Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра прикладной математики и информатики

«Утверждаю»
Проректор по учебно-методической работе
___________Ю.А. Устименко
«23» июня 2022 г.

Рабочая программа дисциплины
Б1.О.11.01 Линейная алгебра

Направление подготовки: **44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)**
Направленность (профиль): **Математика. Информатика**
Форма обучения: очная
Курс – 1
Семестр – 1,2
Всего зачетных единиц –8, часов – 288

Форма отчетности: экзамен – 1, 2 семестры

Программу разработали
кандидат физико-математических наук, доцент Г.А. Банару

Одобрена на заседании кафедры
«16» июня 2022 г., протокол № 10

Заведующий кафедрой _________ С.В. Козлов

Смоленск
2022

1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Линейная алгебра» входит в обязательную часть Учебного плана по программе бакалавриата по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование, направленность (профиль) Математика, Информатика.

Требования к входным знаниям, умениям и компетенциям студента формируются на основе программы среднего (полного) общего образования по математике.

Дисциплина «Линейная алгебра» является предшествующей практически для всех математических дисциплин. Приобретенные в результате изучения дисциплины знания, умения и навыки используются практически во всех без исключения математических дисциплинах, модулях и практиках, например, таких как «Теория чисел», «Основные алгебраические структуры», «Алгебра многочленов» и др.

Отметим, что методы линейной алгебры находят широчайшее применение практически во всех естественных науках, а также в различных областях техники, в социально-экономических исследованиях и др. Вот почему курс линейной алгебры занимает важное место в предметной подготовке по основной образовательной программе направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование, профиль «Математика, Информатика».

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
ОПК-8. Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний	**Знать:** объект, предмет, основные категории, принципы, закономерности, структуру педагогической науки; сущность, структуру, динамику целостного педагогического процесса; состояние и тенденции развития отечественных и международных педагогических и психологических исследований; методологию педагогического исследования; особенности, логику, закономерности, формы, методы и средства процесса обучения и воспитания; основы психологии личности, основные теоретические подходы к пониманию феномена личности; познавательные процессы, их свойства, закономерности и роль в интеллектуальной и творческой деятельности; общетеоретические основы методики преподавания предмета в объеме, необходимом для осуществления педагогической деятельности; строение и функции организма, основные закономерности развития человека; общие закономерности и возрастные особенности функционирования основных систем организма учащихся; гигиенические требования к организации образовательного процесса и гигиену учебного процесса; инструментальные средства информационных технологий. **Уметь:** применять теоретические знания в решении педагогических задач; планировать, проектировать и осуществлять педагогический процесс в различных типах образовательных учреждений; определять структуру и методологию проведения педагогического исследования; адекватно целям выстраивать учебный и воспитательный процесс, выбирая соответствующие формы, методы и средства его осуществления; использовать в педагогической деятельности и межличностном взаимодействии современные достижения психологической науки; учитывать возрастные физиологические особенности учащихся в педагогическом процессе; использовать информационные технологии для решения профессиональных задач.

	Владеть: категориальным аппаратом педагогической науки; навыками решения педагогических задач; способами планирования и осуществления образовательного процесса; способами проведения педагогического эксперимента; формами и методами осуществления учебной и воспитательной работы; приемами и методами психодиагностики личности, изучения особенностей профессиональной деятельности; навыками организации педагогической деятельности с позиций сохранения здоровья; методами профилактики нарушений физического развития и повышения адаптационных резервов организма; методами оказания первой доврачебной помощи; методами применения информационно-коммуникационных технологий в образовательном процессе.
ПК-5. Способен использовать научные знания в предметной области (математика) в процессе формирования предметной компетенции обучающихся в рамках реализации основной общеобразовательной программы	**Знать:** современное состояние и перспективы развития математики как учебной дисциплины, направления развития школьного математического образования, теоретические основы обучения математике, принципы построения методической системы обучения математике, основные линии школьного курса математики, их структуру, содержание и роль, этапы формирования математических понятий, методические подходы к изучению основных тем школьного курса математики; **Уметь:** анализировать и интерпретировать содержание математических понятий, теорем, задач, разрабатывать фрагменты уроков, организовывать образовательный процесс обучения математике, конструировать методику введения понятий, изучения теорем, решения задач; **Владеть:** основными приемами организации деятельности школьников по изучению математики, навыками разработки методики изучения частных вопросов обучения математике, исследовательскими методами в профессиональной деятельности.
ПК-7. Способен математически корректно ставить естественнонаучные задачи и классические задачи математики, строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	**Знать:** базовые принципы постановки естественнонаучных задач и классических задач математики, определения основных понятий и доказательства теорем по основным разделам математики; **Уметь:** решать основные типы математических задач, доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть его следствия; **Владеть:** первичными навыками применения математического аппарата к решению конкретных задач из различных областей прикладной математики и информатики.

