

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»  
Проректор по учебно-  
методической работе  
\_\_\_\_\_ Ю. А. Устименко.  
«6» сентября 2022 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Б1.В.ДВ.03.01 Классические краевые задачи для полианалитических функций**

Направление подготовки: 02.04.01 Математика и компьютерные науки  
Направленность (профиль): Методы моделирования в анализе и стохастике  
Форма обучения - очная  
Курс – 2  
Семестр – 3  
Всего зачетных единиц – 2, часов – 72  
Форма отчетности: зачет – 3 семестр

Программу разработал  
доктор физико-математических наук, профессор Расулов К.М.

Одобрена на заседании кафедры  
«30» августа 2022 г., протокол № 11

Смоленск  
2022 г.

## 1. Место дисциплины в структуре ОП

Настоящая дисциплина по выбору относится части, формируемой участниками образовательных отношений (дисциплина по выбору) учебного плана магистратуры направления подготовки 02.04.01 Математика и компьютерные науки (профиль: Методы моделирования в анализе и стохастике). В ней рассматриваются методы решения основных классических линейных краевых задач типа Римана и типа Гильберта в классах полианалитических функций.

Предполагается, что после изучения и освоения настоящего курса студенты магистратуры получат цельное представление об одной из важнейших разделов комплексного анализа – теории краевых задач для полианалитических функций. А это, в свою очередь, будет способствовать успешной научно-исследовательской работе магистрантов (в частности, при подготовке магистерских диссертаций), а также в дальнейшей их научно-производственной деятельности.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
<b>ПК-1.</b> Способен осуществлять поиск, анализ и систематизацию научной информации в области анализа и стохастики для реализации научно-исследовательских проектов	<b>Знает:</b> теоретические основы и технологии организации научно-исследовательской деятельности, современный аппарат, методологическую базу и сферу приложения анализа и стохастики, пути использования имеющихся знаний при проведении научно-исследовательской работы. <b>Умеет:</b> осуществлять поиск, анализ, систематизацию научной информации в области анализа и стохастики и их приложений для реализации научно-исследовательских проектов. <b>Владеет:</b> навыками организации и проведения научно-исследовательской деятельности в ходе выполнения профессиональных функций.
<b>ПК-2.</b> Способен применять методы стохастического и аналитического математического моделирования для решения прикладных задач	<b>Знает:</b> методы стохастического и аналитического математического моделирования. <b>Умеет:</b> выбирать методики разработки требований к модели, строить причинно-следственные связи, формулировать требования к модели и цели ее создания, исходя из анализа проблем, потребностей и возможностей, анализировать соответствие требованиям существующих моделей, алгоритмизировать деятельность. <b>Владеет:</b> навыками анализа проблемной ситуации, разработки требований к модели, постановки цели, разработки концепции модели, стохастического и аналитического математического моделирования для решения прикладных задач.

### 3. Содержание дисциплины

**Полианалитические функции и их связь с аналитическими функциями комплексного переменного.** Основные подходы к определению полианалитических функций. Общее представление полианалитических функций через аналитические функции комплексного переменного. Внутренние и граничные теоремы единственности для полианалитических функций.

**Интеграл типа Коши для полианалитических функций и его основные свойства.** Интегральная формула Коши для полианалитических функций. Граничные значения интеграла типа Коши для полианалитических функций. Некоторые интегральные представления полианалитических функций в круговых областях.

**Постановки основных линейных краевых задач в классах полианалитических функций и их классификация.** Понятие краевой (граничной) задачи для полианалитических функций. Основные классические линейные краевые задачи типа Римана и типа Гильберта в классах полианалитических функций. Краевые задачи треугольного и общего вида.

**Модельные краевые задачи типа Римана и типа Гильберта в классах полианалитических функций и методы их решения.** Модельная краевая задача типа Римана для полианалитических функций в односвязных областях и её решение. Модельная краевая задача типа Гильберта для полианалитических функций в круговых областях и методы её решения

**Методы решения краевых задач треугольного вида в классах полианалитических функций.** Постановки основных краевых задач типа Римана треугольного вида и методы их решения. Основные краевые задачи типа Гильберта треугольного вида и методы их решения.

