Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»
Проректор по учебно-
методической работе
____________ Ю.А. Устименко
«23» июня 2022 г.

Рабочая программа дисциплины
Б1.О.13.01 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Направление подготовки: **44.03.05 Педагогическое образование 9с двумя профилями подготовки)**
Направленность (профиль): **Математика. Информатика**
Форма обучения: очная
Курс – 1, 2
Семестр – 1, 2, 3, 4
Всего зачётных единиц – 16, часов – 576

Форма отчетности: экзамен – 1, 2, 3, 4 семестры

Программу разработали:
доктор физико-математических наук, профессор Расулов К.М.;
кандидат педагогических наук, доцент Шерстнёва Н.А.

Одобрена на заседании кафедры
«16» июня 2022 г., протокол №10

Заведующий кафедрой _____________ К.М. Расулов

Смоленск
2022

1. Место дисциплины в структуре ОП

Математический анализ играет фундаментальную роль в теоретической и практической подготовке студентов направления подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование» (профиль «Математика. Информатика»). Этот курс относится к обязательным для изучения дисциплинам блока 1 учебного плана. Логически и по своему содержанию он тесно связан с другими, формируемые в ходе изучения учебного курса знания, умения и навыки используются при изучении смежных математических дисциплин.Данная дисциплина является предшественницей и основой для изучения таких курсов, как: теория функций действительного переменного, теория функций комплексного переменного, дифференциальные уравнения и уравнения математической физики, теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, а также для вычислительных и педагогических практик, предусмотренных ОП.

Цели освоения дисциплины:
- овладение основными понятиями математического анализа;
- овладение логическими основами курса, необходимыми для решения теоретических и практических задач;
- приобретение навыков использования аппарата математического анализа при решении задач на экстремумы, геометрических и физических задач;
- формирование навыков самостоятельной работы, необходимых для использования знаний при изучении специальных дисциплин и дальнейшей практической деятельности;
- развитие математической интуиции, воспитание математической культуры.

Задачи освоения дисциплины:
- познавательная – глубокое освоение первичных общематематических понятий, изучаемых в математическом анализе, что необходимо для изучения смежных дисциплин.
- воспитательная – привитие и развитие культуры мышления, способности логически верно выстраивать устную и письменную речь, понимать необходимость доказательств, как в математике, так и в реальных жизненных ситуациях, при общении с коллегами и при работе в ученическом и учительском коллективах.
- развивающая – усвоение определенного количества информации по данной дисциплине, накопленной человечеством в процессе развития математики, привитие способности понимания значения математического анализа в других разделах математики и возможности применения полученных знаний в своей будущей педагогической (или иной другой) профессиональной деятельности.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
ОПК-8. Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний	**Знать**: объект, предмет, основные категории, принципы, закономерности, структуру педагогической науки; сущность, структуру, динамику целостного педагогического процесса; состояние и тенденции развития отечественных и международных педагогических и психологических исследований; методологию педагогического исследования; особенности, логику, закономерности, формы, методы и средства процесса обучения и воспитания; основы психологии личности, основные теоретические подходы к пониманию феномена личности; познавательные процессы, их свойства, закономерности и роль в

	интеллектуальной и творческой деятельности; общетеоретические основы методики преподавания предмета в объеме, необходимом для осуществления педагогической деятельности; строение и функции организма, основные закономерности развития человека; общие закономерности и возрастные особенности функционирования основных систем организма учащихся; гигиенические требования к организации образовательного процесса и гигиену учебного процесса; инструментальные средства информационных технологий. **Уметь**: применять теоретические знания в решении педагогических задач; планировать, проектировать и осуществлять педагогический процесс в различных типах образовательных учреждений; определять структуру и методологию проведения педагогического исследования; адекватно целям выстраивать учебный и воспитательный процесс, выбирая соответствующие формы, методы и средства его осуществления; использовать в педагогической деятельности и межличностном взаимодействии современные достижения психологической науки; учитывать возрастные физиологические особенности учащихся в педагогическом процессе; использовать информационные технологии для решения профессиональных задач. **Владеть**: категориальным аппаратом педагогической науки; навыками решения педагогических задач; способами планирования и осуществления образовательного процесса; способами проведения педагогического эксперимента; формами и методами осуществления учебной и воспитательной работы; приемами и методами психодиагностики личности, изучения особенностей профессиональной деятельности; навыками организации педагогической деятельности с позиций сохранения здоровья; методами профилактики нарушений физического развития и повышения адаптационных резервов организма; методами оказания первой доврачебной помощи; методами применения информационно-коммуникационных технологий в образовательном процессе.
ПК-5. Способен использовать научные знания в предметной области (математика) в процессе формирования предметной компетенции обучающихся в рамках реализации основной общеобразовательной программы	**Знать:** современное состояние и перспективы развития математики как учебной дисциплины, направления развития школьного математического образования, теоретические основы обучения математике, принципы построения методической системы обучения математике, основные линии школьного курса математики, их структуру, содержание и роль, этапы формирования математических понятий, методические подходы к изучению основных тем школьного курса математики;

	Уметь: анализировать и интерпретировать содержание математических понятий, теорем, задач, разрабатывать фрагменты уроков, организовывать образовательный процесс обучения математике, конструировать методику введения понятий, изучения теорем, решения задач; **Владеть:** основными приемами организации деятельности школьников по изучению математики, навыками разработки методики изучения частных вопросов обучения математике, исследовательскими методами в профессиональной деятельности.
ПК-7 Способен математически корректно ставить естественнонаучные задачи и классические задачи математики, строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	**Знать:** базовые принципы постановки естественнонаучных задач и классических задач математики, определения основных понятий и доказательства теорем по основным разделам математики; **Уметь:** решать основные типы математических задач, доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть его следствия; **Владеть:** первичными навыками применения математического аппарата к решению конкретных задач из различных областей прикладной математики и информатики.