3. Содержание дисциплины

1. Теория матриц и определителей. Матрицы и действия над ними. Свойства суммы матриц, произведения матрицы на число, произведения матриц. Перестановки. Теорема об изменении чётности перестановки при транспозиции. Подстановка. Утверждение о сохранении чётности подстановки при различных её записях. Определение определителя. Свойства определителя. Теорема о разложении определителя по строке (столбцу). Ранг матрицы. Базисный минор. Теорема о существовании обратной матрицы. Утверждения о единственности матрицы, обладающей свойством единичной и о единственности обратной матрицы.

2. Системы линейных уравнений. Системы линейных уравнений. Элементарные преобразования линейной системы. Методы решения линейных систем с ненулевым главным определителем. Формулы Крамера. Теорема о существовании ненулевого решения однородной линейной системы в случае, когда количество неизвестных больше количества уравнений. Арифметическое $\boldsymbol{n}$-мерное векторное пространство. Критерий линейной зависимости. Утверждение о линейной зависимости системы элементов (из $\mathbf{R}^n$), содержащей линейно зависимые элементы. Утверждение о линейной зависимости системы $\boldsymbol{k}$ элементов (из $\mathbf{R}^n$) в случае, когда все они линейно выражаются через систему из $\boldsymbol{r}$ элементов ($\boldsymbol{r} < \boldsymbol{k}$). Теорема о ранге матрицы. Теорема Кронекера–Капелли.
3. Линейные пространства. Определение и свойства линейного пространства. Четыре утверждения о базисе. Теорема о невырожденности матрицы перехода. Теорема об изменении координат элемента при переходе к новому базису. Линейные подпространства. Критерий подпространства. Линейная оболочка элементов как подпространство. Пересечение подпространств как подпространство. Сумма подпространств как подпространство. Линейное пространство как прямая сумма подпространств. Линейный оператор. Нахождение координат элемента под действием на него линейного оператора. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Действия с линейными операторами. Матрицы суммы линейных операторов, произведения линейного оператора на число, произведения линейных операторов. Образ, ранг, ядро, дефект линейного оператора. Критерий собственного значения линейного оператора. Множество всех собственных векторов, отвечающих одному собственному значению как подпространство. Теорема о линейной независимости собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям.
4. Евклидовы пространства. Скалярное произведение в действительном Евклидовом пространстве. Неравенство Коши–Буняковского. Норма в Евклидовом пространстве. Угол между элементами. Утверждение о том, что ортонормированный базис является базисом. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Процесс ортогонализации. Ортогональное дополнение подпространства как подпространство. Евклидово пространство как прямая сумма своего подпространства и ортогонального дополнения к нему. Теорема об изоморфности Евклидовых пространств одной размерности. Скалярное произведение в комплексном Евклидовом пространстве и его свойства. Неравенство Коши–Буняковского в комплексном Евклидовом пространстве. Линейное пространство операторов. Утверждение о том, что в случае взаимно однозначного оператора любой элемент пространства является образом некоторого элемента. Критерий существования обратного оператора (взаимная однозначность). Критерий того, что ядро оператора состоит только из нулевого элемента (взаимная однозначность оператора). Критерий того, что ядро оператора состоит только из нулевого элемента (линейное пространство является образом оператора). Размерность пространства как сумма размерностей ядра и образа.

4. Тематический план

1 семестр

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий			
			лекции	практические занятия	лабораторные занятия	самостоятельная работа
1	Теория матриц и определителей	59	16	16	–	27
2	Системы линейных уравнений	58	16	16	–	26
	Экзамен	27	–	–	–	27
	ИТОГО	144	32	32	–	53+27

2 семестр

№	Разделы и	Всего	Формы занятий

п/п	темы	часов	лекции	практические занятия	лабораторные занятия	самостоятельная работа
1	Линейные пространства	67	20	20	–	27
2	Евклидовы пространства	50	12	12	–	26
	Экзамен	27	–	–	–	27
	ИТОГО	**144**	**32**	**32**	**–**	**53+27**

5. Виды образовательной деятельности

Занятия лекционного типа

Лекции

1 семестр

1-2. Матрицы и действия над ними. Свойства суммы матриц, произведения матрицы на число, произведения матриц.

3-4. Определение определителя матрицы. Свойства определителя.

5-6. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема о разложении определителя по строке.

7-8. Теорема существования обратной матрицы. Утверждения о единственности матрицы, обладающей свойством единичной и о единственности обратной матрицы.

9-10. Системы линейных уравнений. Основные элементарные преобразования линейной системы. Методы решения линейных систем с ненулевым главным определителем (метод Гаусса, матричный метод). Метод Крамера.

11-12. Утверждение о существовании ненулевого решения однородной линейной системы в случае, когда количество неизвестных больше количества уравнений. Арифметическое $\boldsymbol{n}$-мерное векторное пространство. Критерий линейной зависимости.

13-14. Утверждение о линейной зависимости системы элементов (из $\mathbf{R}^n$), содержащей линейно зависимые элементы. Утверждение о линейной зависимости системы $\boldsymbol{k}$ элементов (из $\mathbf{R}^n$) в случае, когда все они линейно выражаются через систему из $\boldsymbol{r}$ элементов ($\boldsymbol{r} < \boldsymbol{k}$).

