

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»
Проректор по учебно-
методической работе
Ю. А. Устименко.
«б» сентября 2022 г.

**Рабочая программа дисциплины
Б1.О.09. Аналитические и вероятностные методы**

Направление подготовки: 02.04.01 Математика и компьютерные науки
Направленность (профиль): Методы моделирования в анализе и стохастике
Форма обучения - очная
Курс – 1,2
Семестры – 1,2,3,4
Всего зачетных единиц – 14, часов – 504
Форма отчетности: зачет – 1,2 семестры, экзамен – 3,4 семестры

Программу разработал
кандидат физико-математических наук, доцент Хартов А. А.

Одобрена на заседании кафедры
«30» августа 2022 г., протокол № 11

Смоленск
2022 г.

1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Аналитические и вероятностные методы» содержится в обязательной части Блока 1 дисциплин и изучается в 1-4 семестрах. Данная дисциплина является вспомогательной для изучения таких дисциплин, как «Дополнительные главы теории вероятностей», «Дискретные и вероятностные модели», «Вероятность и аппроксимация», «Случайные процессы», «Прикладные стохастические модели». В 2-м, 3-м и 4-м семестрах эта дисциплина 1) является дополнительной практикой для них и 2) содержательно дополняет вышеуказанные дисциплины за счет изучения современных и важных классических методов на стыке анализа и вероятности. Все это содействует становлению профессиональной компетентности магистра математики и компьютерных наук, что является главной целью освоения данной дисциплины.

Изучение курса основано на традиционных методах высшей школы, тесной взаимосвязи со смежными курсами, а также на использовании современной учебной, методической литературы, информационных и образовательных технологий.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
<p>ОПК-1. Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы прикладной и компьютерной математики</p>	<p>Знает: современный аппарат математики, основные понятия и базовые методы математического характера, используемые при выявлении, формализации, анализе и решении проблем прикладной и компьютерной математики.</p> <p>Умеет: находить, формулировать, выбирать необходимые методы решения и решать актуальные проблемы прикладной и компьютерной математики, использовать наиболее эффективные приемы моделирования, соответствующие данной научной дисциплине или моделируемому естественному процессу; использовать системы компьютерной математики.</p> <p>Владеет: навыками использования полученных теоретических сведений для более точного и максимально оптимального построения и реализации алгоритма решения задач прикладной и компьютерной математики.</p>
<p>ОПК-2. Способен создавать и исследовать новые математические модели в естественных науках, совершенствовать и разрабатывать концепции, теории и методы</p>	<p>Знает: основные понятия прикладной математики, сферы их приложений; возможности создания и исследования новых математических моделей в естественных науках; применение новых математических методов, появляющихся в исследованиях предметной области; основные способы математической обработки информации и их реализации с помощью программного обеспечения.</p> <p>Умеет: применять математические знания в профессиональной деятельности при построении математических моделей в естественных науках, требующие углубленных профессиональных знаний; выбирать необходимые методы исследования, модифицировать существующие и разрабатывать новые методы, исходя из задач конкретного исследования; оценивать программное обеспечение и перспективы его использования с учетом решаемых профессиональных задач; расширять свои математические познания.</p> <p>Владеет: основными методами обработки математических моделей в естественных науках; навыками работы с программными средствами общего и профессионального назначения; способами ориентации в профессиональных источниках информации; навыками проведения экспериментов и анализом их результатов. модели, стохастического и аналитического математического</p>

3. Содержание дисциплины

1 семестр

Методы вещественного анализа. Множества. Системы множеств. Объем. Мера. Свойства меры. Продолжение меры. Мера Лебега и ее свойства. Меры Хаусдорфа. Измеримые и их свойства. Простые функции. Теорема об аппроксимации. Сходимость по мере и почти везде. Интеграл по мере. Свойства интеграла. Интеграл по мере Лебега. Мера и интеграл Лебега-Стилтьеса. Произведение мер. Кратные и повторные интегралы. Теоремы Тонелли и Фубини. Функции ограниченной вариации. Заряды (меры со знаком) и интегрирование по заряду. Регулярно и медленно меняющиеся функции.

Методы функционального анализа. Метрические пространства. Сходимость. Открытые и замкнутые множества. Полные метрические пространства. Топологические пространства. Компактность. Линейные пространства. Нормированные пространства. Банаховы пространства. Евклидовы пространства. Гильбертовы пространства. Непрерывные линейные функционалы. Сопряженное пространство. Слабая топология и слабая сходимость. Линейные операторы. Сопряженный оператор. Самосопряженный оператор.

