

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра аналитических и цифровых технологий

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор по учебно-
методической работе
_____ Ю.А. Устименко
«09» сентября 2021 г.

**Рабочая программа дисциплины
Б1.О.08.03 Математический анализ**

Направление подготовки: 38.03.01 Экономика
Направленность (профиль): Финансы и кредит
Форма обучения – очная
Курс – 1
Семестр – 1, 2
Всего зачетных единиц – 5; всего часов – 180

Форма отчетности: зачет – 1 семестр, экзамен – 2 семестр.

Программу разработал:
кандидат физико-математических наук Перельман Н.Р.

Одобрена на заседании кафедры аналитических и цифровых технологий
«31» августа 2021 года, протокол № 1

Смоленск
2021

1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Математический анализ» относится к базовой части образовательной программы по направлению подготовки 38.03.01 Экономика, направленность (профиль): Финансы и кредит.

Обучение происходит в первом и втором семестрах. Освоение данной дисциплины необходимо для дальнейшего изучения таких дисциплин как теория вероятностей и математическая статистика, методы оптимальных решений и элементы теории игр, математическая экономика и основы финансовой математики и др.

Изучение курса основано на традиционных методах отечественной высшей школы, тесной взаимосвязи со смежными курсами, а также на использовании как современной учебной и методической литературы, так и классических изданий.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения <i>(в соответствии с разделом 7 общей характеристики ОП ВО)</i>
ОПК-2: Способен осуществлять сбор, обработку и статистический анализ данных, необходимых для решения поставленных экономических задач	<p>Знать: методы сбора, передачи, анализа, хранения статистической информации, а также математические и статистические показатели, необходимые для решения поставленных экономических задач; основы математического анализа, линейной алгебры, теории вероятностей и математической статистики, необходимые для проведения, обработки и анализа финансово-экономических расчетов.</p> <p>Уметь: применять методы сбора, передачи, анализа, хранения статистической информации, а также математические и статистические показатели, необходимые для решения поставленных экономических задач; применять методы математического анализа, линейной алгебры, теории вероятностей, математической статистики для обработки экономических данных, анализировать результаты расчетов и обосновывать полученные выводы при решении экономических задач.</p> <p>Владеть: методами сбора, передачи, анализа, хранения статистической информации, а также методикой применения математических и статистических показателей, необходимых для решения поставленных экономических задач; навыками применения современного математического инструментария и информационных технологий для решения экономических задач, а также методикой построения, анализа и применения математических моделей для оценки состояния и прогноза развития экономических явлений и процессов.</p>

3. Содержание дисциплины

- 1. Введение в анализ.** Понятие множества и операции над множествами. Понятие функции одной переменной и ее свойства. Графики основных элементарных функций. Предел числовой последовательности и его свойства. Предел и непрерывность функции. Точки разрыва функции. Глобальные свойства непрерывных функций.
- 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной.** Производная и дифференциал функции одной переменной. Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя. Исследование функций с помощью производной и построение их графиков. Асимптоты.
- 3. Интегральное исчисление функций одной переменной.** Неопределенный интеграл. Методы интегрирования. Определенный интеграл и его вычисление. Несобственные интегралы.
- 4. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.** Понятие функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции нескольких переменных. Частные производные. Дифференцируемость и дифференциал функции двух переменных. Экстремум функции двух переменных.
- 5. Дифференциальные уравнения.** Дифференциальные уравнения первого порядка (уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, линейные уравнения). Дифференциальные уравнения второго порядка. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.
- 6. Ряды.** Понятие числового ряда. Сходящиеся и расходящиеся числовые ряды. Свойства числовых рядов. Положительные ряды. Признаки сходимости положительных рядов. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница. Понятие функционального ряда. Область сходимости и равномерная сходимость функционального ряда. Степенные ряды. Теорема Абеля. Разложение основных элементарных функций в степенной ряд.

4. Тематический план

1 семестр

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий			
			Лекции	Лабор. занятия	Практические занятия	Самостоятельная работа
1	Введение в анализ	38	6	0	12	20
2	Дифференциальное исчисление функций одной переменной	34	12	0	6	16
Всего за семестр		72	18	0	18	36

2 семестр

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий			
			Лекции	Лабор. занятия	Практические занятия	Самостоятельная работа
1	Интегральное исчисление функций одной переменной	27	6	0	16	5
2	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	19	6	0	8	5
3	Дифференциальные уравнения	18	5	0	8	5
3	Ряды	17	0	0	2	15
Экзамен		27				27

Всего за семестр	108	17		34	57
ИТОГО	180	40	0	78	66

5. Виды образовательной деятельности

Занятия лекционного типа

1 семестр

Тема 1. Введение в анализ

Лекция № 1. Понятие множества и операции над множествами и их свойства. Функциональная зависимость. Понятие функции одной переменной и ее свойства.

Лекция № 2. Предел числовой последовательности и его свойства. Теорема о единственности предела последовательности. Бесконечно малые последовательности и их свойства. Теорема об арифметических действиях над последовательностями и их пределами. Предел функции в точке и на бесконечности. Определение предела функции в точке по Коши и по Гейне. Теоремы о пределах функции в точке. Предел функции на бесконечности и бесконечные пределы. Замечательные пределы. Бесконечно малые функции в точке. Эквивалентные бесконечно малые.

Лекция № 3. Непрерывность функции. Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва. Свойства функций непрерывных на отрезке.

Тема 2. Дифференциальное исчисление функций одной переменной

Лекция № 4. Производная и дифференциал функции одной переменной. Геометрический смысл производной.

Лекция № 5. Применение дифференциалы к приближенным вычислениям. Правила вычисления производных. Основные теоремы дифференциального исчисления. Теоремы Ферма, Ролля и Лагранжа. Правило Лопиталя.

Лекция № 6-7. Экстремумы функций. Исследование функции на монотонность с помощью производной. Наибольшее и наименьшее значение функции. Выпуклость графика функции. Асимптоты.

Лекция № 8-9. Исследование функций с помощью производной и построение их графиков.

2 семестр

Тема 1. Интегральное исчисление функций одной переменной

Лекция № 1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства. Метод замены переменной и интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка.

Лекция № 2. Определенный интеграл и его свойства. Геометрический смысл. Метод замены переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.

Лекция № 3. Геометрические и экономические приложения определенного интеграла. Несобственные интегралы и их вычисление.

Тема 2. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Лекция № 4. Понятие функции нескольких переменных. Область определения функции. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.

Лекция № 5. Частные производные. Дифференцируемость и дифференциал функции двух переменных. Необходимые условия дифференцируемости. Достаточное условие дифференцируемости.

Лекция № 6. Полный дифференциал функции двух переменных и его применение в приближенных вычислениях. Экстремум функции двух переменных. Условный экстремум

функции двух переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных в замкнутой области.

Тема 3. Дифференциальные уравнения

Лекция № 7. Понятие обыкновенного дифференциального уравнения и его решения. Дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Лекция № 8. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающих понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка и свойства их решений. Теорема о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка. Теорема о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка.

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов поиска частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка по виду его правой части.

Занятия семинарского типа (Практические занятия):

1 семестр

Занятие 1. Множества и операции над ними. Числовые множества

Теоретические вопросы

1. Какие множества называются равными?
2. Как можно задать множество? Приведите примеры.
3. Дайте определение объединения, пересечения, разности и симметрической разности множеств. Перечислите свойства этих операций.
4. Что называется подмножеством данного множества?
5. Что называется числовым множеством? Назовите основные числовые множества.
6. Дайте определение модуля действительного числа. В чем заключается геометрическое свойство модуля?
7. Какое числовое множество называется ограниченным? Дайте определения верхней и нижней граней, точных верхней и нижней граней.
8. Сформулируйте аксиому непрерывности действительных чисел. Какое свойство ограниченных множеств из нее следует?

Задачи и упражнения

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, если
 - а) $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$;
 - б) $A = (-3; 2]$, $B = [1; 2)$;
 - в) $A = [0; 2]$, $B = \{1; 3\}$;
 - г) $A = \{x \mid x = t^2 + t, t \in \mathbb{R}\}$, $B = \{2\}$.
2. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна множества четырехугольников: U – множество всех четырехугольников, P – параллелограммов, R – ромбов, L – прямоугольников, K – квадратов, T – трапеций, W – равнобоких трапеций, O – описанных выпуклых четырехугольников.
3. С помощью диаграмм Эйлера-Венна покажите, что
 - а) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
 - б) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
4. Решите уравнения:
 - а) $|x - 3| = 2$;
 - б) $|3x + 1| = x$;
 - в) $|x^2 - x - 2| = 2 + x - x^2$.
5. Решите неравенства:

а) $|x + 2| < 3$; б) $|2x - 1| \geq 1$; в) $|x - 3| + |x + 4| < 5$.

6. Для точек $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$ укажите две каких-либо окрестности, одна из которых содержит точку $x_0 = 1$, а другая не содержит эту точку. Задайте эти окрестности в виде неравенств с модулями.

7. Является ли множество A ограниченным сверху? снизу? ограниченным? Укажите точные верхние и нижние грани.

а) $A = \{1, 2, 3, 4\}$; б) $A = (-3; 2]$; в) $A = [0; 2]$;

г) $A = \{x | x = 2t^2 + 1, t \in R\}$; д) $A = (1; 2] \cup [3; 4)$.

Домашнее задание

1. Найдите $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \Delta B$, если

а) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 5\}$; б) $A = [-1; 3]$, $B = [-1; 3]$;

в) $A = [0; 2]$, $B = \{0; 2\}$; г) $A = \{x | x = t^2 - t, t \in Z\}$, $B = \{2; 3\}$.

2. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна множества треугольников: A – множество всех треугольников, B – остроугольных, C – прямоугольных, D – тупоугольных, E – равнобедренных, F – равносторонних.