15-16. Теорема о ранге матрицы. Теорема Кронекера–Капелли.

2 семестр

1-2. Определение и свойства линейного пространства. Четыре утверждения о базисе. Теорема о невырожденности матрицы перехода.

3-4. Теорема об изменении координат элемента при переходе к новому базису. Линейные подпространства. Критерий подпространства. Линейная оболочка элементов как подпространство. Пересечение подпространств как подпространство. Сумма подпространств как подпространство. Линейное пространство как прямая сумма подпространств.

5-6. Линейный оператор. Матрица линейного оператора. Нахождение координат элемента под действием на него линейного оператора. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.

7-8. Действия с линейными операторами. Матрицы суммы линейных операторов, произведения линейного оператора на число, произведения линейных операторов. Образ, ранг, ядро, дефект линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.

9-10. Скалярное произведение в действительном Евклидовом пространстве. Неравенство Коши–Буняковского. Норма в Евклидовом пространстве. Угол между элементами. Утверждение о том, что ортонормированный базис является базисом. Скалярное произведение в ортонормированном базисе.

11-12. Процесс ортогонализации. Ортогональное дополнение подпространства как подпространство. Евклидово пространство как прямая сумма своего подпространства и ортогонального дополнения к нему. Теорема об изоморфности Евклидовых пространств одной размерности.

13-14. Скалярное произведение в комплексном Евклидовом пространстве и его свойства. Неравенство Коши–Буняковского в комплексном Евклидовом пространстве. Линейное пространство операторов. Утверждение о том, что в случае взаимно однозначного оператора любой элемент пространства является образом некоторого элемента.

15-16. Критерий существования обратного оператора (взаимная однозначность). Критерий того, что ядро оператора состоит только из нулевого элемента (взаимная однозначность оператора). Критерий того, что ядро оператора состоит только из нулевого элемента (линейное пространство является образом оператора). Размерность пространства как сумма размерностей ядра и образа.

Занятия семинарского типа

Не предусмотрены.

Практические занятия

1 семестр

Занятия 1-3. *Матрицы, действия над ними.*

Теоретические вопросы

1. Определение суммы матриц, произведения матрицы на число, произведения матриц.
2. Свойства суммы матриц, произведения матрицы на число, произведения матриц.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.
Задачи 1.1 а)-г), 1.2 а)-г), 1.3, 1.5 а)-в), 1.7, 1.8 а)-г).

Задания для самостоятельной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.
Задачи 1.1 д)-ж), 1.2 д)-ж), 1.4, 1.5 г)-д), 1.6, 1.8 д)-ж).

Занятие 4. *Определение определителя.*

Теоретические вопросы

1. Перестановка. Утверждение об изменении чётности перестановки при транспозиции.
2. Подстановки. Утверждение о сохранении чётности подстановки при различных её записях.
3. Определение определителя матрицы.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.
Задачи 2.1 а)-в), е)-ж). Найти определители по определению.

Задания для самостоятельной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.
Задачи 2.1 г)-д), з)-и). Найти определители по определению.

Занятие 5. *Нахождение определителя по методу Гаусса.*

Теоретические вопросы

1. Свойства определителя.
2. Метод Гаусса.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 2.1 а)-в), е)-ж). Найти определители по методу Гаусса. Задача 2.2. Задачи 2.3 а)-г). Найти определители по методу Гаусса.

Задания для самостоятельной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 2.1 г)-д), з)-и). Найти определители по методу Гаусса. Задачи 2.3 д)-з). Найти определители по методу Гаусса.

Занятие 6. *Нахождение определителя разложением по строке (столбцу).*

Теоретические вопросы

1. Миноры и алгебраические дополнения.
2. Теорема о разложении определителя по строке.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.
Задачи 2.1 а)-в), е)-ж). Найти определители разложением по строке (столбцу).
Задачи 2.3 а)-г). Найти определители разложением по строке (столбцу).

Задания для самостоятельной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.
Задачи 2.1 г)-д), з)-и). Найти определители разложением по строке (столбцу).
Задачи 2.3 д)-з). Найти определители разложением по строке (столбцу).

Занятие 7. *Ранг матрицы.*

Теоретические вопросы

1. Миноры и алгебраические дополнения.
2. Определение ранга матрицы.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.
Задачи 2.4 а), г), е)-з).

Задания для самостоятельной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.
Задачи 2.4 б)- в), д), и)-к).

Занятия 8-9. *Обратная матрица.*

Теоретические вопросы

1. Определение обратной матрицы.
2. Теорема существования обратной матрицы. Утверждения о единственности матрицы, обладающей свойством единичной и о единственности обратной матрицы.
3. Методы нахождения обратной матрицы.
4. Матричные уравнения.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 3.1 а)-б, д), ж). Найти обратную матрицу по формуле и приведением к единичной матрице. Задачи 3.2 а)-ж), 3.3.