2 семестр

Разложения вероятностных законов. Предмет теории разложений вероятностных законов. Спектры закона и их связь со спектрами компонент. Неразложимые законы. Построение законов с заданными свойствами спектра. Примеры. Функционал Хинчина и его свойства. Теорема Хинчина о факторизации. Класс I_0 и проблемы его описания. Теорема Крамера. Теорема Райкова. Теорема Линника. Класс L . Решетчатые законы класса L . Законы из L/I_0 . Устойчивость разложений.

Спектральные представления законов и их применения. Аналитические свойства безгранично делимых законов. Квази-безгранично делимые законы. Эквивалентные определения и элементарные свойства. Аналитические свойства квази-безгранично делимых законов. Дискретные квази-безгранично делимые законы. Применение к предельным теоремам.

3 семестр

Вероятностные методы аппроксимации. Метод сверток и его модификации. Локальные оценки для решетчатых распределений. Равномерные оценки для решетчатых распределений. Оценка полной вариации для решетчатых распределений. Неравномерные оценки. Аппроксимация в дискретном нерешетчатом случае. Аппроксимация для абсолютно непрерывных распределений. Метод Стейна. Метод треугольных функций.

Большие уклонения. Условие Крамера. Преобразования Лапласа и Крамера. Функция уклонений. Связь вероятностей больших уклонений для сумм случайных величин и для сумм преобразований Крамера над ними. Вероятностный смысл функции уклонений. Принцип больших уклонений. Интегро-локальные теоремы. Интегральные теоремы. Локальные теоремы. Вероятности больших уклонений, когда условие Крамера не выполнено.

4 семестр

Современные проблемы анализа. Полианалитические функции и их обобщения. Краевые задачи типа Римана и типа Гильберта для полианалитических функций и их обобщений. Обобщенные гармонические функции и краевые задачи Дирихле, Неймана и Пуанкаре. Краевые задачи типа Газемана и типа Карлемана в классах квазигармонических функций. Предельные множества полианалитических полиномов.

Современные проблемы стохастики. Теоремы о сходимости и компактности для распределений сумм независимых случайных величин. Принадлежность к классу квази-безгранично делимых распределений. Спектральные представления характеристических

функций. Уточнение предельных теорем. Аппроксимация случайных процессов. Аппроксимация в задачах высокой размерности.

4. Тематический план

1 семестр

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий				
			лекции	семинары	практические занятия	лабораторные занятия	самостоятельная работа
1.	Методы вещественного анализа	54			16		38
2.	Методы функционального анализа	54			16		38
Всего за семестр		108			32		76

2 семестр

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий				
			лекции	семинары	практические занятия	лабораторные занятия	самостоятельная работа
1.	Разложения вероятностных законов	54			16		38
2.	Спектральные представления законов и их применения	54			16		38
Всего за семестр		108			32		76

3 семестр

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий				
			лекции	семинары	практические занятия	лабораторные занятия	самостоятельная работа
1.	Вероятностные методы аппроксимации	72			22		50
2.	Большие отклонения	45			10		35
	Контроль	27					
Всего за семестр		144			32		112

4 семестр

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий				
			лекции	семинары	практические занятия	лабораторные занятия	самостоятельная работа
1.	Современные проблемы анализа	59			16		43
2.	Современные	58			16		42

	е проблемы стохастики					
	Контроль	27				
	Всего за семестр	144			32	112

5. Виды образовательной деятельности

Занятия семинарского типа

1 семестр

Практические занятия 1-3. Множества. Системы множеств. Мера.

Задания для аудиторной работы: Упражнения 1)-12) на с. 18-19, 1)-6) на с. 29-30, 1)-7) на с. 41-42 (все с нечетными номерами) из [4] списка доп. литературы.

Задания для самостоятельной работы: Упражнения 1)-12) на с. 18-19, 1)-2) а с. 29-30, 1)-7) на с. 41-42 (все с четными номерами) из [4] списка доп. литературы.

Практические занятия 4-5. Измеримые функции.

Задания для аудиторной работы: Упражнения 1)-11) на с. 101-102, 1)-6) на с. 105, 1)-12) на с. 111-113 (все с нечетными номерами) из [4] списка доп. литературы.

Задания для самостоятельной работы: Упражнения 1)-11) на с. 101-102, 1)-6) на с. 105, 1)-12) на с. 111-113 (все с четными номерами) из [4] списка доп. литературы.

Практические занятия 6-8. Интеграл по мере.

Задания для аудиторной работы: Упражнения 1)-5) на с. 126-127, 1)-2) на с. 140, 1)-22) на с. 155-156 (все с нечетными номерами) из [4] списка доп. литературы.