3. Найдите пересечение множества четных чисел и множества чисел, кратных трем.

4. Решите уравнения:

а) $|3x - 3| = -2$; б) $|3 - x| = 2$; в) $|x^2 + x| = x^2 + x$.

5. Решите неравенства:

а) $|2x + 3| < 1$; б) $|2x - 1| \geq -1$; в) $|x - 1| - |x + 1| < 3$.

Занятие 2. Понятие функции. Основные свойства функций. Функциональные зависимости в экономике

Теоретические вопросы

1. Что называется числовой функцией? Перечислите основные способы задания функции.
2. Что называется графиком функции.
3. Дайте определение ограниченной (неограниченной) функции. Приведите примеры.
4. Дайте определение возрастающей (убывающей) на промежутке функции. Приведите примеры.
5. Сформулируйте определение четной (нечетной) функции. Приведите примеры. Какова специфика графиков четных и нечетных функций?
6. Какая функция называется периодической. Приведите примеры.
7. Какие функции называются основными элементарными функциями? Какими свойствами обладает каждая из них?
8. Какие функции называются взаимно обратными? Приведите примеры. Какова специфика расположения графиков взаимно обратных функций?

Задачи и упражнения

1. Найдите область определения функций:

а) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 5x}}$; б) $f(x) = \frac{\log_2 x^3}{x - 2}$; в) $f(x) = \arccos(1 - x^2)$.

2. Изобразите графики функций и перечислите основные свойства функций:

а) $f(x) = \frac{x}{x + 1}$; б) $f(x) = 3^{|x-1|}$; в) $f(x) = 1 - \ln(x + 1)$.

3. Найдите множество значений функции. Укажите, какие из функций являются четными, нечетными, периодическими.

а) $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$; б) $f(x) = 4 \sin 2x$; в) $f(x) = 2 \cos^2 x$.

2. Пользуясь определением предела, докажите, что

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+1} = \frac{2}{3}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{2^n + 1} = 1.$$

3. Вычислите предел последовательности:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 1}{4n^2 + 2n - 1}; & \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n + 1}{3n^3 - 1}; & \quad \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n^3}{n^2 + 5n + 6}; \\ \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n^2)^{10}}{(1+2n^{10})^2}; & \quad \text{д) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} - 1}{n + 2}; & \quad \text{е) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}; \\ \text{ж) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n - \sin n}{5^n + \cos n}; & \quad \text{з) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 - n} \right). \end{aligned}$$

Домашнее задание

1. Пользуясь определением предела, докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{2n} = \frac{1}{2}$.

2. Вычислите предел последовательности:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 1}{n^3 + n^2 - n}; & \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 4n - 1}{3n - 1}; & \quad \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 1}{n^3 + 2}; \\ \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n^2)^{10}}{(1+n^6)(1-n^2)^2}; & \quad \text{д) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 3n - n} \right); & \quad \text{е) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{n+1} - \frac{2^n}{3^{n+1}} \right). \end{aligned}$$

Занятие 4. Вычисление пределов числовых последовательностей

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте теоремы Вейерштрасса о пределе ограниченной и монотонной последовательности.
2. Сформулируйте теорему о пределе промежуточной последовательности.
3. Сходится ли последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$? Чему равен ее предел?
4. Дайте определение подпоследовательности последовательности x_n . Каким свойством обладает любая подпоследовательность сходящейся последовательности x_n ?
5. Как с помощью подпоследовательностей можно доказать расходимость последовательности?

Задачи и упражнения

1. Вычислите предел последовательности:

$$\begin{aligned} \text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n; & \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+3}\right)^{2n+1}; & \quad \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+2n}\right)^{n^2-n}; \\ \text{г) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+n)^3 + (1-n)^3}{(1-n)^2 + (1+n)^2}; & \quad \text{д) } \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\sqrt[3]{5+n^3} - \sqrt[3]{3+n^3} \right). \end{aligned}$$

2. Докажите, что последовательность не имеет предел:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1}; \quad \text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\pi n); \quad \text{в) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (-1)^{n-1}}{0,2^n}.$$

3. В банк сделан вклад A рублей при доходности p процентов годовых. Начисление процентов производится ежемесячно. Задайте формулой последовательность x_n – величина вклада через n месяцев, при условии, что:

- а) проценты по вкладу ежемесячно перечисляются на другой счет (простые проценты);

б) проценты по вкладу ежемесячно зачисляются на счет вклада, т.е. капитализируются (сложные проценты).

Какая при этом получается прибыль в каждом случае? Во сколько раз можно увеличить начальную сумму A при долгосрочном вложении ($n \rightarrow \infty$)?

Домашнее задание

1. Вычислите предел последовательности:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^n$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n-1}{3n+1}\right)^{2n}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}\right)$.

2. Имеет ли предел последовательность

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(\pi n)}{2n+1}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{n+1}{n}\right)^n$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0,2^n}{1 + \operatorname{tg}^2 n}$?

Занятие 5. Предел функции в точке и на бесконечности. Замечательные пределы

Теоретические вопросы

1. Дайте определение предела функции в точке на языке « $\varepsilon - \delta$ » (по Коши).
2. Сформулируйте определение предела функции в точке на языке последовательностей (по Гейне).
3. Перечислите основные свойства функции, имеющей предел в точке.
4. Дайте определение записям: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
5. Какие пределы называют замечательными?
6. Дайте определение бесконечно малой функции в точке. Какие две бесконечно малые функции в точке называются эквивалентными? Приведите примеры.

Задачи и упражнения

1. Пользуясь определением предела функции в точке по Коши, докажите, что $\lim_{x \rightarrow 1} (3x - 4) = -1$.

2. Вычислите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x - 3}$; б) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x - 2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x^2 - x} - x}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2^{-x} + \sqrt{x^2 + 1} - x\right)$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x}{x^2 - x}\right)^x$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x+1}\right)^{\frac{1}{2x}}$.

3. Докажите, что функция $y = 2^{\frac{1}{x}}$ не имеет предела в точке $x = 0$.

4. Пользуясь понятием эквивалентных бесконечно малых функций, вычислите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{tg} 10x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x^2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{e^x - 1}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt[3]{x+1} - 1}$; д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - \operatorname{tg} x}{\ln(1+x)}$; е) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(x - \pi/6)}{\sqrt{3}/2 - \cos x}$.

Домашнее задание

1. Вычислите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 6x}{2x + 4}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 6x}{2x - 4}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 6x + 4}{3x^2 - x - 2}$;
 г) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x} - x}{x - 2}$; д) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{1/x}$;

$$\text{ж) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin^2 x}{1 - \cos x^2}; \quad \text{з) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{\sqrt{x^4 + x^2} - x^2}; \quad \text{и) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{1 - \cos x}.$$

2. Докажите, что функция $y = \sin x$ не имеет предела при $x \rightarrow \infty$.

Занятие 6. Непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва функции. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теоретические вопросы

1. Дайте определение непрерывной функции в точке.
2. Сформулируйте определение точки разрыва функции. Какова классификация точек разрыва функции?
3. Какая функция называется непрерывной в интервале? На отрезке?
4. Сформулируйте теоремы о свойствах функций, непрерывных на отрезке.

Задачи и упражнения

1. Исследуйте функцию на непрерывность и схематично постройте ее график:

$$\text{а) } y = \frac{|x|}{x};$$

$$\text{б) } y = \frac{x^2 - 1}{x - 1};$$

$$\text{в) } y = \begin{cases} -x^2 + 3x, & \text{при } x < 0, \\ \frac{x+1}{x}, & \text{при } x > 0; \end{cases}$$

$$\text{г) } y = \begin{cases} \frac{1}{x^2}, & \text{при } x < 0, \\ 2x - 1, & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ 2^{x-1}, & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

2. Приведите пример функции, определенной на отрезке $[-1; 1]$, но не являющейся ограниченной на нем.

3. Можно ли утверждать уравнение, что уравнение $p(x) = 0$ имеет корень на отрезке $[0; 1]$? Ответ обоснуйте.

$$\text{а) } p(x) = x^3 + 2x - 2; \quad \text{б) } p(x) = \sqrt[3]{x} + 2e^{x-1} - 2; \quad \text{в) } p(x) = \frac{|2x-1|}{2x-1};$$

4. Приведите пример функции, определенной на отрезке $[-1; 1]$, множеством значений которой является:

$$\text{а) } \text{отрезок } [0; 2]; \quad \text{б) } \text{промежуток } (0; 2); \quad \text{в) } \text{множество } [0; 1] \cup [2; 3];$$

Домашнее задание

1. Исследуйте функцию на непрерывность и схематично постройте ее график:

$$\text{а) } y = x - |x|; \quad \text{б) } y = 3^{\frac{1}{x}}; \quad \text{в) } y = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{при } x < 0, \\ x^2 + 1, & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ \ln x, & \text{при } x \geq 1. \end{cases}$$

2. Докажите, что функция $y = \frac{\sin(x^2 - 5x)}{e^{1/x}}$ является ограниченной на отрезке $[1; 10]$.

3. Докажите что уравнение $\sqrt[4]{x+1} - x^3 + 10 = 0$ имеет хотя бы один корень.

Занятия 7. Производная функции в точке. Правила дифференцирования. Производные высших порядков

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение производной функции в точке.
2. Какова связь между существованием производной функции в точке и ее непрерывностью в этой точке?
3. Перечислите основные правила дифференцирования функций.
4. Сформулируйте теорему о производной сложной функции.
5. Дайте определение дифференцируемой функции в точке. Какова связь между дифференцируемостью функции в точке и существованием ее производной функции в этой точке?
6. Дайте определение производной n -го порядка функции.