3. Содержание дисциплины

1. **Введение в анализ.** Основные числовые множества. Рациональные числа и их свойства. Действительные числа. Ограниченные и неограниченные числовые множества.
2. **Предел последовательности.** Числовые последовательности и операции над ними. Свойства числовых последовательностей. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности. Сходящие последовательности и их свойства. Число e.
3. **Понятие функции одной действительной переменной. Предельное значение функции. Непрерывность.**Понятие функции одной действительной переменной. Способы задания функции. Определение и свойства предела функции в точке и на бесконечности, бесконечные пределы. Сравнение бесконечно больших и бесконечно малых функций. Определение непрерывности функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке. Классификация точек разрыва функции. Свойства функций, непрерывных на отрезке.
4. **Основы дифференциального исчисления функции одной действительной переменной.** Производная, ее физический и геометрический смысл. Понятие дифференцируемости функции. Таблица производных. Правило дифференцирования сложной функции. Теорема о производной обратной функции. Дифференциал и инвариантность формы первого дифференциала. Применение дифференциала. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.
5. **Основные теоремы дифференциального исчисления.** Теоремы Ферма, Ролля. Формулы Лагранжа и Коши. Правило Лопиталя. Формула Тейлора.
6. **Исследование функции одной действительной переменной и построение её графика. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции.** Монотонность функции. Отыскание точек экстремума. Направление выпуклости графика функции. Точки перегиба графика функции. Асимптоты графика функции. Примерная схема исследования функции и построение ее графика. Нахождение наибольших и наименьших значений функции.

7. **Неопределённый интеграл.** Понятие первообразной функции и неопределённого интеграла. Свойства неопределённого интеграла. Таблица интегралов. Основные методы интегрирования.
8. **Интегрирование в элементарных функциях.** Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование некоторых иррациональных и трансцендентных выражений.
9. **Определённый интеграл.** Интегральные суммы. Интегрируемость. Верхние и нижние суммы Дарбу. Необходимое и достаточное условие интегрируемости. Некоторые классы интегрируемых функций. Основные свойства определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле.
10. **Геометрические и физические приложения определённого интеграла.** Площадь плоской фигуры. Длина дуги кривой. Объёмы тел и площади поверхности. Работа. Перемещение. Центр тяжести.
11. **Несобственные интегралы.** Несобственные интегралы первого и второго рода, их свойства, методы вычисления.
12. **Числовые ряды.** Понятие числового ряда. Необходимый признак сходимости числового ряда. Гармонический и геометрический ряды. Критерий Коши сходимости числового ряда. Знакоположительные ряды. Признаки сходимости знакоположительных рядов. Абсолютно и условно сходящиеся ряды. Признак Лейбница. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Теорема Римана.
13. **Функциональные последовательности и ряды.** Понятие функциональной последовательности и функционального ряда. Равномерная сходимость. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов. Степенные ряды. Разложение некоторых элементарных функций в степенной ряд. Некоторые приложения степенных рядов.
14. **Ряды Фурье.** Понятие об ортонормированных системах и тригонометрическом ряде Фурье. Условия поточечной и равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье. Понятие об общем ряде Фурье.
15. **Функции нескольких переменных.** Понятие n-мерного координатного и n-мерного евклидова пространства. Множества точек n-мерного евклидова пространства. Понятие функции нескольких переменных. Предельное значение функции двух переменных. Непрерывность функции двух переменных. Частные производные и дифференциалы функции двух переменных. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Локальный экстремум. Исследование функции двух переменных на экстремум.
16. **Теория неявных функций и ее приложения.** Понятие неявной функции. Теоремы о существовании и дифференцируемости неявной функции одной и двух переменных. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.
17. **Кратные интегралы.** Определение и существование двойного интеграла. Свойства двойного интеграла. Замена переменных в двойном интеграле. Тройной интеграл и его свойства. Геометрические и физические приложения кратных интегралов.
18. **Криволинейные интегралы.** Определение криволинейных интегралов первого и второго родов. Существование криволинейных интегралов и их сведение к определенным интегралам. Криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру и формула Грина. Независимость криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования и условие полного дифференциала.

4. Тематический план

1 семестр

№ п/п	Темы	Всего часов	Формы занятий		
			Лекции	Практи-ческие	Самосто-ятельная

				занятия	работа
1.	Действительные числа и их свойства	6	2	2	2
2.	Числовые последовательности. Предел числовой последовательности	16	6	6	4
3.	Функции одной действительной переменной	12	4	4	4
4.	Предел функции одной переменной	14	4	6	4
5.	Непрерывность функции в точке и на множестве	8	2	4	2
6.	Контрольная работа 1	4	-	2	2
7.	Дифференцируемость функции одной переменной	16	4	8	4
8.	Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя	10	4	4	2
9.	Приложения дифференциального исчисления функции одной переменной	27	6	10	11
10.	Контрольная работа 2	4	-	2	2
	Контроль	27	-	-	27
	Всего за семестр	144	32	48	37+27=64

2 семестр

№ п/п	Темы	Всего часов	Формы занятий		
			Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа
1.	Обобщение материала 1-го семестра	10	-	4	6
2.	Первообразная и неопределённый интеграл	38	12	16	10
3.	Контрольная работа 1	4	-	2	2
4.	Определённый интеграл	26	8	12	6
5.	Геометрические и физические приложения определённого интеграла	27	10	10	7
6.	Контрольная работа 2	4	-	2	2
7.	Несобственные интегралы	8	2	2	4
	Контроль	27	-	-	27
	Всего за семестр	144	32	48	37+27=64

3 семестр

№ п/п	Темы	Всего часов	Формы занятий		
			Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа

1.	Числовые ряды и их основные свойства.	8	2	4	2
2.	Признаки сходимости положительных рядов.	14	4	6	4
3.	Ряды с произвольными членами и теорема Римана.	15	4	6	5
4.	Функциональные ряды и их основные свойства.	10	2	4	4
5.	Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.	12	2	6	4
6.	Степенные ряды и их основные приложения.	30	12	10	8
7.	Тригонометрические ряды Фурье.	24	6	10	8
8.	Контрольная работа	4	-	2	2
	Контроль	27	-	-	27
	Всего за семестр	144	32	48	37+27=64

4 семестр

№ п/п	Темы	Всего часов	Формы занятий		
			Лекции	Практи-ческие занятия	Самостоятельная работа
1.	Открытие и замкнутые множества на R^n.	6	2	2	2
2.	Предел и непрерывность функций нескольких переменных.	20	6	6	8
3.	Дифференцируемость функций нескольких переменных.	35	10	10	15
4.	Двойные и тройные интегралы и их приложения.	26	6	6	14
5.	Криволинейные интегралы и их приложения.	26	8	6	12
6.	Контрольная работа	4	-	2	2
	Контроль	27	-	-	27
	Всего за семестр	144	32	32	53+27=80

5. Виды образовательной деятельности

1 семестр

Лекция 1 «Действительные числа и их свойства»: понятие числового множества, рациональные числа и их свойства, действительные числа, модуль действительного числа, ограниченные и неограниченные числовые множества, точные грани.

Лекции2-4«Числовые последовательности. Предел числовой последовательности»: понятие последовательности, арифметические операции над последовательностями, понятия о пределе последовательности, теоремы пределах, бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, достаточные признаки существования предела, число *e*.