Задания для самостоятельной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 3.1 в)-г, е). Найти обратную матрицу по формуле и приведением к единичной матрице. Задачи 3.2 з)-н).

Занятие 10. *Метод Гаусса решения линейных систем.*

Теоретические вопросы

1. Системы линейных уравнений. Основные элементарные преобразования линейной системы.
2. Методы решения линейных систем с ненулевым главным определителем.
3. Метод Гаусса.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 4.1 а), в)- д), ж).

Задания для самостоятельной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 4.1 б), е), з).

Занятие 11. *Метод обратных матриц решения линейных систем.*

Теоретические вопросы

1. Системы линейных уравнений. Основные элементарные преобразования линейной системы.
2. Методы решения линейных систем с ненулевым главным определителем.
3. Метод обратных матриц.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 4.2 а)-б), 4.3 в)-г).

Задания для самостоятельной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 4.2 в)-г), 4.3 е).

Занятие 12. *Правило Крамера решения линейных систем.*

Теоретические вопросы

1. Системы линейных уравнений. Основные элементарные преобразования линейной системы.
2. Методы решения линейных систем с ненулевым главным определителем.
3. Правило Крамера.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.
Задачи 4.4 а)-б), 4.5 в)-г).

Задания для самостоятельной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.
Задачи 4.4 в)-г), 4.5 е).

Занятия 13-14. *Решение линейных систем общего вида.*

Теоретические вопросы

1. Системы линейных уравнений. Основные элементарные преобразования линейной системы.
2. Теорема Кронекера-Капелли.
3. Приведение основной матрицы системы к «ступенчатому» виду.
4. Приведение расширенной матрицы системы к «ступенчатому» виду.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.
Задачи 5.1 а)-е).

Задания для самостоятельной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.
Задачи 5.1 ж)-к).

Занятия 15. *Решение линейных систем общего вида с помощью нахождения фундаментальной системы решений.*

Теоретические вопросы

1. Системы линейных уравнений. Основные элементарные преобразования линейной системы.
2. Теорема Кронекера-Капелли.
3. Линейная независимость строк.
4. Фундаментальная система решений.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 5.1 а)-е). Найти фундаментальную систему решений однородной системы. Составить общее решение данной системы.

Задания для самостоятельной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 5.1 ж)-к). Найти фундаментальную систему решений однородной системы. Составить общее решение данной системы.

Занятие 16. *Повторение материала. Контрольная работа*

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Вычислите определитель, разложив его по элементам первой строки
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$
2. Найдите ранг матрицы
$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$
3. Найдите все матрицы второго порядка, квадраты которых равны единичной матрице.
4. Решите матричное уравнение:
$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$
5. Решите линейную систему со следующей расширенной матрицей:
$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

2 семестр

Занятия 1-2. *Определение и свойства линейного пространства*.

Теоретические вопросы

1. Определение линейного пространства.
2. Свойства линейного пространства.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Доказать, что множество всех матриц размера $n \times m$ с заданными естественным образом операциями суммы матриц и умножения матрицы на число образует линейное пространство.

2. Является ли линейным пространством множество квадратных матриц порядка n, если операции заданы следующим образом: $A \oplus B = A \cdot B$, $\lambda \odot A = \lambda A$?

3. Является ли линейным пространством множество диагональных матриц порядка n с нулевым определителем, если операции заданы следующим образом: $A\oplus B=A\cdot B$, $\lambda\odot A=\lambda A$?

4. Является ли линейным пространством множество всех вещественных функций, принимающих положительные значения на $(-\infty;+\infty)$, если операции заданы следующим образом: $f(x)\oplus g(x)=f(x)\cdot g(x)$, $\lambda\odot f(x)= f^{\lambda}(x)$?

5. Является ли линейным пространством множество всех нечетных функций, заданных на $[-1;1]$, если операции заданы следующим образом : $f(x)\oplus g(x)=f(x)+g(x)$, $\lambda\odot f(x)= \lambda f(x)$?

Задания для самостоятельной работы

1. Является ли линейным пространством множество всех целых чисел, если операции заданы следующим образом: $a\oplus b=a+b$, $\lambda\odot a=[\lambda a]$?

2. Является ли линейным пространством множество всех положительных чисел, если операции заданы следующим образом: $a\oplus b=a\cdot b$, $\lambda\odot a=a^{\lambda}$?

Занятия 3-4. *Линейная зависимость и независимость системы элементов линейного пространства.*

Теоретические вопросы

1. Определение линейной зависимости и независимости системы элементов линейного пространства.
2. Критерий линейной зависимости.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Исследовать на линейную зависимость систему элементов из линейного пространства матриц размера 1×3:

а) $A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 5\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}4 & -3 & 0\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}0 & -1 & 10\end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}2 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}1 & 4 & 3\end{pmatrix}$.