Задачи и упражнения

1. Пользуясь определением, найдите $f'(1)$, если $f(x) = x^2 - 3x$.
2. Найдите производную функции:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } y = (x^2 - x) \ln x; & \text{б) } y = x^3 \sin x - 3\sqrt{x}; & \text{в) } y = \frac{x^2 + 2x}{x^3 - 1}; \\ \text{г) } y = e^{-x^2 + \cos x}; & \text{д) } y = \operatorname{tg}(x^2 + \sqrt[3]{x}); & \text{е) } y = \sin(\ln x^2). \end{array}$$

3. Функция общей полезности потребления некоторого блага имеет вид: $TU = 2q^3 - q^2 + 10q + \sqrt{q} + 2$, где q – объем потребления блага. Определите предельную полезность 9 единиц этого блага.

4. Напишите уравнения касательных к графику функции $y = 4x - x^2$ в точках пересечения с осями координат.

5. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;2)$ перпендикулярно касательной к графику функции $y = x^2 - xe^x$, проведенной в точке с абсциссой $x_0 = 0$.

6. Найдите дифференциал функции:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } y = x^3 - 2x^2; & \text{б) } y = \frac{x^2 \cdot 2^x}{x+1}; & \text{в) } y = \operatorname{ctg} x^2 + \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x^2. \end{array}$$

7. Найдите производные второго порядка функции:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = (x^2 + 2x) \ln x; & \text{б) } y = \frac{x^2 - x + \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}}; \text{в) } y = e^{-\frac{x^2}{2}}. \end{array}$$

Домашнее задание

1. Найдите производную функции:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } y = \sqrt[3]{x^2} - x \ln x^2; & \text{б) } y = x \sin \sqrt{x}; & \text{в) } y = \frac{x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}; \\ \text{г) } y = \sqrt{x} \arcsin x; & \text{д) } y = (x - \sqrt{x})^{10}; & \text{е) } y = \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{x}. \end{array}$$

2. Напишите уравнения касательных к графику функции $y = 2x^3 + x - 1$, параллельных прямой $y = 7x$.

3. Найдите дифференциал функции:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } y = 2x^5 - 10x; & \text{б) } y = \operatorname{arctg} 2x; & \text{в) } y = x - \arccos x. \end{array}$$

5. Найдите производные второго порядка функции:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } y = x \ln x^2; & \text{б) } y = \frac{\sin x}{x}; & \text{в) } y = xe^{-x}. \end{array}$$

Занятие 8. Геометрический смысл производной. Дифференциал функции и его применение.

Теоретические вопросы

1. В чем заключается геометрический (экономический) смысл производной?
2. Дайте определение дифференциала функции в точке. Как понятие дифференциала функции можно использовать при приближенном вычислении значения функции?

Задачи и упражнения

1. Составьте уравнения касательных к кривым и постройте кривые и касательные:

а) $y = \frac{x^3}{3}$ в точке $x = -1$; б) $y = \frac{8}{4 + x^2}$ в точке $x = 2$; в) $y^2 = 4 - x$ в точке

$x = 3$.

2. Найдите угол между линиями $2y = x^2$ и $2y = 8 - x^2$.
3. Найдите полное приращение функции $y = 2x^3 + 3x^2 + 6x$ и ее дифференциал. Сравните их значения при $x = 1$.
4. Найдите дифференциал функции $y = \cos^3 2x$.
5. Вычислите приближенно с помощью дифференциала $\sqrt[3]{8,05}$.

Домашнее задание

1. Составьте уравнения касательных к кривым и постройте кривые и касательные:

а) $y = \frac{4}{x}$ в точках $x = -1$ и $x = 4$; б) $y = 4x - x^2$ в точках пересечения с осью Ox .

2. Найдите дифференциал функции $y = 3^{-x^3}$.
3. Найдите с помощью дифференциала приближенное значение выражения $\ln 0,98$.

Занятие 9. Основные теоремы дифференциального исчисления. Исследование функций с помощью производной

Теоретические вопросы

3. Сформулируйте теоремы Ферма, Ролля и Лагранжа.
4. Сформулируйте правило Лопиталья вычисления пределов функции.
5. Дайте определение точки локального максимума (минимума). Какие точки могут быть точками экстремума функции?
6. Сформулируйте определение возрастающей (убывающей) функции на промежутке. Как с помощью производной можно определить промежутки монотонности функции?
7. В каком случае говорят, что график функции является выпуклым вверх (вниз) на промежутке? Что называется точкой перегиба графика функции?
8. Дайте определение асимптоты графика функции? Как найти вертикальные (наклонные) асимптоты?
9. Назовите общую схему исследования функции.

Задачи и упражнения

1. Выясните, выполняется ли для функции $y = x^2 - 4x + 3$:

а) теорема Роля на отрезке $[0; 4]$;

б) теорема Лагранжа на отрезке $[-1; 5]$.

2. Вычислите с помощью правила Лопиталья пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x$.

3. Исследуйте функцию $y = xe^{-x^2}$ на экстремум, определите промежутки монотонности и схематично изобразите ее график.
4. Найдите точки перегиба графика $y = x(x - 1)^3$ и определите промежутки, на которых график функции является выпуклым вверх (вниз).

5. Найдите асимптоты графика функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.
6. Проведите полное исследование функции и постройте ее график:
- а) $y = x^2 \ln x$; б) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

Домашнее задание

1. Вычислите с помощью правила Лопиталя пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 x}{x + 1 - e^x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$.

2. Исследуйте функцию $y = (x^2 + x) \ln x$ на экстремум, монотонность, определите промежутки на которых график функции является выпуклым вверх (вниз). Схематично изобразите ее график.
3. Найдите асимптоты графика функции $y = \frac{2x^2 - 1}{x + 1}$.
4. Проведите полное исследование функции $y = xe^{-2x}$ и постройте ее график.

Занятие 11. Применение дифференциального исчисления в экономике. Задачи на оптимизацию.

Теоретические вопросы

1. Как с помощью производной можно найти наименьшее (наибольшее) значение функции на отрезке? На промежутке, не являющимся отрезком?

Задачи и упражнения

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $y = 3x^2 \ln x, x \in [1; e]$ б) $y = \sqrt{\frac{1+x}{\ln x}}, x \in (1; e]$.

2. Если собрать урожай в начале августа, то с каждой сотки можно получить 200 кг раннего картофеля и реализовать его по 12 руб./кг. Отсрочка уборки на каждую неделю ведет к увеличению урожайности на 50 кг с одной сотки, но цена картофеля при этом падает на 2 руб./кг. Когда следует собрать картофель, чтобы доход от его продажи был максимален, если срок уборки составляет 5 недель?

3. Объем продукции q в течении рабочего дня представляет функция $q = -\frac{4}{3}t^3 + 20t^2 + 90t$, где $0 \leq t \leq 8$. Найдите производительность труда через два часа

после начала работы. В какой момент времени производительность труда максимальна?

4. Издержки производства некоторого товара равны $TC = 4 + 15Q$, спрос на товар определяется функцией $P = -Q^2 + 20Q + 2, 10 < Q < 20$. Найдите объем продукции Q , максимизирующий прибыль.

Домашнее задание

1. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $y = 3x^2 - x\sqrt{x}, x \in [0; 1]$ б) $y = x - 2 \ln x$.

2. На странице текст должен занимать 384 см². Верхнее и нижнее поля должны быть по 3 см, левое и правое – по 2 см. Если принимать во внимание только экономию бумаги, то каковы должны быть наиболее выгодные размеры страницы?

3. В некоторой стране при изучении потребительского спроса на малоценные товары была получена функция Торнквиста $x = \frac{2J(J+3)}{J^2+1}$. Определите доходы группы населения

этой страны, для которых спрос на малоценные товары самый высокий.

4. Фирме «Альфа» поступило предложение выполнить заказ на производство некоторой продукции объема q . Известно, что функция дохода фирмы при выполнении этого заказа $R(q) = q^2 - q + 11$; функция издержек производства – $C(q) = 5q + 1$. При каких объемах производства q фирме имеет смысл браться за выполнение данного заказа?

Занятие 12. Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование и интегрирование методом замены

Теоретические вопросы

1. Что называется первообразной функции $y = f(x)$ на промежутке?
2. Дайте определение неопределенного интеграла.
3. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла.
4. Сформулируйте теорему о замене переменной в неопределенном интеграле. Приведите примеры.
5. Чему равен интеграл $\int f(kx+b) dx$, где k и b – некоторые числа, $k \neq 0$, если известно, что $\int f(x) dx = F(x) + C$, C – произвольная постоянная.

Задачи и упражнения

1. Найдите неопределенные интегралы:

а) $\int (2x^2 - x + 3\sqrt{x}) dx;$	б) $\int \frac{(x-1)^2}{x^3} dx;$	в) $\int \frac{2x}{x+3} dx;$
г) $\int \left(2\sin x - \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx;$	д) $\int \frac{e^x - 1}{e^{2x}} dx;$	е) $\int \operatorname{tg}^2 x dx;$
ж) $\int \frac{dx}{x^2 - 16};$	з) $\int \frac{dx}{x^2 + 16};$	и) $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}};$
к) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 16}};$	л) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16}};$	м) $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 2x^2}}.$

2. Заполните пропуски так, чтобы получились верные равенства:

а) $x dx = d(\dots);$	б) $d(\cos x) = (\dots) dx;$	в) $(\dots) dx = d(x^2 + 1);$
г) $d(\dots) = e^x dx;$	д) $d(\operatorname{tg} x) = (\dots) dx;$	е) $\frac{dx}{x} = d(\dots).$

3. Найдите неопределенные интегралы методом внесения под знак дифференциала или методом замены:

а) $\int 2\cos(3x-1) dx;$	б) $\int \frac{2x+3}{3x-1} dx;$	в) $\int \frac{2x}{x^2+3} dx;$
г) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-3}} dx;$	д) $\int x e^{-x^2} dx;$	е) $\int \frac{dx}{x^2+4x+8};$
ж) $\int \frac{dx}{x^2+4x-8};$	з) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+8x}};$	и) $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}.$

Домашнее задание

1. Найдите неопределенные интегралы:

а) $\int x^4(3-x) dx;$	б) $\int \frac{(\sqrt{x}-x)^2}{x} dx;$	в) $\int \frac{2x}{x+3} dx;$
г) $\int \frac{1}{x^2} \cdot e^x dx;$	д) $\int x \sin(x^2) dx;$	е) $\int \frac{dx}{x^2-6x+10};$
ж) $\int \frac{dx}{x^2+6x-8};$	з) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-8x}};$	и) $\int \frac{dx}{\sqrt{8x-4x^2}};$
к) $\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2-x+2}};$	л) $\int \frac{(1-x)dx}{\sqrt{x^2+x}};$	м) $\int \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1+x^2}.$

Занятие 13. Интегрирование по частям. Интегрирование рациональных дробей

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте теорему об интегрировании по частям.
2. В каких случаях можно использовать метод интегрирования по частям? Что в этих случаях нужно принимать за функциональную, а что за дифференциальную часть?
3. Сформулируйте алгоритм интегрирования рациональной дроби?

