и стохастике  
Форма обучения - очная  
Курс – 1,2  
Семестр – 2,3,4  
Всего зачетных единиц – 10, часов – 360  
Форма отчетности: зачет – 2,4 семестры, экзамен – 3 семестр.

Программу разработал  
кандидат физико-математических наук, доцент Хартов А. А.

Одобрена на заседании кафедры  
«30» августа 2022 г., протокол № 11

Смоленск  
2022 г.

## 1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Стохастическое исчисление» содержится в Блоке 1 дисциплин из части, формируемой участниками образовательных отношений, дисциплинам по выбору. Она изучается во 2-ом, 3-ем и 4-ом семестрах. С одной стороны, она отчасти является вспомогательной для изучения таких дисциплин, как «Прикладные стохастические модели» и «Аналитические и вероятностные методы». С другой стороны, содержательно в ней находят применение понятия, факты, методы, пройденные в рамках дисциплин «Дополнительные главы теории вероятностей», «Дискретные и вероятностные модели», «Вероятность и аппроксимация», «Аналитические и вероятностные методы».

Целью освоения дисциплины является содействие становлению профессиональной компетентности магистра математики и компьютерных наук за счет изучения на продвинутом уровне понятий и методов случайных процессов и стохастического исчисления и их приложений.

Изучение курса основано на традиционных методах высшей школы, тесной взаимосвязи со смежными курсами, а также на использовании современной учебной, методической литературы, информационных и образовательных технологий.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
<b>ПК-1.</b> Способен осуществлять поиск, анализ и систематизацию научной информации в области анализа и стохастики для реализации научно-исследовательских проектов	<b>Знает:</b> теоретические основы и технологии организации научно-исследовательской деятельности, современный аппарат, методологическую базу и сферу приложения анализа и стохастики, пути использования имеющихся знаний при проведении научно-исследовательской работы. <b>Умеет:</b> осуществлять поиск, анализ, систематизацию научной информации в области анализа и стохастики и их приложений для реализации научно-исследовательских проектов. <b>Владеет:</b> навыками организации и проведения научно-исследовательской деятельности в ходе выполнения профессиональных функций.
<b>ПК-2.</b> Способен применять методы стохастического и аналитического математического моделирования для решения прикладных задач	<b>Знает:</b> методы стохастического и аналитического математического моделирования. <b>Умеет:</b> выбирать методики разработки требований к модели, строить причинно-следственные связи, формулировать требования к модели и цели ее создания, исходя из анализа проблем, потребностей и возможностей, анализировать соответствие требованиям существующих моделей, алгоритмизировать деятельность. <b>Владеет:</b> навыками анализа проблемной ситуации, разработки требований к модели, постановки цели, разработки концепции модели, стохастического и аналитического математического моделирования для решения прикладных задач.

### 3. Содержание дисциплины

**Основные понятия теории случайных процессов.** Предмет теории случайных процессов и некоторые задачи. Понятие случайного процесса. Траектории. Стохастическая эквивалентность. Сигма-алгебра, порожденная процессом. Конечномерные распределения случайного процесса. Теорема Колмогорова о согласованных мерах. Измеримость процесса. Сепарабельность процесса. Непрерывность процесса. Критерий Колмогорова непрерывности п.н. Критерий отсутствия разрывов второго рода.

**Классы случайных процессов.** Стационарные процессы. Процессы со стационарными приращениями. Стационарные в широком смысле процессы. Спектральные представления. Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс. Гауссовские процессы. Винеровский процесс. Броуновский мост. Процесс Орнштейна-Уленбека. Дробное броуновское движение. Процессы Леви.

**Случайные процессы и сходимости.** Сходимость конечномерных распределений. Слабая сходимость. Принципы инвариантности.

**Стохастические интегралы.** Случайные меры с некоррелированными значениями и интегралы по ним. Пуассоновские случайные меры и интегралы. Предельные теоремы для пуассоновских интегралов. Стохастический интеграл по винеровскому процессу. Интегральные представления важных гауссовских процессов. Устойчивые случайные меры и интегралы по ним.

**Стохастические дифференциальные уравнения.** Формула Ито. Броуновское локальное время. Формула Танаки. Стохастическая экспонента. Существование и единственность сильного решения стохастического дифференциального уравнения. Методы решения стохастических дифференциальных уравнений. Теорема Гирсанова. Диффузионные процессы.

**Гауссовские случайные процессы.** Гауссовские векторы в линейном пространстве. Ковариационный оператор. Измеримые функционалы. Ядро гауссовского распределения. Теорема о факторизации. Ядра для важных гауссовских процессов. Воспроизводящее ядро. Теорема Камерона-Мартин. Принцип концентрации.