**О краевых задачах типа Римана и типа Гильберта общего вида в классах полианалитических функций.** Постановки основных краевых задач типа Римана (типа Гильберта) общего вида в классах полианалитических функций. Логическая схема методов решения краевых задач типа Римана (типа Гильберта) общего вида для полианалитических функций в произвольных односвязных областях

**Основные линейные краевые задачи типа Римана и типа Гильберта в классах метааналитических функций.** Модельные краевые задачи типа Римана (типа Гильберта) в классах метааналитических функций и методы их решения. Постановки основных краевых задач типа Римана и типа Гильберта общего вида в классах метааналитических функций.

### 4. Тематический план

№ п/п	Разделы и Темы	Всего часов	Формы занятий			
			лекции	практические занятия	лабораторные занятия	самостоятельная работа
1	Полианалитические функции и их связь с аналитическими функциями комплексного переменного	10	2	2	–	6
2	Интеграл типа Коши для полианалитических функций и его основные свойства	10	2	2	–	6
3	Постановки основных классических линейных краевых задач в классах полианалитических функций	10	2	2	-	6

	и их классификация					
4	Модельные краевые задачи типа Римана и типа Гильберта в классах полианалитических функций и методы их решения	8	2	2	-	4
5	Методы решения краевых задач треугольного вида в классах полианалитических функций	10	2	2	—	6
6	О краевых задачах типа Римана и типа Гильберта общего вида в классах полианалитических функций и методах их решения	16	4	4	-	8
7	Основные линейные краевые задачи типа Римана и типа Гильберта в классах метааналитических функций	8	2	2		4
ИТОГО		72	16	16	—	40

## 5. Виды образовательной деятельности

### Занятия лекционного типа

**Лекция 1. Полианалитические и метааналитические функции и их связь с аналитическими функциями комплексного переменного.** Основные подходы к определению полианалитических функций. Общее представление полианалитических функций через аналитические функции комплексного переменного. Определение метааналитических функций. Общие представления метааналитических функций через аналитические функции комплексного переменного. Внутренние и граничные теоремы единственности для полианалитических функций и их обобщений.

**Лекция 2. Интеграл типа Коши для полианалитических функций и его основные свойства.** Интегральная формула Коши для полианалитических функций. Граничные значения интеграла типа Коши для полианалитических функций. Некоторые интегральные представления полианалитических функций в круговых областях.

**Лекция 3. Постановки основных линейных краевых задач в классах полианалитических функций и их классификация.** Понятие краевой (граничной) задачи для полианалитических функций. Основные линейные краевые задачи типа Римана и типа Гильберта в классах полианалитических функций. Классические и неклассические краевые задачи. Краевые задачи треугольного и общего вида.

**Лекция 4. Модельные краевые задачи типа Римана и типа Гильберта в классах полианалитических функций и методы их решения.** Модельная краевая задача типа Римана для полианалитических функций в односвязных областях и её решение. Модельная краевая задача типа Гильберта для полианалитических функций в круговых областях и методы её решения

**Лекция 5. Методы решения краевых задач треугольного вида в классах полианалитических функций.** Постановки основных краевых задач типа Римана

треугольного вида и методы их решения. Основные краевые задачи типа Гильберта треугольного вида и методы их решения.

**Лекции 6-7. О краевых задачах типа Римана и типа Гильберта общего вида в классах полианалитических функций и методы их решения.** Постановки основных краевых задач типа Римана (типа Гильберта) общего вида в классах полианалитических функций. Методы решения краевых задач типа Римана (типа Гильберта) общего вида для полианалитических функций в круговых областях. Логическая схема методов решения краевых задач типа Римана (типа Гильберта) общего вида для полианалитических функций в произвольных односвязных областях

**Лекция 8. Основные линейные краевые задачи типа Римана и типа Гильберта в классах метааналитических функций.** Модельные краевые задачи типа Римана (типа Гильберта) в классах метааналитических функций и методы их решения. Постановки основных краевых задач типа Римана и типа Гильберта общего вида в классах метааналитических функций.

### Занятия семинарского типа

#### Занятие № 1. Полианалитические функции комплексного переменного и их основные свойства

*Основные понятия:* аналитическая функция, дифференциальный оператор Коши-Римана, обобщенное уравнение Коши-Римана, полианалитическая функция, внутренние теоремы единственности, граничные теоремы единственности.