Задачи и упражнения

1. Найдите неопределенные интегралы методом интегрирования по частям:

а) $\int x \ln x dx;$	б) $\int x e^{2x} dx;$	в) $\int \arcsin x dx;$
г) $\int x^2 \sin 3x dx;$	д) $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx;$	е) $\int \sqrt{16-x^2} dx.$

2. Найдите неопределенные интегралы от рациональных дробей:

а) $\int \frac{2x^2-x}{x^2+1} dx;$	б) $\int \frac{x^3}{x+1} dx;$	в) $\int \frac{dx}{x^2+2x};$
г) $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+5} dx;$	д) $\int \frac{dx}{x^2(x-1)};$	е) $\int \frac{x^2+x}{x^3+1} dx.$

Домашнее задание

1. Найдите неопределенные интегралы:

а) $\int x \cos 2x dx;$	б) $\int \ln^2 x dx;$	в) $\int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} dx;$
г) $\int \frac{x-3}{x^2+1} dx;$	д) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2};$	е) $\int \frac{2x^2-x}{x^2+1} dx.$

Занятие 14. Интегрирование тригонометрических функций и некоторых иррациональностей

Теоретические вопросы

1. Какие приемы интегрирования тригонометрических функций Вам известны?
2. Что называется универсальной тригонометрической подстановкой? Приведите примеры.
3. Какие виды иррациональностей и методы их интегрирования Вам известны?

Задачи и упражнения

1. Найдите неопределенные интегралы:

а) $\int \sin^2 3x dx;$	б) $\int \sin x \cos^3 x dx;$	в) $\int \sin 2x \cos 3x dx.$
-------------------------	-------------------------------	-------------------------------

2. Найдите неопределенные интегралы с помощью универсальной тригонометрической подстановки:

$$\text{a) } \int \frac{dx}{3+5\cos x}; \quad \text{б) } \int \frac{\sin x}{1-\sin x} dx.$$

3. Найдите неопределенные интегралы:

$$\text{a) } \int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Домашнее задание

1. Найдите неопределенные интегралы:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx; & \quad \text{б) } \int \sin 2x \sin 6x dx; & \quad \text{в) } \int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx; \\ \text{г) } \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+1}} dx; & \quad \text{д) } \int \sqrt{9-x^2} dx; & \quad \text{е) } \int \frac{dx}{x\sqrt{2x-x^2}}. \end{aligned}$$

Занятие 15. Определенный интеграл и его вычисление

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение определенного интеграла функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.
2. Назовите основные свойства определенного интеграла?
3. Как можно вычислить определенный интеграл при помощи формулы Ньютона-Лейбница?
4. Сформулируйте теоремы о замене переменной и об интегрировании по частям в определенном интеграле.

Задачи и упражнения

1. Вычислите определенные интегралы:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_1^4 (3x^2 - 2x + 2\sqrt{x}) dx; & \quad \text{б) } \int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x} dx; & \quad \text{в) } \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx; \\ \text{г) } \int_0^{\pi/4} \left(2\sin x - \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx; & \quad \text{д) } \int_0^1 \frac{e^{2x} + 1}{e^x} dx; & \quad \text{е) } \int_{-\pi/6}^{\pi/3} \cos^2 3x dx; \\ \text{ж) } \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 9}; & \quad \text{з) } \int_0^{\pi} \frac{dx}{x^2 + 9}; & \quad \text{и) } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}. \end{aligned}$$

2. Вычислите определенные интегралы методом замены или при помощи интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int_3^8 \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} dx; & \quad \text{б) } \int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}}; & \quad \text{в) } \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx; \\ \text{г) } \int_1^2 x \operatorname{arctg} 3x dx; & \quad \text{д) } \int_1^5 \frac{x-1}{x(x+1)} dx; & \quad \text{е) } \int_{-2}^0 \frac{x^3}{x^3 - x + 2} dx. \end{aligned}$$

Домашнее задание

1. Вычислите определенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int_{-1}^3 (3x^2 - 2x + 5) dx; & \text{б) } \int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx; & \text{в) } \int_0^{\pi/2} \cos 3x dx; \\ \text{г) } \int_1^9 \frac{x^2}{\sqrt{x}+1} dx; & \text{д) } \int_1^2 (x-1) \sin 2x dx; & \text{е) } \int_2^3 \frac{x-1}{x^2(x-1)} dx. \end{array}$$

Занятие 16. Геометрические и экономические приложения определенного интеграла

Теоретические вопросы

1. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
2. Какие экономические приложения определенного интеграла Вам известны?

Задачи и упражнения

1. Вычислите площади фигур, ограниченные линиями:

$$\text{а) } y = 4 - x^2, \quad y = 0; \quad \text{б) } y = \sin \frac{x}{2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \pi;$$

$$\text{в) } y = x^2 + 4x, \quad y = x + 4; \quad \text{г) } y = x^3 - x^2, \quad y = x^3 + x.$$

2. Производительность труда рабочего в течении одного дня задается функцией $y = -0,00625t^2 + 0,05t + 0,5$ ден. ед./ч, $0 \leq t \leq 8$. Найдите объем продукции Q (в стоимостном выражении), произведенной за смену рабочим.

3. Кривая спроса на некоторый товар описывается уравнением $q = \frac{20}{p} - 2$, а кривая пред-

ложения – уравнением $s = p - 1$. Найдите излишек потребителя. Указание: излишек потребителя – разница между ценой, которую потребитель готов заплатить за товар, и той, которую он действительно платит при покупке (равновесной ценой); численно равен площади фигуры, ограниченной кривой спроса, прямой равновесной цены и осью цены.

4. По данным исследования в распределении доходов страны кривая Лоренца, показывающая неравномерность распределения доходов, имеет вид $y = x^{1,5}$, где x – доля населения, y – доля доходов населения. Найдите коэффициент Джини неравномерности распределения доходов.

5. Определите дисконтированный доход за 5 лет при процентной ставке 10%, если первоначальное вложение составило 5 млн. руб. и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на 2 млн. руб.

Домашнее задание

1. Вычислите площади фигур, ограниченные линиями:

$$\text{а) } y = \ln x, \quad y = 0, \quad x = e; \quad \text{б) } y = x^2 + 5x, \quad y = -x^2 + x + 6.$$

2. Определите объем выпуска продукции при производительности труда $g(t) = 11te^{-0,5t}$ за первые пять часов работы.

3. Кривая спроса на некоторый товар описывается уравнением $q = 50 - 2p$, а кривая предложения – уравнением $s = 5 + 3p$. Найдите излишек потребителя.

Занятие 17. Несобственные интегралы

Теоретические вопросы

1. Дайте определение несобственного интеграла I-го рода. В каком случае он называется сходящимся?
2. Сформулируйте определение несобственного интеграла II-го рода.
3. Сформулируйте признаки сходимости несобственных интегралов.

Задачи и упражнения

1. Вычислить несобственные интегралы I-го рода или установить их расходимость:

а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$;	б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$;	в) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x dx}{x^2+1}$;
г) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$;	д) $\int_0^{+\infty} x \sin x dx$;	е) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$.

2. Исследовать сходимость несобственных интегралов II-го рода:

а) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$;	б) $\int_0^1 x \ln x dx$;	в) $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$;
г) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;	д) $\int_0^{\pi/2} \tg x dx$;	е) $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$.

Домашнее задание

1. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$;	б) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$;	в) $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^2+1}$;
г) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$;	д) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$;	е) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$.

2 семестр

Занятие 1. Неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование и интегрирование методом замены

Теоретические вопросы

6. Что называется первообразной функции $y = f(x)$ на промежутке?
7. Дайте определение неопределенного интеграла.
8. Сформулируйте основные свойства неопределенного интеграла.
9. Сформулируйте теорему о замене переменной в неопределенном интеграле. Приведите примеры.
10. Чему равен интеграл $\int f(kx+b) dx$, где k и b – некоторые числа, $k \neq 0$, если известно, что $\int f(x) dx = F(x) + C$, C – произвольная постоянная.