2. Исследовать на линейную зависимость систему элементов из линейного пространства матриц размера 2×2:

а) $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

3. Исследовать на линейную зависимость систему элементов из линейного пространства функций, определенных на $(0;+\infty)$: $f(x)=\ln x$, $g(x)=\sin x$, $h(x)=e^{x}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Исследовать на линейную зависимость систему элементов из линейного пространства функций, определенных на $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$: $f(x)=\mathrm{tg}^2\,x$, $g(x)=\frac{2}{\cos^2 x}$, $h(x)=3$.

2. Исследовать на линейную зависимость систему элементов из линейного пространства, заданного в задаче № 2 занятия №1: $a = 2$, $b = 7$.

Занятия 5-6. *Базис линейного пространства.*

Теоретические вопросы

1. Определение базиса линейного пространства.
2. Четыре утверждения о базисе.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Образует ли базис система элементов из линейного пространства матриц размера 1×3:

а) $A = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}$;
б) $A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}3 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}$?

2. Образует ли базис система элементов из линейного пространства матриц размера 2×2:

а) $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$?

3. Найти какой-нибудь базис и определить размерность линейного пространства решений системы:

а) $\begin{cases}7x_1+2x_2-x_3-2x_4+2x_5=0\\ x_1-3x_2+x_3-x_4-x_5=0\\ 2x_1+5x_2+2x_3+x_4+x_5=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3+4x_4+x_5=0\\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4-5x_5=0\\ x_1+3x_2-x_3-6x_4-x_5=0\end{cases}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Образует ли базис система элементов из линейного пространства матриц размера 1×3:

$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}$?

2. Образует ли базис система элементов из линейного пространства матриц размера 2×2:

$A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$?

3. Найти какой-нибудь базис и определить размерность линейного пространства решений системы:

а) $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3-x_4=0\\ 3x_1+x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3-x_4-x_5-2x_6=0\\ 4x_1+6x_2+8x_3-2x_4-2x_5-4x_6=0\end{cases}$.

Занятия 7-8. *Преобразование координат при изменении базиса. Определение линейного оператора.*

Теоретические вопросы

1. Определение матрицы перехода.
2. Теорема о невырожденности матрицы перехода.
3. Теорема об изменении координат элемента при переходе к новому базису.
4. Определение линейного оператора.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найти координаты элемента x в базисе $B' = \{e_1'; e_2'; e_3'\}$, если заданы его координаты в базисе $B = \{e_1; e_2; e_3\}$.

а) x = (1; 2; 4)

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + 3e_3 \\ e_2' = \dfrac{3}{2}e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases};$$

б) x = (-3; 2; 4)

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 - e_3 \\ e_2' = \dfrac{1}{2}e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases};$$

2. Пусть элемент x имеет координаты (x_1; x_2; x_3). Являются ли линейными преобразования $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, которые задаются следующим образом:

а) $\mathcal{A}$x = (x_1; $x_1+2x_2+3x_3$; $4x_1+5x_2+6x_3$),

$\mathcal{B}$x = (x_1; x_1+2x_2+3; $4x_1+5x_2+6$),

$\mathcal{C}$x = (x_1; $x_1+2x_2+3x_3$; $4x_1^4+5x_2+6x_3$);

б) $\mathcal{A}$x = ($3x_1-2x_2-1$; 0 ; $x_1+2x_2+3x_3$),

$\mathcal{B}$x = ($3x_1^2-2x_2-x_3$; 0 ; 0),

$\mathcal{C}$x = ($3x_1-2x_2-x_3$; 0 ; $x_1+2x_2+3x_3$);

Задания для самостоятельной работы

1. Найти координаты элемента x в базисе $B' = \{e_1'; e_2'; e_3'\}$, если заданы его координаты в базисе $B = \{e_1; e_2; e_3\}$.

x = (5; -5; -4)

$$\begin{cases} e_1' = e_1 + e_2 + \dfrac{4}{5}e_3 \\ e_2' = -4e_1 - e_2 \\ e_3' = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases}.$$

2. Пусть элемент x имеет координаты (x_1; x_2; x_3). Являются ли линейными преобразования $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$, которые задаются следующим образом:

$\mathcal{A}$x = (x_1^2 ; x_1-x_3; x_2+x_3),

$\mathcal{B}$x = (1; x_1-x_3; x_2+x_3),

$\mathcal{C}$x = (x_1; x_1-x_3; x_2+x_3)?

Занятия 9-10. *Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.*

Теоретические вопросы

1. Определение собственных значений и собственных векторов линейного оператора.
2. Критерий собственного значения.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного своей матрицей A:

а) $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

2. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего в линейном пространстве геометрических векторов на плоскости Oxy:

а) $\mathcal{A}$ - проекция вектора на ос Ox;

б) $\mathcal{A}$ – отображение вектора относительно оси Oy;

в) $\mathcal{A}$ – отображение вектора относительно начала координат.

Задания для самостоятельной работы

1. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного своей матрицей A:

а) $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$.

2. Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора $\mathcal{A}$, действующего в линейном пространстве геометрических векторов на плоскости Oxy:

$\mathcal{A}=\mathcal{B}\cdot\mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ – проекция вектора на ось Oy, $\mathcal{B}$ - умножение вектора на 2.