Лекции 5-6 «Функции одной действительной переменной»: понятие функции одной действительной переменной, способы задания функций, основные классы функций, понятие сложной функции, понятие обратной функции, свойства функций.

Лекции7-8«Предел функции одной действительной переменной»:определение предела функции в точке по Коши и по Гейне, предел функции на бесконечности, бесконечные пределы,теоремы о свойствах предела, бесконечно малые и бесконечно большие функции и их сравнение, замечательные пределы функции.

Лекция 9«Непрерывные функции»:определение непрерывности, точки разрыва, свойства функций непрерывных в точке и на отрезке.

Лекции 10-11«Основы дифференциального исчисленияфункции одной переменной»: производная, дифференцируемость функции, таблица производных и правила дифференцирования, дифференциал и его применения, производные и дифференциалы высших порядков.

Лекции12-13«Основные теоремы дифференциального исчисления»: теоремы Ферма, Ролля, формулы Лагранжа и Коши, правило Лопиталя раскрытия неопределенностей, формула Тейлора.

Лекции 14-16 «Применение производной функции одной переменной»: исследование функций с помощью производной на монотонность, экстремум, направление выпуклости, точки перегиба графика функции, общая схема исследования и построения графиков, нахождение наибольшего и наименьшего значений функций.

Практическое занятие 1 «Понятие действительного числа».

Контрольные вопросы: определение рационального числа, иррационального числа, свойства множества Q рациональных чисел и множества R действительных чисел, модуль действительного числа,определение ограниченного снизу (сверху) множества, неограниченного множества, определение точной нижней (верхней) грани и их характеристические свойства.

Задания для аудиторной работы: раздел 1 № 1 (а,б), 5, 7, 8, 12, 23-43 (нечётные), 20 [15].

Задания для самостоятельной работы: раздел 1 №1(в,г), 6, 9, 11, 23-43 (чётные), 21 [15].

Практическое занятие 2«Понятие числовой последовательности».

Контрольные вопросы: определение числовой последовательности, способы задания последовательностей, классы последовательностей (монотонные, ограниченные).

Задания для аудиторной работы: раздел 1 № 303 (на выбор), 304 (на выбор), 305 (б,г) [15]; исследовать следующие последовательности на ограниченность и монотонность:

а) $x_n = \dfrac{n^2+5}{n^2+1}$; б) $x_n = \dfrac{\cos \pi n}{n+1}$.

Задания для самостоятельной работы: раздел 1 № 303, 304, 305 (а,б)[15].

Практическое занятие 3«Понятие предела числовой последовательности».

Контрольные вопросы: определение предела последовательности, основные свойства предела последовательности, бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.

Задания для аудиторной работы: раздел 1 № 321, 322, 325, 327, 329 [15].

Задания для самостоятельной работы: раздел 1 № 323, 324, 326, 330 [15].

Практическое занятие 4«Вычисление пределов последовательностей».

Контрольные вопросы: теоремы об арифметических операциях над последовательностями и их пределами, применение этих теорем при раскрытии различных видов неопределенностей.

Задания для аудиторной работы: 245-259 (нечетные), 266 [10].

Задания для самостоятельной работы: раздел 1 № 355 [15].

Практические занятия 5-6 «Функции одной действительной переменной и их свойства».

Контрольные вопросы: понятие числовой функции, область определения и множество значений функции одной переменой, понятие сложной и обратной функции, основные классы функций (монотонные, четные и нечетные, ограниченные и неограниченные, периодические).

Задания для аудиторной работы: раздел 1 № 44, 52, 54, 62, 104, 108, 120, 130, 157, 170, 179, 181, 198, 210, 211 [15].
Задания для самостоятельной работы: раздел 1 № 45, 51, 55, 105, 109, 121, 131, 180, 182, 198, 210, 211 [15].

Практическое занятие7«Понятие предела функции одной действительной переменной».

Контрольные вопросы: определение предела функции в точке (по Коши, по Гейне, на языке окрестностей), геометрический смысл према функции, основные свойства предела, предел функции на бесконечности и бесконечные пределы, односторонние пределы, теоремы об арифметических операциях над функциями и их пределами.
Задания для аудиторной работы: раздел 1 № 374-380 (четные), 384-400 (нечетные) [15].
Задания для самостоятельной работы: раздел 1 № 374-380 (четные), 384-400 (нечетные) [15].

Практические занятия8-9«Вычисление пределов функций одной переменной».

Контрольные вопросы: способы раскрытия различных видов неопределенностей, замена переменной при вычислении пределов функций, замечательные пределы, сравнение бесконечно малых функций, эквивалентные бесконечно малые и их использование в практике вычисления пределов.
Задания для аудиторной работы: раздел 1 № 402, 403, 408-418 (нечетные), 422-442 (нечетные), 453-462 (четные), 475 (а, в, з) [15].
Задания для самостоятельной работы: раздел 1 № 408-442 (четные), 453-462 (нечетные) [15].

Практическое занятие10«Понятие непрерывности функции одной переменной».

Контрольные вопросы: различные определения понятия непрерывности функции в точке, определение непрерывности функции на отрезке, арифметические операции над непрерывными функциями, непрерывность основных элементарных функций, точки разрыва и их классификация.
Задания для аудиторной работы: раздел 1 № 485-504 (нечетные), 505, 507, 511, 515, 518 (а,б), 521 [15].
Задания для самостоятельной работы: раздел 1 № 485-504 (четные), 506, 510, 512, 514, 518 (б,г), 522 [15].

Практическое занятие11«Свойства функций, непрерывных в точке и на отрезке».

Контрольные вопросы: формулировки основных теорем о свойствах функций, непрерывных на отрезке (ограниченность, теорема о нуле непрерывной функции, о промежуточных значениях и теорема Вейерштрасса о наименьшем и наибольшем значении), применение этих теорем (обоснование метода интегралов, приближенное решение уравнений).
Задания для аудиторной работы: раздел 1 № 546 (на выбор), 547, 551 (а,б), 552, 553, 559 [15].
Задания для самостоятельной работы: раздел 1 № 546, 548, 550, 551 (б,г), 559 [15].

Практическое занятие 12 «Контрольная работа 1».

Практическое занятие 13«Понятие производной функции одной переменной».

Контрольные вопросы: определение производной функции, алгоритм её вычисления, геометрический и механический смысл, непрерывность функции, имеющей производную, таблица производных, правила вычисления производных.
Задания для аудиторной работы: раздел 2 № 16 (на выбор), 17, 19, 89 [15].
Задания для самостоятельной работы: раздел 2 № 16 (на выбор), 18, 20, 87 [15].