Задачи и упражнения

1. Найдите неопределенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int (2x^2 - x + 3\sqrt{x}) dx; & \text{б) } \int \frac{(x-1)^2}{x^3} dx; & \text{в) } \int \frac{2x}{x+3} dx; \\ \text{г) } \int \left(2\sin x - \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx; & \text{д) } \int \frac{e^x - 1}{e^{2x}} dx; & \text{е) } \int \operatorname{tg}^2 x dx; \\ \text{ж) } \int \frac{dx}{x^2 - 16}; & \text{з) } \int \frac{dx}{x^2 + 16}; & \text{и) } \int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}; \\ \text{к) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 16}}; & \text{л) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16}}; & \text{м) } \int \frac{dx}{\sqrt{16 - 2x^2}}. \end{array}$$

2. Заполните пропуски так, чтобы получились верные равенства:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } x dx = d(\dots); & \text{б) } d(\cos x) = (\dots) dx; & \text{в) } (\dots) dx = d(x^2 + 1); \\ \text{г) } d(\dots) = e^x dx; & \text{д) } d(\operatorname{tg} x) = (\dots) dx; & \text{е) } \frac{dx}{x} = d(\dots). \end{array}$$

3. Найдите неопределенные интегралы методом внесения под знак дифференциала или методом замены:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int 2\cos(3x - 1) dx; & \text{б) } \int \frac{2x + 3}{3x - 1} dx; & \text{в) } \int \frac{2x}{x^2 + 3} dx; \\ \text{г) } \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}} dx; & \text{д) } \int x e^{-x^2} dx; & \text{е) } \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 8}; \\ \text{ж) } \int \frac{dx}{x^2 + 4x - 8}; & \text{з) } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 8x}}; & \text{и) } \int \frac{dx}{\sqrt{8x - x^2}}. \end{array}$$

Домашнее задание

1. Найдите неопределенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int x^4(3 - x) dx; & \text{б) } \int \frac{(\sqrt{x} - x)^2}{x} dx; & \text{в) } \int \frac{2x}{x + 3} dx; \\ \text{г) } \int \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} dx; & \text{д) } \int x \sin(x^2) dx; & \text{е) } \int \frac{dx}{x^2 - 6x + 10}; \\ \text{ж) } \int \frac{dx}{x^2 + 6x - 8}; & \text{з) } \int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 8x}}; & \text{и) } \int \frac{dx}{\sqrt{8x - 4x^2}}; \\ \text{к) } \int \frac{(2x - 1) dx}{\sqrt{x^2 - x + 2}}; & \text{л) } \int \frac{(1 - x) dx}{\sqrt{x^2 + x}}; & \text{м) } \int \frac{\operatorname{arctg} x dx}{1 + x^2}. \end{array}$$

Занятие 2-3. Интегрирование по частям. Интегрирование рациональных дробей

Теоретические вопросы

4. Сформулируйте теорему об интегрировании по частям.
5. В каких случаях можно использовать метод интегрирования по частям? Что в этих случаях нужно принимать за функциональную, а что за дифференциальную часть?
6. Сформулируйте алгоритм интегрирования рациональной дроби?

Задачи и упражнения

1. Найдите неопределенные интегралы методом интегрирования по частям:

$$\text{а) } \int x \ln x dx; \quad \text{б) } \int x e^{2x} dx; \quad \text{в) } \int \arcsin x dx;$$

$$\text{г) } \int x^2 \sin 3x \, dx; \quad \text{д) } \int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx; \quad \text{е) } \int \sqrt{16-x^2} \, dx.$$

2. Найдите неопределенные интегралы от рациональных дробей:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int \frac{2x^2 - x}{x^2 + 1} \, dx; & \text{б) } \int \frac{x^3}{x+1} \, dx; & \text{в) } \int \frac{dx}{x^2 + 2x}; \\ \text{г) } \int \frac{2x+3}{x^2 + 2x+5} \, dx; & \text{д) } \int \frac{dx}{x^2(x-1)}; & \text{е) } \int \frac{x^2 + x}{x^3 + 1} \, dx. \end{array}$$

Домашнее задание

1. Найдите неопределенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int x \cos 2x \, dx; & \text{б) } \int \ln^2 x \, dx; & \text{в) } \int \frac{x \sin x}{\cos^2 x} \, dx; \\ \text{г) } \int \frac{x-3}{x^2 + 1} \, dx; & \text{д) } \int \frac{dx}{x(x+1)^2}; & \text{е) } \int \frac{2x^2 - x}{x^2 + 1} \, dx. \end{array}$$

Занятие 4. Интегрирование тригонометрических функций и некоторых иррациональностей

Теоретические вопросы

4. Какие приемы интегрирования тригонометрических функций Вам известны?
5. Что называется универсальной тригонометрической подстановкой? Приведите примеры.
6. Какие виды иррациональностей и методы их интегрирования Вам известны?

Задачи и упражнения

1. Найдите неопределенные интегралы:

$$\text{а) } \int \sin^2 3x \, dx; \quad \text{б) } \int \sin x \cos^3 x \, dx; \quad \text{в) } \int \sin 2x \cos 3x \, dx.$$

2. Найдите неопределенные интегралы с помощью универсальной тригонометрической подстановки:

$$\text{а) } \int \frac{dx}{3 + 5 \cos x}; \quad \text{б) } \int \frac{\sin x}{1 - \sin x} \, dx.$$

3. Найдите неопределенные интегралы:

$$\text{а) } \int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} \, dx; \quad \text{б) } \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+1}}; \quad \text{в) } \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}.$$

Домашнее задание

1. Найдите неопределенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \, dx; & \text{б) } \int \sin 2x \sin 6x \, dx; & \text{в) } \int \frac{\cos x}{1 + \cos x} \, dx; \\ \text{г) } \int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+1}} \, dx; & \text{д) } \int \sqrt{9-x^2} \, dx; & \text{е) } \int \frac{dx}{x\sqrt{2x-x^2}}. \end{array}$$

Занятие 5-6. Определенный интеграл и его вычисление

Теоретические вопросы

5. Сформулируйте определение определенного интеграла функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.
6. Назовите основные свойства определенного интеграла?
7. Как можно вычислить определенный интеграл при помощи формулы Ньютона-Лейбница?

8. Сформулируйте теоремы о замене переменной и об интегрировании по частям в определенном интеграле.

Задачи и упражнения

1. Вычислите определенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int_1^4 (3x^2 - 2x + 2\sqrt{x}) dx; & \text{б) } \int_1^2 \frac{(x+1)^2}{x} dx; & \text{в) } \int_0^{\pi/2} \sin 2x dx; \\ \text{г) } \int_0^{\pi/4} \left(2\sin x - \frac{3}{\cos^2 x} \right) dx; & \text{д) } \int_0^1 \frac{e^{2x} + 1}{e^x} dx; & \text{е) } \int_{-\pi/6}^{\pi/3} \cos^2 3x dx; \\ \text{ж) } \int_0^1 \frac{dx}{x^2 - 9}; & \text{з) } \int_0^{\pi} \frac{dx}{x^2 + 9}; & \text{и) } \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}. \end{array}$$

2. Вычислите определенные интегралы методом замены или при помощи интегрирования по частям:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int_3^8 \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} dx; & \text{б) } \int_1^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}}; & \text{в) } \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx; \\ \text{г) } \int_1^2 x \operatorname{arctg} 3x dx; & \text{д) } \int_1^5 \frac{x-1}{x(x+1)} dx; & \text{е) } \int_{-2}^0 \frac{x^3}{x^3 - x + 2} dx. \end{array}$$

Домашнее задание

1. Вычислите определенные интегралы:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } \int_{-1}^3 (3x^2 - 2x + 5) dx; & \text{б) } \int_1^4 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx; & \text{в) } \int_0^{\pi/2} \cos 3x dx; \\ \text{г) } \int_1^9 \frac{x^2}{\sqrt{x+1}} dx; & \text{д) } \int_1^2 (x-1) \sin 2x dx; & \text{е) } \int_2^3 \frac{x-1}{x^2(x-1)} dx. \end{array}$$

Занятие 7. Геометрические и экономические приложения определенного интеграла

Теоретические вопросы

3. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
4. Какие экономические приложения определенного интеграла Вам известны?

Задачи и упражнения

1. Вычислите площади фигур, ограниченные линиями:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } y = 4 - x^2, \quad y = 0; & \text{б) } y = \sin \frac{x}{2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = \pi; \\ \text{в) } y = x^2 + 4x, \quad y = x + 4; & \text{г) } y = x^3 - x^2, \quad y = x^3 + x. \end{array}$$

2. Производительность труда рабочего в течении одного дня задается функцией $y = -0,00625t^2 + 0,05t + 0,5$ ден. ед./ч, $0 \leq t \leq 8$. Найдите объем продукции Q (в стоимостном выражении), произведенной за смену рабочим.

3. Кривая спроса на некоторый товар описывается уравнением $q = \frac{20}{p} - 2$, а кривая предложения – уравнением $s = p - 1$. Найдите излишек потребителя. Указание: излишек потребителя – разница между ценой, которую потребитель готов заплатить за товар, и той, которую он действительно платит при покупке (равновесной ценой); численно равен площади фигуры, ограниченной кривой спроса, прямой равновесной цены и осью цены.
4. По данным исследования в распределении доходов страны кривая Лоренца, показывающая неравномерность распределения доходов, имеет вид $y = x^{1,5}$, где x – доля населения, y – доля доходов населения. Найдите коэффициент Джини неравномерности распределения доходов.
5. Определите дисконтированный доход за 5 лет при процентной ставке 10%, если первоначальное вложение составило 5 млн. руб. и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на 2 млн. руб.

Домашнее задание

- Вычислите площади фигур, ограниченные линиями:
 - $y = \ln x$, $y = 0$, $x = e$;
 - $y = x^2 + 5x$, $y = -x^2 + x + 6$.
- Определите объем выпуска продукции при производительности труда $g(t) = 11te^{-0,5t}$ за первые пять часов работы.
- Кривая спроса на некоторый товар описывается уравнением $q = 50 - 2p$, а кривая предложения – уравнением $s = 5 + 3p$. Найдите излишек потребителя.