*Вопросы для обсуждения:*

1. Дайте различные определения полианалитической функции порядка  $n$  в точке (в области).
2. Каковы основные внутренние и граничные теоремы для полианалитических функций?
3. Дайте определение метааналитической функции первого типа (второго типа) в области.
4. Каковы общие представления полианалитических (метааналитических) функций через аналитические функции комплексного переменного?

*Задания для самостоятельной работы*

*Задание 1.* Подготовьте научный доклад на тему «Внутренние теоремы единственности для бианалитических функций».

По указанному выше заданию кто-то из студентов должен подготовить доклад к практическому занятию.

*Литература*

*Основная:* 2, 3.

*Дополнительная:* 1, 3, 4.

#### Занятие № 2. Интеграл типа Коши для полианалитических функций и его свойства

*Основные понятия:* контур интегрирования, ядро Коши, интегральная формула Коши, интеграл типа Коши, кусочно полианалитическая функция, интегральное представление, граничные свойства.

*Вопросы для обсуждения:*

1. Дайте определение кусочно полианалитической функции.
2. Какова интегральная формула Коши для полианалитических функций?
3. По каким формулам определяются граничные значения интеграла типа Коши с непрерывной в смысле Гельдера плотностью?
4. Почему контур интегрирования в интеграле типа Коши является линией скачков полианалитической функции?
5. Каковы основные интегральные представления полианалитических функций в круговых областях?

*Задания для самостоятельной работы*

*Задание 2.* Подготовьте научный доклад на тему «*Интегральные представления полианалитических функций и их применения*».

По указанному выше заданию кто-то из студентов должен подготовить доклад к практическому занятию.

*Литература*

*Основная:* 1, 2, 3.

*Дополнительная:* 1, 3, 4.

### **Занятие № 3. Основные классические линейные краевые задачи в классах полианалитических функций и их классификация**

*Основные понятия:* краевая задача, полианалитическая функция, дифференциальный оператор, односторонние краевые задачи (типа Гильберта), двусторонние краевые задачи (типа Римана), классическая краевая задача, неклассическая краевая задача, краевая задача треугольного вида, краевая задача общего вида.

*Вопросы для обсуждения:*

1. Дайте общую постановку односторонних (двусторонних) линейных краевых задач для полианалитических функций в односвязных областях.
2. Когда краевая задача для полианалитических функций называется классической (неклассической)?
3. Какая краевая задача для полианалитических функций называется задачей треугольного (общего) вида?
4. Дайте постановки основных краевых задач типа Гильберта (типа Римана) в классах полианалитических функций.

*Задания для самостоятельной работы*

*Задание 3.* Подготовьте научный доклад на тему «*Классическая краевая задача Шварца для полианалитических функций*».

По указанному выше заданию кто-то из студентов должен подготовить доклад к практическому занятию.

*Литература*

*Основная:* 3.

*Дополнительная:* 3, 4.

### **Занятие № 4. Методы решения модельных краевых задач типа Римана и типа Гильберта в классах полианалитических функций**

*Основные понятия:* полианалитическая функция, модельная краевая задача типа Римана, модельная краевая задача типа Гильберта, решение в замкнутой форме.

*Вопросы для обсуждения:*

1. Дайте общую постановку модельной краевой задачи типа Римана (типа Гильберта) для полианалитических функций в односвязных областях.
2. Каковы основные методы решения модельной краевой задачи типа Римана (типа Гильберта) для полианалитических функций?
3. В каких случаях модельные краевые задачи типа Римана (типа Гильберта) для полианалитических функций решаются в замкнутой форме?

*Задания для самостоятельной работы*

*Задание 4.* Подготовьте научный доклад на тему «*Об условиях разрешимости модельной краевой задачи типа Римана для полианалитических функций в односвязных областях*».

По указанному выше заданию кто-то из студентов должен подготовить доклад к практическому занятию.

*Литература*

*Основная:* 1-3.

*Дополнительная:* 3, 4.

### **Занятие № 5. О методах решения краевых задач треугольного вида в классах полианалитических функций**

*Основные понятия:* полианалитическая функция, краевые задачи треугольного вида, индекс краевой задачи, условия разрешимости, решение в замкнутой форме, векторно-матричная краевая задача.