Задания для самостоятельной работы: Упражнения 1)-5) на с. 126-127, 1)-2) на с. 140, 1)-22) на с. 155-156 (все с четными номерами) из [4] списка доп. литературы.

Практические занятия 9-10. Метрические и топологические пространства.

Задания для аудиторной работы: №1.9.26-1.9.60, (нечетные) из [1] списка доп. литературы.

Задания для самостоятельной работы: №1.9.26-1.9.60, (четные) из [1] списка доп. литературы.

Практические занятия 11-13. Линейные, нормированные и евклидовы пространства.

Задания для аудиторной работы: №5.6.13-5.6.40, (нечетные) из [1] списка доп. литературы.

Задания для самостоятельной работы: №5.6.13-5.6.40, (четные) из [1] списка доп. литературы.

Практические занятия 14-16. Линейные функционалы и операторы.

Задания для аудиторной работы: №6.10.79-6.10.101, (нечетные) из [1] списка доп. литературы.

Задания для самостоятельной работы: №6.10.79-6.10.101, (четные) из [1] списка доп. литературы.

2 семестр

Практические занятия 1-8. Разложение вероятностных законов

Совместное прочтение и разбор Глав 2,3,5 монографии [3].

Практические занятия 9-16. Спектральные представления законов и их применения

Совместное прочтение и разбор статьи [3].

3 семестр

Практические занятия 1-8. Вероятностные методы аппроксимации

Совместное прочтение и разбор Глав 2-12 монографии [9]. Решение упражнений из [9] к этим главам.

Практические занятия 9-16. Большие уклонения
Совместное прочтение и разбор Главы 9 книги [2].

4 семестр

Практические занятия №1-16. Современные проблемы анализа и стохастики

Задания для аудиторной работы: поочередное выступление обучающихся с докладами по темам, связанным с магистерской диссертацией.

Задания для самостоятельной работы: подготовка обучающимися своих докладов (по содержанию и форме подачи).

Темы: Полианалитические функции и их обобщения. Краевые задачи типа Римана и типа Гильберта для полианалитических функций и их обобщений. Обобщенные гармонические функции и краевые задачи Дирихле, Неймана и Пуанкаре. Краевые задачи типа Газемана и типа Карлемана в классах квазигармонических функций. Предельные множества полианалитических полиномов. Теоремы о сходимости и компактности для распределений сумм независимых случайных величин. Принадлежность к классу квази-безгранично делимых распределений. Спектральные представления характеристических функций. Уточнение предельных теорем. Аппроксимация случайных процессов. Аппроксимация в задачах высокой размерности.

Самостоятельная работа

Задания для самостоятельной работы приводятся в планах практических занятий.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Проведение текущего контроля в 1-ом-4-ом семестрах осуществляется на каждом практическом занятии - в процессе выполнения заданий (докладов) для аудиторной и самостоятельной работы.

Критерии оценивания заданий (докладов)

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Критерии	Количество баллов (*)
1	Полнота и качество выполнения задания	3 балла
2	Качество подачи и оформления	2 балла

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания задания:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	5
2	Хорошо	4
3	Удовлетворительно	3
4	Неудовлетворительно	0-2

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация во 1-ом и 2-ом семестрах осуществляется посредством прохождения зачета. Зачет выставляется по результатам работы студента в течение семестра.

Критерии выставления зачёта.

Для получения зачета студент должен выполнить на оценку не ниже «удовлетворительно/зачтено» всех видов работ для текущей аттестации. В противном случае ставится «не зачтено».

Промежуточная аттестация 3-м семестре осуществляется посредством проведения экзамена.

Вопросы к экзамену

1. Предмет теории разложений вероятностных законов.
2. Спектры закона и их связь со спектрами компонент.
3. Неразложимые законы.
4. Построение законов с заданными свойствами спектра.
5. Функционал Хинчина и его свойства.
6. Теорема Хинчина о факторизации.
7. Класс I_0 и проблемы его описания.
8. Теорема Крамера.
9. Теорема Райкова.
10. Теорема Линника.
11. Класс L .
12. Решетчатые законы класса L .
13. Законы из L/I_0 .
14. Устойчивость разложений.
15. Аналитические свойства безгранично делимых законов.
16. Квази-безгранично делимые законы.
17. Эквивалентные определения и элементарные свойства.
18. Аналитические свойства квази-безгранично делимых законов.
19. Дискретные квази-безгранично делимые законы.
20. Применение к предельным теоремам.
21. Метод сверток и его модификации.
22. Локальные оценки для решетчатых распределений.
23. Равномерные оценки для решетчатых распределений.
24. Оценка полной вариации для решетчатых распределений.
25. Неравномерные оценки.
26. Аппроксимация в дискретном нерешетчатом случае.
27. Аппроксимация для абсолютно непрерывных распределений.
28. Метод Стейна.
29. Метод треугольных функций.
30. Задачи теории больших уклонений.
31. Условие Крамера.
32. Преобразования Лапласа и Крамера.
33. Функция уклонений.
34. Связь вероятностей больших уклонений для сумм случайных величин и для сумм преобразований Крамера над ними.
35. Вероятностный смысл функции уклонений.
36. Принцип больших уклонений.
37. Интегро-локальные теоремы.
38. Интегральные теоремы.
39. Локальные теоремы.
40. Вероятности больших уклонений, когда условие Крамера не выполнено.