**Гауссовские случайные процессы и аппроксимация.** Разложения гауссовских векторов. Разложение Кархунена-Лоэва. Конструкция Леви. Теория информационной сложности и ее задачи. Сложность аппроксимации в среднем и по вероятности. Проблематика задач аппроксимации для случайных полей высокой параметрической размерности. Трактобельность и ее типы.

### 4. Тематический план

#### 2 семестр

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий				
			лекции	семинары	практические занятия	лабораторные занятия	самостоятельная работа
1.	Основные понятия теории случайных процессов	40	6		6		28
2.	Классы случайных процессов.	40	6		6		28
3.	Случайные процессы и сходимости	28	4		4		20
Всего за семестр		<b>108</b>	<b>16</b>		<b>16</b>		<b>76</b>

#### 3 семестр

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий				
			лекции	семинары	практические занятия	лабораторные занятия	самостоятельная работа
1.	Стохастические интегралы.	56	8		8		40
2.	Стохастические дифференциальные уравнения.	61	8		8		45
	Контроль	<b>27</b>					
Всего за семестр		<b>144</b>	<b>16</b>		<b>16</b>		<b>112</b>

#### 4 семестр

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий				
			лекции	семинары	практические занятия	лабораторные занятия	самостоятельная работа
1.	Гауссовские случайные процессы.	60	10		10		40
2.	Гауссовские случайные процессы и аппроксимация.	48	6		6		36
Всего за семестр		<b>108</b>	<b>16</b>		<b>16</b>		<b>76</b>

### 5. Виды образовательной деятельности

#### Занятия лекционного типа

##### 2 семестр

**Лекции 1-3. Основные понятия теории случайных процессов.** Предмет теории случайных процессов и некоторые задачи. Понятие случайного процесса. Траектории. Стохастическая эквивалентность. Сигма-алгебра, порожденная процессом. Конечномерные распределения случайного процесса. Теорема Колмогорова о согласованных мерах. Измеримость процесса. Сепарабельность процесса. Непрерывность процесса. Критерий Колмогорова непрерывности п.н. Критерий отсутствия разрывов второго рода.

**Лекции 4-6. Классы случайных процессов.** Стационарные процессы. Процессы со стационарными приращениями. Стационарные в широком смысле процессы. Спектральные представления. Процессы с независимыми приращениями. Пуассоновский процесс. Гауссовские процессы. Винеровский процесс. Броуновский мост. Процесс Орнштейна-Уленбека. Дробное броуновское движение. Процессы Леви.

**Лекции 7-8. Случайные процессы и сходимость.** Сходимость конечномерных распределений. Слабая сходимость. Принципы инвариантности.

##### 3 семестр

**Лекции 1-4. Стохастические интегралы.** Случайные меры с некоррелированными значениями и интегралы по ним. Пуассоновские случайные меры и интегралы. Предельные теоремы для пуассоновских интегралов. Стохастический интеграл по винеровскому процессу. Интегральные

представления важных гауссовских процессов. Устойчивые случайные меры и интегралы по ним.

**Лекции 5-8. Стохастические дифференциальные уравнения.** Формула Ито. Броуновское локальное время. Формула Танаки. Стохастическая экспонента. Существование и единственность сильного решения стохастического дифференциального уравнения. Методы решения стохастических дифференциальных уравнений. Теорема Гирсанова. Диффузионные процессы.

#### 4 семестр

**Лекции 1-5. Гауссовские случайные процессы.** Гауссовские векторы в линейном пространстве. Ковариационный оператор. Измеримые функционалы. Ядро гауссовского распределения. Теорема о факторизации. Ядра для важных гауссовских процессов. Воспроизводящее ядро. Теорема Камерона-Мартина. Принцип концентрации.

**Лекции 6-8. Гауссовские случайные процессы и аппроксимация.** Разложения гауссовских векторов. Разложение Кархунена-Лоэва. Конструкция Леви. Теория информационной сложности и ее задачи. Сложность аппроксимации в среднем и по вероятности. Проблематика задач аппроксимации для случайных полей высокой параметрической размерности. Трактability и ее типы.

### **Занятия семинарского типа**

#### 2 семестр

**Практические занятия 1-3. «Основные понятия теории случайных процессов».**

*Задания для аудиторной работы:* задачи №10.1-10.47 (нечетные) из [6] списка доп. литературы.

*Задания для самостоятельной работы:* задачи №10.1-10.47 (четные) из [6] списка доп. литературы.

**Практические занятия 4-6. «Классы случайных процессов».** *Задания для аудиторной работы:* задачи №10.121-10.180 (нечетные) из [6] списка доп. литературы.