*Вопросы для обсуждения:*

1. Дайте общую постановку основных краевых задач типа Римана (типа Гильберта) треугольного вида в классах полианалитических функций.
2. Каким векторно-матричным краевым задачам равносильны краевые задачи треугольного вида для полианалитических функций?
3. В каких случаях основные краевые задачи типа Римана (типа Гильберта) треугольного вида в классах полианалитических функций допускают решения в замкнутой форме?
4. Какова логическая схема решения основных краевых задач типа Римана (типа Гильберта) треугольного вида в классах полианалитических функций.?

*Задания для самостоятельной работы*

*Задание 5.* Подготовьте научный доклад на тему «Первая основная краевая задача типа Гильберта треугольного вида для полианалитических функций».

По указанному выше заданию кто-то из студентов должен подготовить доклад к практическому занятию.

*Литература*

*Основная:* 1-3.

*Дополнительная:* 2, 3, 4.

### **Занятие № 6. Методы решения первой основной краевой задачи типа Римана общего вида для бианалитических функций**

*Основные понятия:* бианалитическая функция, односвязная область, обобщенная краевая задача типа Римана, интегральное представление, вырожденные ядра, индекс задачи, интегральные уравнения Фредгольма.

*Вопросы для обсуждения:*

1. Дайте постановку первой основной краевой задачи типа Римана общего вида для бианалитических функций в односвязных областях.
2. Каким способом можно решить обобщенную краевую задачу типа Римана для аналитических функций в произвольных односвязных областях?
3. Какова логическая схема решения первой основной краевой задачи типа Римана общего вида для бианалитических функций в круговых областях?

*Задания для самостоятельной работы*

*Задание 6.* Подготовьте научный доклад на тему «Метод решения первой основной краевой задачи типа Римана общего вида для бианалитических функций в круговых областях».

По указанному выше заданию кто-то из студентов должен подготовить доклад к практическому занятию.

*Литература*

*Основная:* 1-3.

*Дополнительная:* 3, 4.

### **Занятие № 7. Методы решения первой основной краевой задачи типа Гильберта общего вида для бианалитических функций**

*Основные понятия:* бианалитическая функция, односвязная область, обобщенная

краевая задача типа Гильберта, интегральное представление, вырожденные ядра, индекс задачи, интегральные уравнения Фредгольма.

*Вопросы для обсуждения:*

1. Дайте постановку первой основной краевой задачи типа Гильберта общего вида для бианалитических функций в односвязных областях.
2. Каким способом можно решить обобщенную краевую задачу типа Гильберта для аналитических функций в произвольных односвязных областях?
3. Какова логическая схема решения первой основной краевой задачи типа Гильберта общего вида для бианалитических функций в круговых областях?

*Задания для самостоятельной работы*

*Задание 7.* Подготовьте научный доклад на тему «Метод решения первой основной краевой задачи типа Гильберта общего вида для бианалитических функций в круговых областях».

По указанному выше заданию кто-то из студентов должен подготовить доклад к практическому занятию.

*Литература*

*Основная:* 1-3.

*Дополнительная:* 1-3.

### **Занятие № 8. Основные модельные краевые задачи типа Римана и типа Гильберта в классах метааналитических функций**

*Основные понятия:* метааналитическая функция, дифференциальное уравнение, характеристическое уравнение, корни характеристического уравнения, общие представления метааналитических функций в односвязных областях, модельные краевые задачи, разрешимость в замкнутой форме.

*Вопросы для обсуждения:*

1. Дайте постановку основной модельной краевой задачи типа Гильберта (типа Римана) в классах метааналитических функций.
2. Какой векторно-матричной краевой задаче равносильна модельная краевая задача типа Гильберта (типа Римана) для метааналитических функций?
3. Схематически изложите метод решения основной модельной краевой задачи типа Гильберта (типа Римана) в классах метааналитических функций.
4. Каковы случаи разрешимости в замкнутой форме основной модельной краевой задачи типа Гильберта (типа Римана) в классах метааналитических функций?