Практические занятия14-15«Вычисление производных. Дифференцируемость функции одной переменой».

Контрольные вопросы: теорема о производной сложной функции и её применение, понятие дифференцируемости функции одной переменной, необходимое и достаточное условие дифференцируемости, приём логарифмического дифференцирования.
Задания для аудиторной работы: раздел 2 № 23-73 (на выбор), 75, 81, 93 (а,б,с), 97 [15].

Задания для самостоятельной работы: раздел 2 № 23-73 (на выбор), 74, 82, 93 (б,г), 94 [15].

Практическое занятие 16«Дифференциал функции и его применение. Производные и дифференциалы высших порядков».

Контрольные вопросы: понятие дифференциала функции, производные и дифференциалы высших порядков.

Задания для аудиторной работы: раздел 2 № 119, 121, 152 (а,в,д), 153, 154 (б), 156, 157 (а,г), 167, 177 [15].

Задания для самостоятельной работы: раздел 2 № 124, 152 (б,г), 154 (в), 157 (б,г), 168, 178 [15].

Практические занятия17-18«Основные теоремы дифференциального исчисления. Правило Лопиталя».

Контрольные вопросы: формулировки теорем Ферма, Роля, Лагранжа, Коши, правила раскрытия неопределенностей различного вида с применением правила Лопиталя.

Задания для аудиторной работы: № 212 (в), 215, 217 (в), 245-255 (нечетные), 275, 277, 281, 294 [15].

Задания для самостоятельной работы: № 212 (а), 217 (а,б), 245-255 (четные), 274, 282 [15].

Практическое занятия 19 «Условие монотонности функции одной действительной переменной на промежутке.Экстремумы функции одной действительной переменной».

Контрольные вопросы: достаточное условие постоянства функции, терема о достаточном условии монотонности функции, дифференцируемой на промежутке, определение точки максимума (минимума), достаточные условия экстремума функции по первой и второй производной.

Задания для аудиторной работы: раздел 2 № 230 (б), 231, 235, 237, 243 (а,б,с) [15]; № 1157-1159 [6], № 300-315 (нечётные) [15].

Задания для самостоятельной работы: раздел 2 №230 (а,д), 232, 234, 236, 242 (а,б) [15]; №1156, 1158 [6], № 300-315 (чётные) [15].

Практическое занятие 20 «Исследование функции одной переменной на направление выпуклости и точки перегиба графика функции. Асимптоты».

Контрольные вопросы: понятие выпуклой вниз (вверх) на промежутке функции, точки перегиба, достаточное условие выпуклости функции, алгоритм исследования функции на выпуклость и точки перегиба, виды асимптот графика функции.

Задания для аудиторной работы: раздел 2 № 395, 397, 399 (б,д), 413 (а,в,г) [15]; №1289, 1299 [10].

Задания для самостоятельной работы: раздел 2 № 396, 398, 399 (а,г), 414 (а,в) [15]; №1287, 1291 [10].

Практические занятия 21-22 «Полное исследование функций и построение их графиков».

Задания для аудиторной работы: раздел 2 № 415 (а,д), 416 (е), 418 (ж), 419 (а) [15].

Задания для самостоятельной работы: раздел 2 № 415 (б,е), 418 (а,д), 419 (б) [15].

Практическое занятие 23 «Наименьшее и наибольшее значения функции одной действительной переменной».

Контрольные вопросы: правило отыскания наименьшего и наибольшего значения функции, непрерывной на отрезке.

Задания для аудиторной работы: раздел 2 № 317, 321, 327, 333, 341, 365, 372 [15].

Задания для самостоятельной работы: раздел 2 № 316, 318, 326, 337, 366, 364 [15].

Практическое занятие 24 «Контрольная работа 2».

2 семестр

Лекции1-6«Первообразная и неопределённый интеграл»:понятие первообразной функции и неопределённого интеграла, свойства неопределённого интеграла, таблица интегралов, основные методы интегрирования, интегрирование рациональных дробей, интегрирование некоторых иррациональных и трансцендентных выражений.

Лекции7-10«Определённый интеграл»:интегральные суммы, интегрируемость, верхние и нижние суммы Дарбу, необходимое и достаточное условие интегрируемости, некоторые классы интегрируемых функций, основные свойства определённого интеграла, формула Ньютона-Лейбница, замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле.

Лекции11-15«Геометрические и физические приложения определённого интеграла»:площадь плоской фигуры, объёмы тел, длина дуги кривой, центр тяжести, работа, перемещение, статические моменты**.**

Лекция 16«Несобственные интегралы»: несобственные интегралы первого и второго рода, методы их вычисления.

Практические занятия 1-2 «Обобщение материала 1-го семестра».
Контрольные вопросы: методы вычисления пределов функций; полное исследование функции.
*Задания для аудиторной работы:*исследовать функции и построить их графики$f(x) = \frac{2-4x^2}{1-4x^2}$, $f(x) = x + \ln(x^2-1)$, $f(x) = e^{\frac{1}{2-x}}$, $f(x) = \sqrt[3]{2x^2 - x^3}$, $f(x) = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}$, $f(x) = \frac{1-\ln x}{x}$.
Задания для самостоятельной работы: исследовать функции и построить их графики$f(x) = \frac{x^4}{(1+x)^3}$, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$, $f(x) = (x-1) * e^{3x+1}$.

Практическое занятие 3«Понятие первообразной и неопределённого интеграла».
Контрольные вопросы: определение первообразной функции на промежутке, понятие неопределённого интеграла и его основные свойства, таблица неопределённых интегралов и её применение для непосредственного интегрирования.
Задания для аудиторной работы: раздел 3 № 1-26 (нечетные) [15]; № 1676-1702 (нечетные) [10].
Задания для самостоятельной работы: раздел 3 № 1-26 (четные) [15]; № 1676-1702 (четные) [10].

Практическое занятие 4«Замена переменной в неопределённом интеграле».
Контрольные вопросы: формулировка теоремы о замене переменной в неопределённом интеграле.
Задания для аудиторной работы: раздел 3 № 35-75 (нечетные) [15].
Задания для самостоятельной работы: раздел 3 № 35-75 (четные) [15].

Практические занятия5-6«Интегрирование по частям. Применение двух методов интегрирования».
Контрольные вопросы: теорема об интегрировании по частям в неопределённом интеграле.
Задания для аудиторной работы: раздел 3 № 94-120 (нечетные), 123 [15].
Задания для самостоятельной работы: раздел 3 № 94-120 (четные), 122 [15].