Занятия 11-12. *Повторение материала. Контрольная работа*

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Вектор *x* имеет координаты $(x_1;x_2;x_3)$ в некотором базисе. Оператор *A* действует на *x* следующим образом: $Ax=(x_1;x_3+x_2;x_1-x_2)$. Является ли этот оператор линейным?
2. Найдите для оператора из задачи 1 $(A^6+A^5)x$ по определению действий с операторами.
3. Составьте матрицу оператора из задачи 1.

Занятия 13-14. *Определение и свойства Евклидова пространства*.

Теоретические вопросы

1. Скалярное произведение в действительном Евклидовом пространстве.
2. Неравенство Коши-Буняковского.

3. Норма в Евклидовом пространстве.
4. Угол между элементами.
5. Скалярное произведение в ортонормированном базисе.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

Выясните, являются ли следующие множества Евклидовыми пространствами. Если да, найдите норму указанного элемента *а* и угол между указанными элементами *в* и *с*.

1. Рассмотрим линейное пространство матриц размера $n \times m$ с заданными естественным образом операциями суммы матриц и умножения матрицы на число. Скалярное произведение – определитель произведения двух матриц. *а* – единичная матрица, *в=а, с*–матрица из единиц.

2. Множество квадратных матриц порядка *n*, операции заданы следующим образом: $A \oplus B = A \cdot B$, $\lambda \odot A = \lambda A$. Скалярное произведение – определитель произведения двух матриц. *а* – единичная матрица, *в=а, с*–матрица из единиц.

3. Множество диагональных матриц порядка *n* с нулевым определителем, операции заданы следующим образом: $A \oplus B = A \cdot B$, $\lambda \odot A = \lambda A$. Скалярное произведение – определитель произведения двух матриц. *а* – единичная матрица, *в=а, с*–матрица из единиц.

4. Множество всех вещественных функций, принимающих положительные значения на $(-\infty;+\infty)$, операции заданы следующим образом: $f(x) \oplus g(x) = f(x) \cdot g(x)$, $\lambda \odot f(x) = f^{\lambda}(x)$. Скалярное произведение – определённый интеграл по отрезку *[0,1]* от произведения двух функций. *а=Exp x, в=Sin x +2, с= Cos x +3.*

Задания для самостоятельной работы

Выясните, являются ли следующие множества Евклидовыми пространствами. Если да, найдите норму указанного элемента *а* и угол между указанными элементами *в* и *с*.

1. Множество всех целых чисел, операции заданы следующим образом: $a \oplus b = a + b$, $\lambda \odot a = [\lambda a]$. Скалярное произведение *а* и *в равно ав. а=2, в=3, с=4.*

2. Множество всех положительных чисел, операции заданы следующим образом: $a \oplus b = a \cdot b$, $\lambda \odot a = a^{\lambda}$. Скалярное произведение *а* и *в равно ав. а=2, в=3, с=4.*

Занятие 15. *Процесс ортогонализации.*

Теоретические вопросы

1. Алгоритм процесса ортогонализации.
2. Основные формулы процесса ортогонализации.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

С помощью процесса ортогонализации получите ортонормированный базис из следующих элементов: *(1,2,0,3), (2,0,-1,1), (1,1,1,1),(-1,0,1,0).*

Задания для самостоятельной работы

С помощью процесса ортогонализации получите ортонормированный базис из следующих элементов: *(2,0,3), (0,-1,1), (1,1,1).*

Занятие 16. *Скалярное произведение в комплексном Евклидовом пространстве.*

Теоретические вопросы

1. Скалярное произведение в комплексном Евклидовом пространстве и его свойства.
2. Неравенство Коши-Буняковского в комплексном Евклидовом пространстве.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

Выясните, являются ли следующие множества Евклидовыми пространствами. Если да, найдите норму указанных элементов *а, в* и *с*.

1. Рассмотрим линейное пространство комплексных матриц размера $n \times m$ с заданными естественным образом операциями суммы матриц и умножения матрицы на число. Скалярное произведение – определитель произведения двух матриц. *а* – единичная матрица, *в=а, с*– матрица из единиц.

2. Множество квадратных комплексных матриц порядка n, операции заданы следующим образом: $A \oplus B = A \cdot B$, $\lambda \odot A = \lambda A$. Скалярное произведение – определитель произведения двух матриц. *а* – единичная матрица, *в=а, с*–матрица из единиц.

3. Множество диагональных комплексных матриц порядка n с нулевым определителем, операции заданы следующим образом: $A \oplus B = A \cdot B$, $\lambda \odot A = \lambda A$. Скалярное произведение – определитель произведения двух матриц. *а* – единичная матрица, *в=а, с*–матрица из единиц.

Задания для самостоятельной работы

Выясните, являются ли следующие множества Евклидовыми пространствами. Если да, найдите норму указанных элементов *а, в* и *с*.