Образец экзаменационного задания

1. Теорема Хинчина о факторизации.
2. Функция уклонений.

Критерии оценивания ответа на экзамене

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Правильный ответ на каждый вопрос	10 баллов

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	17-20
2	Хорошо	13-16
3	Удовлетворительно	9-12
4	Неудовлетворительно	менее 9

Промежуточная аттестация в 4-м семестре осуществляется посредством проведения экзамена. Оценка за экзамен выставляется на основе оценки, полученной обучающимся за собственный доклад. Улучшение оценки на 1 балл возможно за активное участие на практических занятиях в качестве слушателя (регулярное посещение, вопросы докладчикам и т.д.).

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Основная литература

1. Далингер, В. А. Теория функций действительного переменного : учебник и практикум для вузов / В. А. Далингер, С. Д. Симонженков. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 242 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-8999-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/491235>

2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 479 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-00211-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/488573>

3. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник и практикум для вузов / Н. Ш. Кремер. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 538 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10004-4. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/475438>

4. Расулов К.М. Методы решения линейных краевых задач комплексного анализа: учебное пособие. – Смоленск: «Принт-Экспресс», 2019.

5. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. – Смоленск: СмолГУ, 2013.

7.2. Дополнительная литература

1. Богачев В. И., Смолянов О. Г., Действительный и функциональный анализ, – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011.

2. Боровков А. А. Теория вероятностей, – Москва: Книжный дом «Либроком», 2014.

3. Линник Ю. В., Островский И. В., Разложения случайных величин и векторов, – Москва: Изд-во «Наука», 1972.

4. Макаров Б. М., Подкорытов А. Н., Лекции по вещественному анализу, – СПб: Изд-во «БХВ-Петербург», 2011.

5. Прохоров А. В., Ушаков В. Г., Ушаков Н. Г., Задачи по теории вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы: учебное пособие, – Москва: Изд-во «КДУ», 2009.

6. Ротарь В. И. Теория вероятностей, – Москва: Изд-во «Высшая школа», 1992.

7. Ульянов П. Л., Бахвалов А. Н., Дьяченко М. И., Казарян К. С., Сифуэнтес П., Действительный анализ в задачах, – Москва: Изд-во «ФИЗМАТЛИТ», 2005.
8. Ширяев А. Н. Вероятность в 2-х кн., – Москва: Изд-во «МЦНМО», 2017.
9. Šekanavičius V., Approximation Methods in Probability Theory, Springer, Switzerland, 2016.
10. Lindner A., Pan L., Sato K., On quasi-infinitely divisible distributions, Trans. Amer. Math. Soc., 370 (2018), 8483-8520.
11. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М., Наука, 1977.
12. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СПГУ, 1998.
13. Heinrich Begehr. Complex analytic methods for partial differential equations. – Singapore: World Scientific Publishing, 1994.

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

- Система дистанционного обучения Смоленского государственного университета <http://cdo.smolgu.ru>
- Электронно-библиотечная система университета <http://biblioteka.smolgu.ru>
- Национальный открытый университет <http://www.intuit.ru>
- Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru>

8. Материально-техническое обеспечение

Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенная стандартной учебной мебелью.

Помещение для самостоятельной работы – компьютерный класс с доступом к сети «Интернет» и ЭИОС СмолГУ.

9. Программное обеспечение

Kaspersky Endpoint Security для бизнеса Стандартный АО «Лаборатория Касперского», лицензия 1FB6-161215-133553-1-6231.

Microsoft Open License, лицензия 49463448 в составе:

1. Microsoft Windows Professional 7 Russian;
2. Microsoft Office 2010 Russian.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 03B6A3C600B7ADA9B742A1E041DE7D81B0
Владелец: Артеменков Михаил Николаевич
Действителен: с 04.10.2021 до 07.10.2022