Практические занятия7-8«Интегрирование рациональных дробей».
Контрольные вопросы: понятие простейших дробей, представление правильной дроби общего вида в виде суммы простейших дробей, алгоритм вычисления интеграла от дроби общего вида.
Задания для аудиторной работы: раздел 3 № 127 (а)-131 (а) [15]; № 2013, 2015, 2025, 2038, 2041, 2049 [10].
Задания для самостоятельной работы: раздел 3 № 127 (б)-131 (б) [15]; № 2012, 2014, 2027, 2036, 2048 [10].

Практические занятия9-10«Интегрирование тригонометрических и некоторых иррациональных функций».
Контрольные вопросы: формулы универсальной тригонометрической подстановки, приёмы интегрирования иррациональностей.
Задания для аудиторной работы: раздел 3 № 152-174 (нечетные), 139, 141 [15].
Задания для самостоятельной работы: раздел 3 № 152-174 (четные), 140, 142 [15].

Практическое занятие 11 «Контрольная работа 1».

Практические занятия12-13«Понятие определённого интеграла, его основные свойства.Вычисление определённого интеграла с помощью первообразных. Формула Ньютона-Лейбница».
Контрольные вопросы: понятие определённого интеграла, суммы Дарбу, условия существования и основные свойства определённого интеграла, непосредственное интегрирование с помощью формулы Ньютона-Лейбница.
Задания для аудиторной работы: раздел 3 №210 (д), 213 (а,в,д), 214 (е), 216 (а,в,д), 233, 227 (б),№ 249 (а,в,ж,и), 251 (а), 252 [15].
Задания для самостоятельной работы: раздел 3 № 211 (а), 213 (б,г,е), 216 (б,г), 232,249 (б,г,е), 250 [15].

Практическое занятие14«Замена переменной в определённом интеграле».
Контрольные вопросы: формула замены переменной в определённом интеграле, её особенности по сравнению с заменой переменной в неопределённом интеграле.
Задания для аудиторной работы: раздел 3 № 253 (на выбор), 254, 259 (б,г), 260 (б) [15].
Задания для самостоятельной работы: раздел 3 № 253 (на выбор), 259 (а,в), 260 (а) [15].

Практическое занятие 15«Интегрирование по частям в определённом интеграле».
Контрольные вопросы: формула интегрирования по частям, стандартные ситуации интегрирования.
Задания для аудиторной работы: раздел 3 № 266 (на выбор) [15].
Задания для самостоятельной работы: раздел 3 № 266 (на выбор) [15].

Практические занятия16-17«Различные задачи на вычисление определённых интегралов».
Задания для аудиторной работы: № 2231, 2239, 2251, 2259, 2261, 2301, 2303, 2307 [10].
Задания для самостоятельной работы: № 2232, 2236, 2252, 2260, 2262, 2304, 2308 [10].

Практические занятия18-19«Вычисление площадей плоских фигур в декартовых и полярных координатах».
Контрольные вопросы: понятие квадрируемой фигуры, теорема о квадрируемости криволинейной трапеции и её применение,полярная система координат, формулы связи между полярными и декартовыми координатами на плоскости, формула площади для вычисления криволинейного сектора.
Задания для аудиторной работы: раздел 3 № 299, 301, 305, 321, 325, 329, 331, 336, 347, 349 [15].
Задания для самостоятельной работы: раздел 3 № 300, 302, 306, 322, 332, 333, 348, 350 [15].

Практические занятия20-21«Вычисление объёмов тели длины дуги плоской кривой».
Контрольные вопросы: формула объёма тела с заданным поперечным сечением, формула для вычисления объёма тел вращения, вычисление длины дуги плоской кривой.
Задания для аудиторной работы: раздел 3 № 351, 354 (б,в), 361, 365, 374,387, 391, 397, 404, 409 [15].
Задания для самостоятельной работы: раздел 3 № 388, 389, 390, 396 [15].

Практическое занятие 22«Физические приложения определённого интеграла».
Контрольные вопросы: центр тяжести кривой и фигуры, вычисление работы переменной силы.
Задания для аудиторной работы: раздел 3 № 468, 469, 474, 439, 450 [15].
Задания для самостоятельной работы: раздел 3 № 470, 475, 443, 452 [15].

Практическое занятие 23 «Контрольная работа 2».

Практическое занятие24 «Несобственные интегралы».
Контрольные вопросы: понятие несобственных интегралов первого и второго рода, сходимость несобственных интегралов.
Задания для аудиторной работы: раздел 3 №486-492 (нечётные), 495 (а,в,д), 496 (б), 499-503 (нечётные) [15].

Задания для самостоятельной работы: раздел 3 № 486-492 (чётные), 495 (б,г,е), 496 (в), 499-503 (чётные) [15].

3 семестр

Лекция 1 «Сходящиеся числовые ряды и их основные свойства»: **п**онятие числового ряда, сходящиеся и расходящиеся числовые ряды, основные свойства сходящихся рядов.

Лекции 2-3 «Основные признаки сходимости положительных рядов»:критерий сходимости положительных рядов, признаки сравнения, Даламбера, Коши и интегральный признак.

Лекции 4-5 «Ряды с произвольными членами. Абсолютная и условная сходимости»: знакочередующиеся ряды, признак Лейбница, свойства абсолюно сходящихся рядов, условная сходимость и теорема Римана.

Лекции 6-7 «Функциональные ряды и последовательности. Поточечная и равномерная сходимости»:понятие функциональной последовательности и ее сходимости. Поточечная и равномерная сходимости функциональных рядов и теорема Вейерштрасса. Основные свойства равномерно сходящихся рядов.

Лекции 8-13 «Степенные ряды и их приложения»:степенные ряды, радиус и интервал сходимости, основные свойства степенных рядов, разложение функций в степенные ряды, некоторые приложения степенных рядов.

Лекции 14-16 «Ряды Фурье»: понятие тригонометрического ряда, ортонормальные системы функций, тригонометрический ряд Фурье, условия поточечной и равномерной сходимости, почленное дифференцирование ряда Фурье, ряд Фурье для четных и нечетных функций, понятие ряда Фурье по произвольной ортогональной системе функций.

Практическое занятие 1. «Сходящиеся и расходящиеся числовые ряды. Основные свойства сходящихся числовых рядов»

I.*Контрольные вопросы и задания*:

1. Что называется числовым рядом ?
2. Что называется общим членом ряда ?
3. Когда считается ряд заданным ?
4. Как определяется n-я частичная сумма ряда ?
5. Какой ряд называется сходящимся (расходящимся) ?
6. Дайте определение геометрического ряда. При каких условиях геометрический ряд сходится (расходится) ?
7. Сформулируйте основные свойства сходящихся рядов.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

1.1. Для каждого из указанных ниже рядов: 1) найдите сумму n первых членов ряда (S_n); 2) докажите его сходимость, пользуясь непосредственно ее определением; 3) найдите его сумму (S).