1. Множество всех комплексных чисел с целыми действительными и мнимыми частями, операции заданы следующим образом: $a \oplus b = a + b$, $\lambda \odot (a + ib) = [\lambda a] + i[\lambda b]$. Скалярное произведение *а* и *в равно ав. а=2+i, в=3-i, с=8.*

2. Множество всех комплексных чисел с положительными действительными и мнимыми частями, операции заданы следующим образом: $a \oplus b = a \cdot b$, $\lambda \odot (a + ib) = a^{\lambda} + ib$. Скалярное произведение *а* и *в равно ав. а=2+i, в=3-i, с=8.*

Лабораторные работы

Не предусмотрены.

Самостоятельная работа

Текущая самостоятельная работа студента направлена на углубление и закрепление знаний студентов и развитие их практических умений. Она заключается в работе с лекционными материалами, поиске и обзоре литературы и электронных источников, информации по заданным темам курса, опережающей самостоятельной работе, в изучении тем, вынесенных на самостоятельную проработку, подготовке к лабораторным занятиям.

Самостоятельная внеаудиторная работа студентов состоит в проработке лекционного материала, составлении конспекта лекций по темам, вынесенным на самостоятельное изучение; выполнении домашних заданий.

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$. б) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$. в) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Найти произведение матриц:

а) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -3 & -5 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -2 \\ 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 3 & -5 & -2 \\ 9 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Дана матрица А. Найти матрицу A^{-1}, обратную данной. Сделать проверку, вычислив произведение $A \cdot A^{-1}$.

а) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. в) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

4. Систему линейных уравнений решить методом Гаусса (методом последовательного исключения неизвестных). Сделать проверку.

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$

5. Найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_3 = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 - 8x_3 = 0. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ -3x_1 + 10x_2 + x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$

6. Даны четыре вектора $\vec{a}$ (a_1, a_2, a_3), $\vec{b}$ (b_1, b_2, b_3), $\vec{c}$ (c_1, c_2, c_3) и $\vec{d}$ (d_1, d_2, d_3) в некотором базисе. Показать, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ образуют базис, и найти координаты вектора $\vec{d}$ в этом базисе.

а) $\vec{a}$ (1,3,5), $\vec{b}$ (0,2,0), $\vec{c}$ (5,7,9), $\vec{d}$ (0,4,16).

б) $\vec{a}$ (1,2,3), $\vec{b}$ (-1,3,2), $\vec{c}$ (7,-3,5), $\vec{d}$ (6,10,17).

в) $\vec{a}$ (4,7,8), $\vec{b}$ (9,1,3), $\vec{c}$ (2,-4,1), $\vec{d}$ (1,-13,-13).

7. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей.

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$. в) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

1 семестр

Образец контрольной работы

1. Вычислить определитель, разложив его по элементам первой строки

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Найти ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Найти все матрицы второго порядка, квадрат которых равны единичной матрице.

4. Решить матричное уравнение:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Решите линейную систему со следующей расширенной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

Критерии оценивания контрольной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно решено каждое задание	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5

3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

2 семестр

Образец контрольной работы

1. Вектор x имеет координаты ($x_1;x_2;x_3$) в некотором базисе. Оператор A действует на x следующим образом: $Ax=(x_1;x_3+x_2;x_1-x_2)$. Является ли этот оператор линейным?
2. Найдите для оператора из задачи 1 $(A^6+A^5)x$ по определению действий с операторами.
3. Составьте матрицу оператора из задачи 1.

Критерии оценивания контрольной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно реализован каждый метод решения	1 балл
2	Анализ результатов	2 балла

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

1 семестр

Вопросы для подготовки к экзамену

1. Матрицы. Операции над ними. Свойства операций.
2. Перестановки. Утверждение об изменении чётности перестановки при транспозиции.
3. Подстановки. Утверждение о независимости чётности подстановки от её формы записи.
4. Определитель матрицы. Формулы для определителей квадратных матриц первого, второго и третьего порядков.
5. Свойства определителя.
6. Теорема о разложении определителя по строке.
7. Теорема существования обратной матрицы.
8. Утверждения о единственности матрицы, обладающей свойством единичной и о единственности обратной матрицы.
9. Методы решения линейных систем с ненулевым главным определителем.
10. Теорема о существовании ненулевого решения однородной линейной системы.
11. Критерий линейной зависимости элементов из арифметического n-мерного векторного пространства.
12. Три утверждения о линейной зависимости.
13. Теорема о ранге матрицы.
14. Теорема Кронекера– Капелли.
15. Критерий существования ненулевого решения однородной линейной системы.

Образец экзаменационного билета

1.Матрицы. Операции над ними. Свойства операций.