Занятие 8. Несобственные интегралы

Теоретические вопросы

- Дайте определение несобственного интеграла I-го рода. В каком случае он называется сходящимся?
- Сформулируйте определение несобственного интеграла II-го рода.
- Сформулируйте признаки сходимости несобственных интегралов.

Задачи и упражнения

- Вычислить несобственные интегралы I-го рода или установить их расходимость:

а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$;	б) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$;	в) $\int_1^{+\infty} \frac{\arctg x dx}{x^2+1}$;
г) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$;	д) $\int_0^{+\infty} x \sin x dx$;	е) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$.

- Исследовать сходимость несобственных интегралов II-го рода:

а) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$;	б) $\int_0^1 x \ln x dx$;	в) $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$;
г) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$;	д) $\int_0^{\pi/2} \tg x dx$;	е) $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$.

Домашнее задание

1. Исследовать сходимость несобственных интегралов:

а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$;

б) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}$;

в) $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{x^2+1}$;

г) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$;

д) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$;

е) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$.

Занятие 9. Понятие функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Теоретические вопросы

1. Что называется числовой функцией? Перечислите основные способы задания функции.
2. Дайте определение линии уровня функции.
3. Сформулируйте определения предела функции в точке и непрерывной функции в точке.
4. Что называется областью? Замкнутой областью?
5. Какими свойствами обладают непрерывные функции в замкнутой области?

Задачи и упражнения

1. Изобразите область определения функции:

а) $z = \sqrt{xy}$;

б) $z = \frac{1}{\sqrt{9-x^2-y^2}}$;

в) $z = \arcsin(x+y)$.

2. Постройте линии уровня для значений функции -1; 0; 2:

а) $z = 2x + y$;

б) $z = \frac{x}{y}$;

в) $z = \ln(xy)$.

3. Найдите предел функции:

а) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin 2x \cdot \cos y}{x(y-1)}$;

б) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 1}} \frac{\cos x - 1}{x^2 y}$;

в) $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{(x-1) \cdot y}{(\sqrt{x}-1) \operatorname{tg} y}$.

Домашнее задание

1. Изобразите область определения функции:

а) $z = \sqrt{x+y}$;

б) $z = \ln \frac{1}{x^2 + y^2 - 4}$;

в) $z = \frac{\sqrt{x}}{y^2}$.

2. Постройте линии уровня для значений функции -1; 0; 2:

а) $z = x^2 + y^2 + 3$;

б) $z = x^2 - y$;

в) $z = \frac{y-x^2}{x^2}$.

Занятие 10. Частные производные функции нескольких переменных. Дифференциал

Теоретические вопросы

1. Дайте определение частной производной функции нескольких переменных в точке. Приведите примеры.
2. Сформулируйте определение производной по направлению функции нескольких переменных в точке. Приведите примеры.
3. Что называется градиентом функции в точке? Каков его смысл?
4. Дайте определение дифференцируемой функции нескольких переменных в точке. Сформулируйте свойства дифференцируемых функций в точке.

5. Что называется дифференциалом функции нескольких переменных? Приведите пример использования дифференциала при приближенных вычислениях значений функции.

Задачи и упражнения

1. Найдите частные производные функции:

а) $z = 2x^2 - xy^2 + 3y$; б) $z = \sqrt{x^2 - y}$; в) $z = x \ln(y - x^2)$;
 г) $z = \sin(x^2 y) - y^2$; д) $z = \frac{x^2 - y}{x + y^2}$; е) $z = xy^2 e^{-x}$.

2. Производственная функция задана уравнением $q = 100 + 12K^2 + 10KL + L^3$. Найдите уравнения предельных продуктов капитала и труда.

3. Вычислите производную по направлению $l = (1; 2)$ и градиент функции $z = x^3 y - 5xy^2 + 3$ в точке $M(1; 1)$.

4. Найдите дифференциал функции:

а) $z = 2x^2 - xy^2 + 3y$; б) $z = \ln(x - y^2)$; в) $z = \sqrt{xy} \sin x$.

5. Вычислите приближенно при помощи дифференциала:

а) $3,01^{2,03}$; б) $z = x^2 - y$; в) $z = \frac{y - x^2}{x^2}$.

Домашнее задание

1. Найдите частные производные функции:

а) $z = 3x^3 y + xy^2 - 4$; б) $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt{x}}$; в) $z = e^{\frac{x}{y}}$;
 г) $z = (\operatorname{tg} y \cdot \cos x)^2$; д) $z = \sqrt{xy^3} - \sqrt[3]{x^2 y}$; е) $z = \frac{x^2 y}{\ln(xy^2)}$.

2. Вычислите производную по направлению $l = (-1; 1)$ и градиент функции $z = \ln(xy + xy^2)$ в точке $M(1; 2)$.

3. Вычислите, на сколько процентов приближенно изменится спрос, описываемый функцией $z = 5474e^{-\sqrt{n+p^2}}$, где n – число производителей товара, а p – цена товара, если число производителей товара уменьшится на 1%, а цена возрастет на 1%. На рынке имеется 7 производителей, цена товара составляет 2 у.е.

Занятие 11-12. Нахождение наибольшего и наименьшего значения функции нескольких переменных в замкнутой области. Метод наименьших квадратов

Теоретические вопросы

1. Дайте определение точки максимума (минимума) функции нескольких переменных.
2. Что называется критической точкой функции нескольких переменных? Верно ли, что всякая критическая точка является точкой экстремума?
3. Сформулируйте достаточное условие экстремума функции двух переменных.
4. Сформулируйте алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значений функции нескольких переменных в замкнутой области.

Задачи и упражнения

1. Найдите критические точки функции:

а) $z = xy^2 - xy - xy^3$; б) $z = \ln(xy - y^2)$.

2. Найдите экстремумы функции:

а) $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$; б) $z = e^{x/2}(x + y^2)$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области D :

а) $z = 5x^2 - 3xy + y^2 + 4$, $D: x = -1, y = -1, x + y = 1$;

б) $z = x^2 + 2xy + 2y^2$, D – треугольник с вершинами $A(0; 0)$, $B(3; 3)$, $C(5; 1)$.

Домашнее задание

1. Найдите критические точки функции $z = 3x^2 - 2y\sqrt{x} + 0,5y^2 - 56x$.

2. Найдите экстремумы функции $z = e^{-2y^2}(x^2 + y)$.

3. Найдите наибольшее значение функции $z = 4x^2 - 2xy + y^2 - 8x$ в замкнутой области D , ограниченной линиями $x = 0$, $y = 0$, $4x + 3y = 12$.

Занятие 13. Понятие дифференциального уравнения и его решения. Уравнения с разделяющимися переменными

Теоретические вопросы

1. Дайте определение дифференциального уравнения и его порядка. Приведите примеры.
2. Что называется решением обыкновенного дифференциального уравнения?
3. Сформулируйте задачу Коши для дифференциального уравнения первого порядка.
4. Дайте определение общего (частного) решения дифференциального уравнения первого порядка.
5. Какое уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными? Каков его общий интеграл?

Задачи и упражнения

1. Является ли данная функция решением указанного дифференциального уравнения?

а) $y = 5x^2$, $xy' = 2y$; б) $y = \frac{1}{x}$, $y'' = x^2 + y^2$.

2. Решите уравнения с разделяющимися переменными:

а) $x^2 y' - y = 0$; б) $x + xy + (xy + x)y' = 0$;

в) $(x^2 - 1)y' = -2xy^2$; г) $xy dx + (x + 1) dy = 0$.

3. Найдите частное решение данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанному начальному условию:

а) $xy' + y = y^2$, $y(1) = 0,5$; б) $2y'\sqrt{x} - y = 0$, $y(4) = 1$.

Домашнее задание

1. Является ли функция $y = e^x + e^{2x}$ решением дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$?

2. Решите дифференциальные уравнения:

а) $xyy' = 1 - x^2$; б) $(1 + e^x)yy' = e^x$; в) $x(y - 1) dx = (x^2 + 1) dy$.

3. Найдите частное решение дифференциального уравнения $y' \operatorname{ctg} x + y = y^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = -1$.

Занятие 14. Однородные уравнения и уравнения в полных дифференциалах

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение однородной функции n -го измерения в области. Приведите примеры однородной и неоднородной функции.
2. Какое уравнение называется однородным дифференциальным уравнением первого порядка?

3. С помощью какой замены однородное уравнение можно свести к уравнению с разделяющимися переменными?
4. Дайте определение уравнения в полных дифференциалах.
5. Сформулируйте необходимое и достаточное условие того, что уравнение является уравнением в полных дифференциалах.
6. Как можно найти общий интеграл уравнения в полных дифференциалах?

Задачи и упражнения

1. Решите однородные дифференциальные уравнения:

а) $y' = -\frac{x+y}{x}$;

б) $(x^2 - 3y^2)dx + 2xy dy = 0$.

2. Найдите частное решение дифференциального уравнения $(x^2 + y^2)dx - 2xy dy = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 4$.

3. Решите уравнения в полных дифференциалах:

а) $(x^2 - y)dx + xdy = 0$;

б) $(3x^2 + 2y)dx + (2x - 3)dy = 0$.

4. Решите задачу Коши для дифференциального уравнения

$(x + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$ и начального условия $y(0) = 2$.

Домашнее задание

1. Решите дифференциальные уравнения:

а) $xy' = y - xe^x$;

б) $(x + 2y)dx - x dy = 0$;

в) $y^2 + x^2 y' = xyu'$;

г) $2x \cos^2 y dx + (2y - x^2 \sin 2y) dy = 0$.

2. Найдите частное решение дифференциального уравнения $(x^2 - 3y^2)dx + 2xy dy = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(2) = 1$.