а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}+\ldots;$ б) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots;$

в) $\frac{5}{6}+\frac{13}{36}+\ldots+\frac{3^n+2^n}{6^n}+\ldots;$ г) $arctg\,\frac{1}{2}+arctg\,\frac{1}{8}+\ldots+arctg\,\frac{1}{2\cdot n^2}+\ldots.$

1.2. Укажите одну из возможных формул для n-го члена ряда:

$$1+\frac{1}{5}+\frac{1}{9}+\frac{1}{13}+\ldots.$$

1.3. Напишите 5 первых членов ряда по известной формуле для его общего члена $a_n=\frac{(-1)^n(2n-1)}{3^n}$.

1.4. Исследовать на сходимость следующие геометрические ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.5. Для каждого из указанных ниже рядов: 1) найдите сумму n первых его членов (S_n); 2) докажите его сходимость, пользуясь непосредственно ее определением; 3) найдите его сумму (S).

а) $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$; б) $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{2\cdot5}+\ldots+\frac{1}{n(n+3)}+\ldots$

1.6. Укажите одну из возможных формул для n-го члена ряда:
$1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\ldots$

1.7. Напишите 5 первых членов ряда по известной формуле для его общего члена
$a_n=\frac{3+(-1)^n}{n^2+2}$.

1.8. Исследовать на сходимость следующие геометрические ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{4}{3}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Практическое занятие 2. «Необходимый признак сходимости ряда и критерий сходимости Коши».

I.*Контрольные вопросы и задания*:

1. Что называется суммой числового ряда?
2. Что называется n-м остатком сходящегосяряда ?
3. Сформулируйте необходимый признак сходимости числовых рядов.
4. Каково следствие из необходимого признака сходимости числовых рядов?
5. Сформулируйте критерий сходимости числовых рядов.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

2.1. Для каждого из указанных ниже рядов: 1) найдите сумму n первых членов ряда (S_n); 2) найдите его сумму (S); 3) найдите его n-й остаток (R_n).

а) $\frac{2}{1\cdot2\cdot3}+\frac{2}{2\cdot3\cdot4}+\ldots+\frac{2}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}+\ldots$; б) $\frac{2}{1^2\cdot3^2}+\frac{3}{2^2\cdot4^2}+\ldots+\frac{n+1}{n^2\cdot(n+2)^2}+\ldots$.

2.2. С помощью необходимого признака сходимости ряда установите, какие из следующих рядов заведомо расходятся:

а) $0{,}001+\sqrt{0{,}001}+\sqrt[3]{0{,}001}+\ldots+\sqrt[n]{0{,}001}+\ldots$; б) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\ldots+\frac{2n}{3^n}+\ldots$.

2.3. С помощью критерия Коши докажите, что гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

2.4. Для каждого из указанных ниже рядов: 1) найдите сумму n первых членов ряда (S_n); 2) найдите его сумму (S); 3) найдите его n-й остаток (R_n).

а) $\frac{1}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1}{2\cdot 5\cdot 8}+...+\frac{1}{n\cdot(n+3)\cdot(n+6)}+...$; б) $\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+...+\frac{2n+1}{n^2\cdot(n+1)^2}+...$.

2.5. С помощью необходимого признака сходимости ряда установите, какие из следующих рядов заведомо расходятся:

а) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+...+\frac{2n+1}{2n+2}+...$; б) $\frac{1}{1001}+\frac{2}{2001}+\frac{3}{3001}+...+\frac{n}{1000n+1}+....$

2.6. С помощью критерия Коши докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ сходится.

Практическое занятие 3. «Ряды с положительными членами. Необходимое и достаточное условие сходимости положительных рядов. Признаки сравнения положительных рядов»

I.*Контрольные вопросы и задания*:

1. Какой ряд называется положительным ?
2. Каково характеристическое свойство последовательности частичных сумм положительных рядов ?
3. Сформулируйте необходимое и достаточное условие сходимости положительных рядов.
4. Сформулируйте признаки сравнения положительных рядов.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

3.1. Докажите, что если положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ также сходится, а обратное утверждение неверно.

3.2. Решите вопрос о сходимости следующих рядов с помощью признаков сравнения:

а) $\sin\frac{\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{4}+...+\sin\frac{\pi}{2^n}+...$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-4n+5}$;

б) $\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+...+\frac{1}{(n+1)(n+4)}+...$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$;

в) $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+...+\frac{1}{\ln(n+1)}+...$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

3.3. Докажите, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$ сходятся, то и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ также сходится, где $a_n\ge 0$ и $b_n\ge 0$.

3.4. Решите вопрос о сходимости данных рядов с помощью признаков сравнения:

а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 2^3}+...+\frac{1}{(2n-1)\cdot 2^{2n-1}}+...$; в) $tg\frac{\pi}{4}+tg\frac{\pi}{8}+...+tg\frac{\pi}{4n}+...$;

б) $1+\frac{1+2}{1+2^2}+...+\frac{1+n}{1+n^2}+...$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$.

Практическое занятие 4. «ПризнакДаламбера и радикальныйпризнак Коши сходимости положительных рядов».

I.*Контрольные вопросы и задания*:

1. Какой числовой ряд называется положительным (строго положительным) ?
2. Сформулируйте признак Даламбера сходимости положительных рядов.
3. Сформулируйте радикальный признак Коши сходимости положительных рядов.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

4.1. Исследуйте на сходимость следующие ряды с помощью признака Даламбера:

а) $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}+\ldots$; б) $\sin\frac{\pi}{2}+4\sin\frac{\pi}{4}+\ldots+n^2\sin\frac{\pi}{2^n}+\ldots$.

4.2. Исследуйте на сходимость следующие ряды с помощью радикального признака Коши:

а) $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{\ln^n(n+1)}+\ldots$; б) $\arcsin 1+\arcsin^2\frac{1}{2}+\ldots+\arcsin^n\frac{1}{n}+\ldots$.

4.3.Исследуйте на сходимость следующие положительные ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4[\sqrt{5}+(-1)^n]^n}{4^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

4.4. Исследуйте на сходимость следующие ряды с помощью признака Даламбера:

а) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\ldots+\frac{n}{2^n}+\ldots$; б) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}+\ldots$.

4.5. Исследуйте на сходимость следующие ряды с помощью радикального признака Коши:

а) $\frac{2}{3}+\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^4}{9}+\ldots+\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}+\ldots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{n}\right)^n$.