2. Критерий существования ненулевого решения однородной линейной системы.
3. Решите матричное уравнение:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Критерии оценивания ответа на экзамене

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Теоретический вопрос	2 балла
2	Математическая модель	1 балл
3	Реализация решения задачи	2 балла

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

2 семестр

Вопросы для подготовки к экзамену

1. Определение и свойства линейного пространства.
2. Четыре утверждения о базисе линейного пространства.
3. Теорема о невырожденности матрицы перехода.
4. Теорема о преобразовании координат элемента при переходе к новому базису.
5. Критерий линейного подпространства.
6. Линейная оболочка элементов как подпространство.
7. Пересечение подпространств как подпространство.
8. Сумма подпространств как подпространство.
9. Критерий того, что линейное пространство является прямой суммой подпространств.
10. Теорема о нахождении координат образа элемента при действии на него линейного оператора.
11. Теорема о преобразовании матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.
12. Действия с линейными операторами как линейные операторы.
13. Матрицы линейных операторов, являющихся результатом действий с линейными операторами.
14. Образ линейного оператора как подпространство. Ядро линейного оператора как подпространство.
15. Критерий собственного значения линейного оператора.
16. Множество всех собственных векторов, отвечающих одному собственному значению как подпространство.
17. Теорема о линейной независимости собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям.
18. Скалярное произведение в действительном Евклидовом пространстве. Неравенство Коши–Буняковского.
19. Норма в Евклидовом пространстве. Угол между элементами.
20. Утверждение о том, что ортонормированный базис является базисом.

21. Скалярное произведение в ортонормированном базисе.
22. Процесс ортогонализации.
23. Ортогональное дополнение подпространства как подпространство.
24. Евклидово пространство как прямая сумма своего подпространства и ортогонального дополнения к нему.
25. Теорема об изоморфности Евклидовых пространств одной размерности.
26. Скалярное произведение в комплексном Евклидовом пространстве и его свойства.
27. Неравенство Коши–Буняковского в комплексном Евклидовом пространстве.
28. Линейное пространство операторов.
29. Утверждение о том, что в случае взаимно однозначного оператора любой элемент пространства является образом некоторого элемента.
30. Критерий существования обратного оператора (взаимная однозначность).
31. Критерий того, что ядро оператора состоит только из нулевого элемента (взаимная однозначность оператора).
32. Критерий того, что ядро оператора состоит только из нулевого элемента (линейное пространство является образом оператора).
33. Размерность пространства как сумма размерностей ядра и образа.

Образец экзаменационного билета

1. Определение и свойства линейного пространства.
2. Размерность пространства как сумма размерностей ядра и образа.
3. Вектор *x* имеет координаты ($x_1;x_2;x_3$) в некотором базисе. Оператор *A* действует на *x* следующим образом: $Ax=(x_1;x_3+x_2;x_1-x_2)$. Является ли этот оператор линейным?

Критерии оценивания ответа на экзамене

3. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Теоретический вопрос	1 балл
2	Математическая модель	1 балл
3	Реализация решения задачи	2 балла

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

4. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Основная литература

1. Бурмистрова Е. Б. Линейная алгебра: учебник и практикум для академического бакалавриата / Е. Б. Бурмистрова, С. Г. Лобанов. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 421 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-9916-3588-2. – Режим доступа: www.biblio-online.ru/book/6A5A6F52-FA19-4717-80BF-28331B7BA668.

2. Кремер Н. Ш. Линейная алгебра: учебник и практикум для академического бакалавриата / Н. Ш. Кремер, М. Н. Фридман. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 309 с. – (Серия: Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-534-02350-3. – Режим доступа: www.biblio-online.ru/book/B8B7FE48-028E-4707-BCDB-625FC196408E.

7.2. Дополнительная литература

1. Зуев А М. Линейная алгебра. Задачник-практикум, Смоленск, СмолГУ, 2007.

2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Линейная алгебра. МЦНМО, 2009
3. Кострикин А.И. Основы алгебры. М., 2001.
4. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. М., 2000.

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Электронная библиотека https://www.biblio-online.ru
2. Электронно-библиотечная система http://znanium.com
3. Математика. URL: http://www.intuit.ru/department/mathematics/;
4. Общероссийский математический портал MATH-NET URL: www.mathnet.ru:
5. Национальный открытый университет (intuit.ru);
6. Национальная платформа открытого образования (opened.ru).

8. Материально-техническое обеспечение

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенная следующим оборудованием: стандартная учебная мебель (28 учебных посадочных мест), стол и стул для преподавателя – по 1 шт., кафедра для лектора – 1 шт., доска настенная трехэлементная – 1 шт., напольный мобильный проекционный экран DA-LITE – 1 шт., мультимедиапроектор BenQ – 1 шт., ноутбук Lenovo – 1шт., колонки Genius – 1 шт., персональные компьютеры, объединенные в сеть с выходом в Интернет, – 16 шт.

9. Программное обеспечение

1. Microsoft Open License (Windows XP, 7, Office 2003-2016) - Лицензия 66975477 от 03.06.2016 – в составе:
   - ОС Windows
2. PTC Mathcad 15.0 (Лицензия 449732)

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 03B6A3C600B7ADA9B742A1E041DE7D81B0
Владелец: Артеменков Михаил Николаевич
Действителен: с 04.10.2021 до 07.10.2022