Занятие 15. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка

Теоретические вопросы

1. Что называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка?
2. Какое линейное дифференциальное уравнение первого порядка называется однородным? Неоднородным?
3. Какова структура общего решения линейного дифференциального уравнения первого порядка?
4. Какие методы решения линейных дифференциальных уравнений первого порядка Вы знаете?
5. В чем сущность метода Лагранжа (вариации произвольной постоянной) поиска общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка.
6. Дайте определение линейного дифференциального уравнения второго порядка. Приведите примеры.
7. Какое линейное дифференциальное уравнение называется однородным?
8. Сформулируйте теорему об общем решении линейного дифференциального уравнения.

9. Какова структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка?
10. Дайте определение фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.
11. Как найти фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами (в зависимости от корней характеристического уравнения)?

Задачи и упражнения

1. Какие из приведенных дифференциальных уравнений являются линейными дифференциальными уравнениями первого порядка? Какие из них являются однородными, а какие неоднородными?

а) $y' + xy = x^2$; б) $y' - \sin x \cdot y^2 = x$; в) $y'' + x^2 y = 0$;
 г) $xy' - \sqrt{x}y + e^x = 0$; д) $y' - \ln x \cdot y = 0$; е) $y' + xy = \sqrt{y}$.

2. Найдите общее решение линейного дифференциального уравнения:

а) $y' - \frac{2}{x}y = 2x^3$; б) $y = x(y' - x \cos x)$; в) $x^2 y' + xy + 1 = 0$.

3. Найдите частное решение дифференциального уравнения $xy' + y - e^x = 0$, удовлетворяющее данному начальному условию $y(0) = 1$:

4. Какие из приведенных дифференциальных уравнений являются линейными дифференциальными уравнениями второго порядка? Какие из них являются однородными, а какие неоднородными?

а) $y'' + xy' = x^2$; б) $y'' - \sin x \cdot y^2 = x$; в) $y'' + x^2 y = 0$;
 г) $y'' + xy' = \sqrt{y}$; д) $xy'' + y' - \sqrt{x}y + e^x = 0$.

5. Докажите, что функции $y = e^x$ и $y = e^{-x}$ образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения $y'' = y$.

6. Решите дифференциальные уравнения:

а) $y'' - 4y' + 3y = 0$; б) $y'' - 8y' = 0$; в) $y'' + 4y' + 13y = 0$;
 г) $y'' - 8y' + 16y = 0$; д) $y'' - 16y = 0$; е) $y'' - 2y' + y = 0$.

7. Найдите частное решение дифференциального уравнения $y'' + 4y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Домашнее задание

1. Решите линейные однородные дифференциальные уравнения:

а) $y'' + y' - 2y = 0$; б) $y'' + 8y' = 0$; в) $y'' - 4y' + 12y = 0$;
 г) $y'' + 4y' + 4y = 0$; д) $y'' + 16y = 0$; е) $y'' - 2y' - y = 0$.

2. Найдите частное решение данного дифференциального уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

а) $y'' + y' = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$; б) $y'' - 4y = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$.

Занятие 16. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка

Теоретические вопросы

1. Дайте определение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка. Приведите примеры.
2. Сформулируйте теорему об общем решении линейного неоднородного дифференциального уравнения.

- Какова структура общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка?
- В чем сущность метода Лагранжа (вариации произвольных постоянных) поиска общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка.
- В каких случаях и в каком виде можно найти частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами методом неопределенных коэффициентов?

Задачи и упражнения

1. Решите линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка методом Лагранжа:

а) $y'' - y = \frac{1}{x}$;

б) $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

2. Решите линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка при помощи метода неопределенных коэффициентов:

а) $y'' + y = x^2 + 1$;

б) $y'' - 2y' + y = 2e^x$;

в) $y'' - 8y' + 16y = \cos x$;

г) $y'' - y = e^{2x} - x^2$.

3. Найдите частное решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' = xe^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Домашнее задание

1. Решите линейные неоднородные дифференциальные уравнения:

а) $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$;

б) $y'' + y = xe^{3x}$;

в) $y'' - 2y' + 3y = \sin x$;

г) $y'' - y' - 2y = x - x^2$;

д) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$;

е) $y'' + y' = x^2$.

2. Найдите частное решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' = xe^{2x}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Занятие 17. Числовые ряды. Понятие числового ряда и его сходимости. Положительные ряды. Знакопередающиеся ряды. Абсолютная и условная сходимости. Признак Лейбница

Вопросы для самопроверки

- Дайте определение числового ряда, n -ой частичной суммы числового ряда, сходимости числового ряда. Сформулируйте необходимый признак сходимости.
- Какие ряды называются положительными? Перечислите признаки сходимости положительных рядов.
- Какие ряды называются знакопередающимися? Дайте определение абсолютной и условной сходимости ряда. Сформулируйте признак Лейбница сходимости знакопередающихся рядов.

Задачи для аудиторной работы

1. Доказать сходимости по определению и найти сумму ряда

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} + \dots$$

2. Исследовать на сходимости с помощью необходимого признака сходимости

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n-1}.$$

- Исследовать на сходимость положительный ряд с помощью признака Даламбера $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}$.
- Исследовать на сходимость с помощью признака Коши $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{(3n)^n}$.
- Исследовать на сходимость по первому признаку сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n + n}$.
- Исследовать ряд на сходимость по второму признаку сравнения $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.
- Исследовать ряд на абсолютную и условную сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{2n-1}}$.

Домашнее задание

- Исследовать на сходимость по определению и найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.
- Исследовать ряды на сходимость:
 - $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{n(n+1)}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n!}$.

Самостоятельная работа

Задания для самостоятельной работы предложены к каждому практическому занятию.

При изучении каждой темы курса в ходе лекций, а также на практических занятиях рассматриваются решения типовых задач по соответствующей теме. Для самостоятельной работы студентам предлагаются аналогичные задачи, поэтому они могут воспользоваться этими образцами.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

1 семестр

Контрольная работа №1 (типовая)

- Найдите область определения функции $y = \frac{1}{1 - \log_3(x-2)}$.
- Вычислите:
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2 - 1}$;
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{\sqrt{n^2 + 3n + 1}}$.
- Вычислите:
 - $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 12}$;
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x \operatorname{tg} 2x}{x^2}$.
- Исследовать функцию на непрерывность и установить характер точек разрыва $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$.
- Исследуйте функцию $y = x^3 + 3x$ и постройте ее график.

Критерии оценивания контрольной работы №1

1. Нормы оценивания: каждое правильно выполненное задание оценивается в 1 балл, с возможностью градации в 0,25 балла.
2. Шкала оценивания работы:

№ п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,35
4	Неудовлетворительно	менее 3

Теоретические вопросы для самопроверки

1. Понятие множества. Операции над множествами и их свойства.
2. Декартово произведение множеств. Бинарное отношение.
3. Понятие функции одной переменной и ее свойства.
4. Числовые последовательности и их пределы. Теорема о единственности предела последовательности.
5. Бесконечно малые последовательности и их свойства.
6. Теорема об арифметических действиях над последовательностями и их пределами.
7. Определение предела функции в точке по Коши. Теоремы о пределах функции в точке.
8. I и II замечательные пределы
9. Бесконечно малые функции в точке. Эквивалентные бесконечно малые.
10. Непрерывность функции в точке. Классификация точек разрыва.
11. Свойства функций непрерывных на отрезке.
12. Понятие производной функции. Геометрический смысл производной.
13. Правила вычисления производных. Примеры.
14. Дифференцируемость функции. Связь дифференцируемости и непрерывности.
15. Дифференциал функции. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
16. Теоремы Ферма, Ролля и Лагранжа.
17. Правило Лопиталю. Примеры.
18. Исследование функции на монотонность. Экстремум.
19. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.
20. Асимптоты графика функции.
21. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.
22. Замена переменной в неопределенном интеграле. Примеры.
23. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Примеры.
24. Интегрирование рациональных дробей.
25. Интегрирование тригонометрических функций.
26. Определенный интеграл, его геометрический смысл и свойства.
27. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.
28. Замена переменной в определенном интеграле.
29. Геометрические приложения определенного интеграла.
30. Понятие о несобственных интегралах. Примеры.

2 семестр

Контрольная работа №2(типовая)

1. Исследуйте на сходимость ряд: б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$.
2. Вычислите частные производные функции $z = x^2 y - xy + x$ в точке $M(1; -2)$.

3. Найдите частное решение дифференциального уравнения первого порядка $y' = xy^2$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = -1$.
4. Найдите общее решение дифференциальное уравнение: $y'' + 5y' + 4y = 0$.

Критерии оценивания контрольной работы №1

1. Нормы оценивания: каждое правильно выполненное задание оценивается в 1 балл, с возможностью градации в 0,25 балла.
2. Шкала оценивания работы:

№ п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	3,75-4
2	Хорошо	3,25-3,5
3	Удовлетворительно	2,25-3,0
4	Неудовлетворительно	менее 2

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации 1 семестр

Критерии выставления зачета

Зачет выставляется по результатам работы студента в течение семестра согласно Положению о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации студентов в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Смоленский государственный университет» (утверждено приказом ректора от 24 апреля 2014 г. №01-36).

Для получения зачета студент должен:

- уметь отвечать на теоретические вопросы, рассмотренные на лекциях (теоретические вопросы для самопроверки (1 семестр));
- уметь решать задачи, предложенные на практических занятиях;
- выполнить контрольную работу по основным разделам курса на положительную оценку.

2 семестр

Форма промежуточной аттестации – экзамен.

Для определения уровня сформированности компетенций применяется процедура независимой оценки.

Вопросы для подготовки к экзамену

1. Первообразная. Неопределенный интеграл и его свойства.
2. Замена переменной в неопределенном интеграле. Примеры.
3. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле. Примеры.
4. Интегрирование рациональных дробей.
5. Интегрирование тригонометрических функций.
6. Определенный интеграл, его геометрический смысл и свойства.
7. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.
8. Замена переменной в определенном интеграле.
9. Геометрические приложения определенного интеграла.
10. Понятие о несобственных интегралах. Примеры.
11. Понятие функции нескольких переменных. Область определения функции. Примеры.
12. Частные производные функций двух переменных.
13. Производная по направлению функций двух переменных. Градиент.
14. Экстремум функций двух переменных.