*Задания для самостоятельной работы*

*Задание 8.* Подготовьте научный доклад на тему «Метод решения основной модельной краевой задачи типа Римана в классах метааналитических функций».

По указанному выше заданию кто-то из студентов должен подготовить доклад к практическому занятию.

*Литература*

*Основная:* 3.

*Дополнительная:* 1, 3.

### **Самостоятельная работа**

Списки теоретических вопросов и задания для самостоятельной работы приводятся в планах практических занятий.

## 6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

### 6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Проведение текущего контроля в семестре осуществляется на каждом семинарском занятии - в процессе выполнения и обсуждения научных докладов.

#### Критерии оценивания заданий (докладов)

##### 1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Критерии	Количество баллов (*)
1	Полнота и качество выполнения задания	3 балла
2	Качество подачи и оформления	2 балла

(\*) Возможна градация в 0,25 балла.

##### 2. Шкала оценивания задания:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	5
2	Хорошо	4
3	Удовлетворительно	3
4	Неудовлетворительно	0-2

Промежуточная аттестация в семестре осуществляется посредством прохождения зачета. Зачет выставляется по результатам работы студента в течение семестра.

#### ***Критерии выставления зачёта.***

Для получения зачета студент должен выполнить на оценку не ниже «удовлетворительно» всех видов работ для текущей аттестации. В противном случае ставится «не зачтено».

## 7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

### 7.1. Основная литература

1. *Расулов К.М.* Методы решения линейных краевых задач комплексного анализа: учебное пособие. – Смоленск: «Принт-Экспресс», 2019.

2. *Расулов К.М.* Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. – Смоленск: СмолГУ, 2013.

3. *Расулов К.М.* Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СПГУ, 1998.

### 7.2. Дополнительная литература

1. *Балк М.Б.* Полианалитические функции и их обобщения // Итоги науки и техники ВИНТИ. Сер. «Сов. пробл. матем. фун. напр.» – Т. 85. – М.: ВИНТИ, 1991. – С. 187–246.

2. *Векуа Н.П.* Системы сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1970.

3. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – М., Наука, 1977.

4. *Габринович В.А., Соколов И.А.* Об исследованиях по краевым задачам для полианалитических функций // Научные труды юбилейного семинара по краевым задачам, посвященного 75-летию со дня рождения академика АН БССР Ф.Д. Гахова. – Минск: Изд-во «Университетское», 1985. – С. 43–47.

5. *Зверович Э.И.* Линейные краевые задачи теории аналитических функций. – Минск: БГУ, 2015.

6. *Монахов В.Н.* Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений. – М., Наука, 1977
7. *Мухелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., Наука, 1968.
8. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М., Наука, 1966.
9. *Пруссов И.А.* Двумерные краевые задачи фильтрации. – Минск, 1987. – 182 с.
10. *Heinrich Begehr.* Complex analytic methods for partial differential equations. – Singapore: World Scientific Publishing, 1994.

### 7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

- Система дистанционного обучения Смоленского государственного университета <http://cdo.smolgu.ru>
- Электронно-библиотечная система университета <http://biblioteka.smolgu.ru>
- Национальный открытый университет <http://www.intuit.ru>
- Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru>

### 8. Материально-техническое обеспечение

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, оснащенная стандартной учебной мебелью, интерактивной доской, мультимедиапроектором, ноутбуком и колонками.

Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенная стандартной учебной мебелью, компьютерами с выходом в Интернет.

Помещение для самостоятельной работы – компьютерный класс с доступом к сети «Интернет» и ЭИОС СмолГУ.

### 9. Программное обеспечение

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине используется Информационно-вычислительный центр физико-математического факультета.

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используются:

1. Система дистанционного обучения СмолГУ. URL: <http://www.cdo.smolgu.ru>. (СДО Русский Moodle 3KL Norm с техническим обслуживанием, Акт на передачу прав №УТДЮ0001785 от 06.12.2016)

2. Microsoft Open License (Windows XP, 7, Office 2003-2016) - Лицензия 66975477 от 03.06.2016 – в составе: ОС Windows, MS Excel 2003/2007.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН  
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 03B6A3C600B7ADA9B742A1E041DE7D81B0  
Владелец: Артеменков Михаил Николаевич  
Действителен: с 04.10.2021 до 07.10.2022