*Задания для самостоятельной работы:* задачи №10.121-10.180 (четные) из [6] списка доп. литературы.

**Практические занятия 7-8. «Случайные процессы и сходимости».**

*Задания для аудиторной работы:* Упражнения 11.2, 11.7, 11.10, 11.12 из [3] списка доп. литературы; Задачи на с. 91, 112, 172, 190 (с нечетными номерами) из [1] списка доп. литературы.

*Задания для самостоятельной работы:* Упражнения 11.4, 11.8, 11.11 из [3] списка доп. литературы; задачи на с. 91, 112, 172, 190 (с четными номерами) из [1] списка доп. литературы.

#### 3 семестр

**Практические занятия 1-4. «Стохастические интегралы».**

*Задания для аудиторной работы:* Упражнения 11.1-11.5 (нечетные) Главы 1 из [2], 2.1-2.4 (нечетные) Главы 2 из [2].

*Задания для самостоятельной работы:* Упражнения 11.1-11.5 (четные) Главы 1 из [2], 2.1-2.4 (четные) Главы 2 из [2].

**Практические занятия 5-8. «Стохастические дифференциальные уравнения».**

*Задания для аудиторной работы:* Упражнения 4.1-4.7, 5.1, 8.1-8.11, 10.1-10.3 (нечетные) Главы 2 из [2].

*Задания для самостоятельной работы:* Упражнения 4.1-4.7, 5.1, 8.1-8.11, 10.1-10.3 (нечетные) Главы 2 из [2].

#### 4 семестр

**Практические занятия 1-5. «Гауссовские случайные процессы».**

*Задания для аудиторной работы:* упражнения 1-12 на с. 38-39, 1-14 на с. 69-70, 1-9 на с. 83-84 из [5] списка доп. литературы (нечетные номера).

*Задания для самостоятельной работы:* упражнения 1-12 на с. 38-39, 1-14 на с. 69-70, 1-9 на с. 83-84 из [5] списка доп. литературы (четные номера).

### **Практические занятия 6-8. «Гауссовские случайные процессы и аппроксимация».**

*Примеры индивидуальных заданий для аудиторной и самостоятельной работы:*

№1. Задан гауссовский случайный процесс (винеровский процесс, броуновский мост, процесс Орнштейна-Уленбека и т.д.). Для данного процесса: 1) получить аналитические представления сложности аппроксимации в среднем и по вероятности, 2) получить верхние и нижние оценки для этих величин, 3) реализовать алгоритм вычисления сложности аппроксимации в среднем по заданному порогу ошибки, построить соответствующий график зависимости, 4) реализовать алгоритм вычисления сложности аппроксимации по вероятности по заданным значениям порога ошибки и уровня значимости, построить соответствующий график зависимости. 5) с помощью величин сложности в среднем и по вероятности смоделировать на компьютере данный случайный процесс с любой заданной точностью.

№2. Задано гауссовское случайное поле (броуновский лист, броуновская «подушка» и т.д.) с данной параметрической размерностью. Для данного случайного поля: 1) получить аналитическое представление сложности аппроксимации в среднем, 2) получить оценки для этих величин на основе имеющихся теоретических результатов и построить соответствующие графики зависимости, 3) реализовать алгоритм вычисления сложности аппроксимации в среднем по заданному порогу ошибки, построить соответствующий график зависимости, 4) провести сравнительный анализ результатов вычислений и соответствующих теоретических результатов. 5) с помощью величины сложности в среднем смоделировать на компьютере данное случайное поле с любой заданной точностью.

На каждом практическом занятии обучающимся задаются *контрольные вопросы*: по материалам соответствующей лекции дать определения важнейших понятий, перечислить свойства объекта, изложить метод, напомнить формулировку той или иной теоремы.

### **Самостоятельная работа**

Задания для самостоятельной работы приводятся в планах практических занятий.

## **6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)**

### **6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации**

Проведение текущего контроля в 2-ом, 3-ем и 4-ом семестрах осуществляется на каждом практическом занятии - в процессе выполнения заданий для аудиторной работы и в процессе проверки домашней самостоятельной работы.

#### Критерии оценивания заданий

##### 1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Критерии	Количество баллов (*)
1	Качество выполнения задания	3 балла
2	Качество оформления	2 балла

(\*) Возможна градация в 0,25 балла.

##### 2. Шкала оценивания задания:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	5
2	Хорошо	4
3	Удовлетворительно	3
4	Неудовлетворительно	0-2



## 6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация во 2-ом и 4-ом семестрах осуществляется посредством прохождения зачета. Зачет выставляется по результатам работы студента в течение семестра.