15. Полный дифференциал функции двух переменных и его применение в приближенных вычислениях.
16. Понятие о дифференциальном уравнении. Общее и частное решение.
17. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
18. Однородные дифференциальные уравнения.
19. Линейные дифференциальные уравнения I порядка.
20. Дифференциальные уравнения II порядка с постоянными коэффициентами.
21. Линейные дифференциальные уравнения II порядка
22. Числовые ряды. Геометрический и обобщенный гармонический ряды.
23. Необходимый признак сходимости числовых рядов. Примеры.
24. Признаки сравнения положительных рядов. Примеры.
25. Признаки Даламбера и радикальный признак Коши для положительных рядов. Примеры.
26. Интегральный признак Коши для положительных рядов.
27. Знакопередающиеся ряды. Признак Лейбница. Примеры.
28. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов.
29. Функциональные ряды. Сходимость функциональных рядов. Равномерно сходящиеся функциональные ряды.
30. Степенные ряды. Интервал и область сходимости.
31. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора. Разложение в ряд Маклорена функций $y = e^x$, $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \ln(1+x)$.

Пример типового экзаменационного теста 2 семестр



СМОЛЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ



Б1.Б.8.2 Математический анализ

[▶ Личный кабинет](#) ▶ [Математический анализ](#) ▶ [1 семестр](#) ▶ [Экзаменационный тест \(демонстрационный вариант\)](#) ▶ [Просмотр](#)

Вопрос 1 Пока нет ответа Балл: 4,00	Соотнесите названия операций над множествами и их определения Множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B, называется Множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат и A и B одновременно, называется	<input type="text" value="Выберите..."/>	<input type="text" value="Выберите..."/>
---	---	--	--

Вопрос 2 Пока нет ответа Балл: 4,00	$\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon)(\forall n > N \Rightarrow x_n - A < \epsilon)$ Выше написанное в символьном виде определение - это Выберите один ответ:
<input type="radio"/> а. Определение предела по Гейне <input type="radio"/> б. Определение предела последовательности <input type="radio"/> с. Определение предела функции в точке <input type="radio"/> d. определение предела по Коши	

Вопрос 3

Пока нет ответа
Балл: 4,00

$A=(-3;2), B=[1;2)$
Сколько целых чисел содержит множество $A \cup B$?

Ответ:

Вопрос 4

Пока нет ответа
Балл: 4,00

Вычислите предел и запишите ответ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 3^n}{2^n - 3^n}$$

Ответ:

Вопрос 5

Пока нет ответа
Балл: 4,00

Вычислите предел и запишите ответ в виде десятичной дроби

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 3n} - n$$

Ответ:

Вопрос 6

Пока нет ответа
Балл: 4,00

Вычислите предел и запишите ответ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}$$

Ответ:

Вопрос 7

Пока нет ответа
Балл: 4,00

$$x_n = -3^{-n}$$

Укажите номер n , начиная с которого модуль x_n станет и будет оставаться меньше 0,0001

Ответ:

Вопрос 8

Пока нет ответа
Балл: 4,00

Соотнесите определения

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D(f) (0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > M)$$

Выберите...

$$\forall \epsilon > 0 \exists K > 0 \forall x \in D(f) (|x| > K \Rightarrow |f(x) - b| < \epsilon)$$

Выберите...

Вопрос 9

Ответ сохранен
Балл: 4,00

Вычислите предел и запишите ответ в виде десятичной дроби

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x - 6}$$

Ответ:

Вопрос 10

Пока нет ответа
Балл: 4,00

Вычислите предел и запишите ответ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$$

Ответ:

Вопрос 11Пока нет ответа
Балл: 4,00

Вычислите предел и запишите в ответе получившуюся степень числа e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{3x}$$

Ответ: **Вопрос 12**Пока нет ответа
Балл: 4,00

Вычислите предел и запишите ответ

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt[3]{x+6}-2}$$

Ответ: **Вопрос 13**Пока нет ответа
Балл: 4,00

Соотнесите характеристики точек разрыва с их названием

Оба односторонних предела конечны, равны и отличны от значения функции в точке

Выберите...

Оба односторонних предела конечны и не равны друг другу

Выберите... **Вопрос 14**Пока нет ответа
Балл: 4,00Запишите абсциссу точки разрыва второго рода функции $y = \frac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 3x + 2}$ Ответ: **Вопрос 15**Пока нет ответа
Балл: 4,00

Как называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении последнего к нулю? (Ответ дайте одним словом в именительном падеже)

Ответ: **Вопрос 16**Пока нет ответа
Балл: 4,00

Как называется прямая, представляющая собой предельное положение секущей при стремлении приращения аргумента к нулю? (Ответ дайте одним словом в именительном падеже)

Ответ: **Вопрос 17**Пока нет ответа
Балл: 4,00Чему равна производная функции $y = \arctg x$

Выберите один ответ:

a. $-\frac{1}{1+x^2}$

b. $\frac{1}{1+x^2}$

c. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

d. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Вопрос 18 $y = \frac{7}{x^2}$
 Чему равно выражение $y' \cdot x^3$

Пока нет ответа
 Балл: 4,00

Ответ:

Вопрос 19 Найдите значение производной $y = 3^{\cos^2 x}$ в точке $x = \frac{\pi}{2}$

Пока нет ответа
 Балл: 4,00

Ответ:

Вопрос 20 Угловой коэффициент касательной $y = \frac{x^3}{3}$ в точке с абсциссой $x = -1$ равен

Пока нет ответа
 Балл: 4,00

Ответ:

Критерии оценивания ответа на экзамене

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов (по 100балльной шкале)
1	Тест	80 баллов с градацией 1 балл
2	Задача	10 баллов
3	Бонусные баллы (работа в течение семестра)	10 баллов

2. Шкала оценивания работы:

Оценка на экзамене определяется по таблице:

Оценка по 5-балльной шкале	Оценка по 10-балльной шкале	Оценка по 100-балльной шкале
5 – «отлично»	10	95-100 баллов
	9	91-95 баллов
	8	86-90 баллов
4 – «хорошо»	7	79-85 баллов
	6	71-78 баллов
3 – «удовлетворительно»	5	63-70 баллов
	4	56-62 баллов
2 – «неудовлетворительно»	3	38-55 баллов
	2	19-37 баллов
	1	0-18 баллов

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1 Основная литература

1. Кремер, Н. Ш. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 : учебник и практикум для академического бакалавриата / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин ; отв. ред. Н. Ш. Кремер. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 244 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-02017-5. — Режим доступа: www.biblio-online.ru/book/5C094630-BD03-40AB-AB13-C25AADB55CD1.
2. Кремер, Н. Ш. Математический анализ в 2 ч. Часть 2 : учебник и практикум для академического бакалавриата / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин ; отв. ред. Н. Ш. Кремер. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 389 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-02019-9. — Режим доступа: www.biblio-online.ru/book/09CE20BE-CF09-409C-82A4-2337E5612ADA.

7.2 Дополнительная литература

1. *Кытманов, А. М.* Математический анализ : учебное пособие для бакалавров / А. М. Кытманов. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 607 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-2785-6. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/425244>

7.3 Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети Интернет

1. Математика. URL: <http://www.intuit.ru/department/mathematics/>;
2. Общероссийский математический портал MATH-NET URL: www.mathnet.ru;
3. Национальный открытый университет (intuit.ru);
4. Национальная платформа открытого образования (openedu.ru).

8. Материально-техническое обеспечение

Для проведения занятий лекционного типа:

ауд. 510. учебного корпуса № 2 СмолГУ

Стандартная учебная мебель (75 учебных посадочных места), стол и стул для преподавателя – по 1 шт.

Кафедра для лектора – 1 шт.

Доска настенная трехэлементная – 1 шт.

Напольный мобильный проекционный экран DA-LITE – 1 шт.

Мультимедиапроектор BenQ – 1 шт.

Ноутбук Lenovo – 1 шт.

Колонки Genius – 1 шт.

Для проведения занятий семинарского типа (практических работ) групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации:

ауд. 517 учебного корпуса № 2 СмолГУ

Стандартная учебная мебель (26 учебных посадочных мест), стол и стул для преподавателя – по 1 шт.

Кафедра для лектора – 1 шт.

Доска настенная трехэлементная – 1 шт.

Для самостоятельной работы студентов:

ауд. 520 учебного корпуса № 2 СмолГУ

Компьютерные столы (18 шт.)

Стандартная учебная мебель (16 учебных посадочных мест), стол и стул для преподавателя – по 1 шт.

Персональные компьютеры (18 шт.) с KasperskyEndpointSecurity для бизнеса Стандартный АО «Лаборатория Касперского», лицензия 1FB6-161215-133553-1-6231.

Microsoft Open License, лицензия 49463448 в составе:

1. Microsoft Windows Professional 7 Russian;
2. Microsoft Office 2010 Russian.

9. Программное обеспечение

Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), Лицензия 66920993 от 24.05.2016

Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), Лицензия 66975477 от 03.06.2016

Dr. Web Server/Desktop Security Suite (Антивирус) Лицензия EE4E-QN5S-6FG2-N76B (Ежегодное обновление)

Kaspersky Endpoint Security для бизнеса – Стандартный, Лицензия 1FB6151216081242, ежегодное обновление

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 6314D932A1EC8352F4BBFDEFD0AA3F30

Владелец: Артеменков Михаил Николаевич

Действителен: с 21.09.2022 до 15.12.2023