4.6.Исследуйте на сходимость следующие положительные ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n+6}{5^{n+1}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

Практическое занятие 5. «Обобщенный гармонический ряд. Интегральный признак Коши сходимости положительных рядов».

I.*Контрольные вопросы и задания*:

1. Какой ряд называется обобщенным гармоническим рядом ?
2. При каких значениях показателя α обобщенный гармонический ряд сходится (расходится) ?
3. Сформулируйте интегральный признак Коши сходимости положительных рядов.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

5.1. Исследуйте на сходимость следующие ряды с помощью интегрального признака:

а) $\frac{1}{2\ln^2 2}+\frac{1}{3\ln^2 3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}+\ldots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$; в) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$.

5.2. Оцените (сверху и снизу) суммы следующих положительных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

5.3. Исследуйте на сходимость следующие ряды с помощью интегрального признака:

а) $\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}+\ldots+\frac{1}{n\ln n}+\ldots$; б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$.

5.4. Оцените (сверху и снизу) суммы следующих положительных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1,5}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$.

Практическое занятие 6. «Знакочередующиеся ряды и признак Лейбница. Абсолютная и условная сходимость числовых рядов»

I. *Контрольные вопросы и задания*:

1. Какой ряд называется знакочередующимся ?
2. Сформулируйте признак Лейбница.
3. Какой ряд называется рядом Лейбница ?
4. Как оценивается $|S-S_n|$ для рядов Лейбница ?
5. Когда ряд называется абсолютно (условно) сходящимся ?
6. Сформулируйте признак Коши абсолютной сходимости рядов.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

6.1. Выясните, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся:

а) $1-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\ldots$;

б) $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}+\ldots$;

в) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}+\ldots$;

г) $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\ldots+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n-\ln n}$;

е) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3+(-1)^{n+1}}{7+(-1)^n}\right)^n$.

6.2. Покажите, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n{}^2$ сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ сходится абсолютно.

6.3. Сколько достаточно взять членов ряда $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\ldots$, чтобы оценить его сумму с точностью до $0{,}01$; до $0{,}001$?

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

6.4. Выясните, какие из указанных рядов сходятся абсолютно, какие условно, какие расходятся:

а) $1-\frac{1}{3^3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)^3}+\ldots$;

б) $\frac{\sin\alpha}{1}+\frac{\sin 2\alpha}{4}+\ldots+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+\ldots,\quad \alpha\in\boldsymbol{R}$;

в) $2-\frac{3}{2}+..+(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}+\ldots$;

г) $\frac{1}{2}-\frac{8}{4}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}+\ldots$;

д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{n^2}}{n!}$;

е) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4+(-1)^n}{6+(-1)^{n+1}}\right)^n$.

6.5. Сколько достаточно взять членов ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$, чтобы оценить его сумму с точностью до 0,01; до 0,001 ?

Практическое занятие 7. «Ряды с произвольными членами. Перестановка членов ряда»

I.*Контрольные вопросы и задания*:

1. Может ли измениться сумма сходящегося ряда от перестановки членовэтого ряда ?
2. Когда ряд называется безусловно сходящимся ?
3. При какой сходимости сумма ряда не зависит от перестановки членов этого ряда ?
4. Сформулируйте теорему Римана об условно сходящихся рядах.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

7.1. Зная, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$ равна $\ln 2$, найдите сумму ряда

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\ldots,$$

полученного перестановкой членов исходного ряда.

7.2. Исследуйте на сходимость ряд $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^5}+\ldots+\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{1}{3^{2k-1}}+\ldots$. Будет ли сходящимся ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{1}{3^{2k-1}}\right)$?

7.3. При каких значениях параметра α сходится ряд

$$1-\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^{\alpha}}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6^{\alpha}}+\frac{1}{7}-\ldots?$$

7.4. Докажите, что ряд $1+\left(1-\frac{3}{4}\right)+\left(1-\frac{8}{9}\right)+\ldots+\left(1-\frac{n^2-1}{n^2}\right)+\ldots$ сходится. Будет ли сходиться ряд, получаемый из данного, если убрать скобки ?

7.5. Пусть даны два ряда $\sum_{m=1}^{\infty}a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ с неотрицательными членами. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$: а) если и ряд $\sum_{m=1}^{\infty}a_n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ расходятся; б) если ряд $\sum_{m=1}^{\infty}a_n$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ сходится ?

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

7.6. Зная, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$ равна $\frac{\pi^2}{12}$, найдите сумму ряда

$$1+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{11^2}-\frac{1}{6^2}+\ldots\quad,$$

полученного перестановкой членов исходного ряда.

7.7. Исследуйте на сходимость ряд $\frac{1}{3}-1+\frac{1}{7}-\frac{1}{5}+\frac{1}{11}-\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k-3}+\ldots$.Будет ли сходящимся ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k-3}\right)$?

7.8. При каких значениях параметра α сходится ряд

$$1+\frac{1}{3^\alpha}-\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{5^\alpha}+\frac{1}{7^\alpha}-\frac{1}{4^\alpha}+\dots \text{ ?}$$

7.9. Докажите, что ряд $\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)+\dots+\left(\frac{1}{(2k-1)^2}-\frac{1}{(2k)^2}\right)+\dots$ сходится. Будет ли сходиться ряд, получаемый из данного, если убрать скобки ?

Практическое занятие 8. «Умножение сходящихся числовых рядов»

I.*Контрольные вопросы и задания*:

1. Дайте определениеобщего понятия произведения двух рядов.
2. Что можно сказать о сходимости произведения двух абсолютно сходящихся рядов?
3. Дайте определение произведения двух рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ по Коши.
4. В чем состоит основное отличие понятия *произведения рядов по Коши* от общего понятия *произведения двух рядов* ?
5. Сформулируйте теорему Мертенса об умножении рядов по Коши.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

8.1. Докажите, что если хотя бы один из двух рядов с положительными членами расходится, то расходится их произведение по Коши

8.2. Найдите произведениепо Коши рядов $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} nx^{n-1}$, $|x|<1$.

8.3. Исследуйте на сходимость произведение по Коши рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}.$$

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

8.4. Возведите в квадрат ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$, $|x|<1$.

8.5. Исследуйте на сходимость произведение по Коши рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n^3}} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}.$$

8.6. Покажите, что ряд $\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)^2$ расходится. Какое условие теоремы Мертенса об умножении рядов не выполнено?