### *Критерии выставления зачёта.*

Для получения зачета студент должен выполнить на оценку не ниже «удовлетворительно/зачтено» всех видов работ для текущей аттестации. В противном случае ставится «не зачтено».

Промежуточная аттестация 3-м семестре осуществляется посредством проведения экзамена.

### Вопросы к экзамену

1. Предмет теории случайных процессов.
2. Понятие случайного процесса.
3. Траектории случайного процесса.
4. Стохастическая эквивалентность.
5. Сигма-алгебра, порожденная процессом.
6. Конечномерные распределения случайного процесса.
7. Теорема Колмогорова о согласованных мерах.
8. Измеримость процесса.
9. Сепарабельность процесса.
10. Непрерывность процесса.
11. Критерий Колмогорова непрерывности п.н.
12. Критерий отсутствия разрывов второго рода.
13. Стационарные процессы.
14. Процессы со стационарными приращениями.
15. Стационарные в широком смысле процессы.
16. Спектральные представления.
17. Процессы с независимыми приращениями.
18. Пуассоновский процесс.
19. Свойства пуассоновского процесса.
20. Гауссовские процессы.
21. Винеровский процесс.
22. Свойства винеровского процесса.
23. Броуновский мост.
24. Процесс Орнштейна-Уленбека.
25. Дробное броуновское движение.
26. Процессы Леви.
27. Свойства процессов Леви.
28. Сходимость конечномерных распределений.
29. К.м.р.-принцип инвариантности.
30. Слабая сходимость.
31. Принцип инвариантности Донскера в пространстве Скорохода.
32. Принцип инвариантности Донскера в пространстве непрерывных функций.
33. Сходимость эмпирических процессов.

### Образец экзаменационного задания

1. Критерий Колмогорова непрерывности п.н.
2. Принцип инвариантности Донскера в пространстве Скорохода.



## Критерии оценивания ответа на экзамене

### 1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Правильный ответ на каждый вопрос	10 баллов

### 2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	17-20
2	Хорошо	13-16
3	Удовлетворительно	9-12
4	Неудовлетворительно	менее 9

## **7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы**

### **7.1. Основная литература**

1. Круглов, В. М. Случайные процессы в 2 ч. Часть 1. Основы общей теории : учебник для вузов / В. М. Круглов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 276 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01748-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/489906>

2. Круглов, В. М. Случайные процессы в 2 ч. Часть 2. Основы стохастического анализа : учебник для вузов / В. М. Круглов. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 280 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02086-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/490917>

### **7.2. Дополнительная литература**

1. Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер, - Москва: Издательство «Наука», 1977.
2. Бородин А. Н. Случайные процессы, – СПб: Издательство «Лань», 2013.
3. Лифшиц М. А. Случайные процессы - от теории к практике, – СПб: Издательство «Лань», 2016.
4. Лифшиц М. А. Лекции по гауссовским процессам, – СПб: Издательство «Лань», 2016.
5. Лифшиц М. А. Гауссовские случайные функции, - Киев: Издательство «ТВиМС», 1995.
6. Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г., Задачи по теории вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы: учебное пособие, – Москва: Изд-во «КДУ», 2009.
7. Ротарь В. И. Теория вероятностей, – Москва: Изд-во «Высшая школа», 1992.
8. Ширяев А. Н. Вероятность в 2-х кн., – Москва: Изд-во «МЦНМО», 2017.

### **7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»**

- Система дистанционного обучения Смоленского государственного университета <http://cdo.smolgu.ru>
- Электронно-библиотечная система университета <http://biblioteka.smolgu.ru>
- Национальный открытый университет <http://www.intuit.ru>
- Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru>

## **8. Материально-техническое обеспечение**

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, оснащенная стандартной учебной мебелью, интерактивной доской, мультимедиапроектором, ноутбуком и колонками.

Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенная стандартной учебной мебелью, компьютерами с выходом в Интернет.

Помещение для самостоятельной работы – компьютерный класс с доступом к сети «Интернет» и ЭИОС СмолГУ.

## **9. Программное обеспечение**

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине используется Информационно-вычислительный центр физико-математического факультета.

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используются:

1. Система дистанционного обучения СмолГУ. URL: <http://www.cdo.smolgu.ru>. (СДО Русский Moodle 3KL Norm с техническим обслуживанием, Акт на передачу прав №УТДЮ0001785 от 06.12.2016)

2. Microsoft Open License (Windows XP, 7, Office 2003-2016) - Лицензия 66975477 от 03.06.2016 – в составе: ОС Windows, MS Excel 2003/2007.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН  
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 03B6A3C600B7ADA9B742A1E041DE7D81B0  
Владелец: Артеменков Михаил Николаевич  
Действителен: с 04.10.2021 до 07.10.2022