Практическое занятие 9. «Понятие о функциональном ряде. Область сходимости функционального ряда»

I.*Контрольные вопросы и задания*:

1. Дайте определение функционального ряда.
2. Какая точка называется точкой сходимости (расходимости) функционального ряда?
3. Что называется областьюсходимости функционального ряда?
4. На каком множестве определена сумма функционального ряда?

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

9.1. Каковы области сходимости следующих рядов:

а) $x+x^4+\ldots+x^{n^2}+\ldots$;б) $x+\dfrac{x^2}{\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}+\ldots$;в) $xtg\dfrac{x}{2}+x^2tg\dfrac{x}{4}+\ldots+x^ntg\dfrac{x}{2^n}+\ldots$.

9.2. Найдите суммы следующих рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}x^{2(n-1)}$;б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}2^{n-1}x^{n-1}$;

в) $\dfrac{3}{1+3x}+\dfrac{5}{(1+3x)(1+5x)}+\dfrac{7}{(1+3x)(1+5x)(1+7x)}+\ldots \quad , \quad x>0.$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

9.3. Каковы области сходимости следующих рядов:

а) $\ln x+\ln^2 x+\ldots+\ln^n x+\ldots$; б) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{x^2}{2+\sqrt{2}}+\ldots+\dfrac{x^n}{n+\sqrt{n}}+\ldots$;

в) $\sin\dfrac{x}{2}+\sin\dfrac{x}{4}+\ldots+\sin\dfrac{x}{2^n}+\ldots$;г) $e^{-x}+e^{-4x}+\ldots+e^{-n^2x}+\ldots$.

9.4. Найдите суммы следующих рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-3)^{n-1}}{3^n}$;б) $\dfrac{2}{1+2x}+\dfrac{3}{(1+2x)(1+3x)}+\dfrac{4}{(1+2x)(1+3x)(1+4x)}+\ldots \quad , \quad x>0.$

Практическое занятие 10. «Понятие о равномерной сходимости функциональных рядов. Теорема Вейерштрасса»

I.*Контрольные вопросы и задания*:

1Какой ряд называется равномерно сходящимся на множестве E ?

2. Когда числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}C_n$ называется мажорантным для функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ на множестве E?

3. Сформулируйте признак Вейерштрасса о равномерной сходимости.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

10.1. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)$ сходится на $[0;1]$ неравномерно.

10.2.Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^{-2}}{1+(nx)^2}$ равномерно сходится на $\boldsymbol{R}=(-\infty,+\infty)$.

10.3. Покажите, что ряд $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}+\dfrac{1}{2\sqrt{1+2x}}+\ldots+\dfrac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}}+\ldots$ равномерно сходится на $\boldsymbol{R}_+=(0,+\infty)$. Сколько нужно взять членов, чтобы при любом неотрицательномx можно было вычислить сумму ряда с точностью до 0,001?

10.4. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{m-1}}{x^2+n}$ сходится на $\boldsymbol{R}=(-\infty,+\infty)$. Почему к данному ряду признак Вейерштрасса о равномерной сходимостине применим?

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

10.5. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}x^2(1-x^2)^{n-1}$ сходится на $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$ неравномерно.

10.6.Докажите, что ряд $1+\frac{\sin x}{1!}+\ldots+\frac{\sin nx}{n!}+\ldots$ равномерно сходится на $\boldsymbol{R}=(-\infty,+\infty)$.

10.6. Докажите, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n}$ сходится равномерно на $\boldsymbol{R}=(-\infty,+\infty)$, а ряд, составленный из абсолютных величинего членов, сходится неравномерно (т.е. признак Вейерштрасса о равномерной сходимостик этому ряду не применим).

Практическое занятие 11. «Почленное интегрирование функциональных рядов»

I.*Контрольные вопросы и задания*:

1. Когда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ называется равномерно сходящимся на множестве E ?

2. Сформулируйте следующие теоремы о свойствах равномерно сходящихся функциональных рядов: а) о непрерывности суммы ряда; б) о почленном интегрировании ряда.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

11.1. Покажите, что ряд $x^2+x^6+\ldots+x^{4n-2}+\ldots$ равномерно сходится в каждом промежутке вида $-1+\omega\le x\le 1-\omega$, где ω – любое положительное число, меньшее 1. Интегрированием данного ряда найдите в интервале $(-1,1)$ сумму ряда $\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{7}+\ldots+\frac{x^{4n-1}}{4n-1}+\ldots$

11.2. Функция f определяется равенством $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{10^n}$. Покажите, что функция $f(x)$ определена и непрерывна при любом x. Найдите $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

11.3. Определите область сходимости ряда $x+\frac{x^2}{2^2}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots$.

11.4. Определите область существования функции $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x+n(-1)^n}{x^2+n^2}$ и исследуйте ее на непрерывность.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

11.5. Покажите, что ряд $x^2+x^4+\ldots+x^{2n}+\ldots$ равномерно сходится в каждом промежутке вида $-1+\omega\le x\le 1-\omega$, где ω – любое положительное число, меньшее 1. Интегрированием данного ряда найдите в интервале $(-1,1)$ сумму ряда $\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$

11.6. Функция f определяется равенством $f(x)=e^{-x}+2e^{-2x}+\ldots+ne^{-nx}+\ldots$. Покажите, что $f(x)$ непрерывна на интервале $(0,+\infty)$. Вычислите $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)dx$.

11.6. Определите область существования функции $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$ и исследуйте ее на непрерывность.

Практическое занятие 12. «Почленное дифференцирование функциональных рядов»

I.*Контрольные вопросы и задания*:

1. Дайте определение равномерной сходимости функционального ряда на множестве *E*.
2. Сформулируйте теорему о почленном дифференцировании функциональногоряда.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

12.1. Найдите сумму ряда $\frac{x^2}{1\cdot 2}-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}+\ldots$.

12.2. Убедитесь, что ряд $\frac{\sin 2\pi x}{2}+\frac{\sin 4\pi x}{4}+\ldots+\frac{\sin 2^n\pi x}{2^n}+\ldots$ равномерно сходится на всей числовой оси. Покажите, что этот ряд нельзя почленно дифференцировать ни в каком числовом промежутке.

12.3. Докажите справедливость равенства

$$x+\frac{x^5}{5}+\frac{x^9}{9}+\ldots+\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\ldots \quad =\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x+\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}.$$

12.4. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{e^{(x-n)^2}}$ сходится равномерно на $[0;1]$ и допускает на этом отрезке дифференцирование любого порядка.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

12.5. Найдите сумму ряда $x+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{4n-3}}{4n-3}+\ldots$.

12.6. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ можно почленно дифференцировать на любом числовом промежутке.

12.7. Докажите справедливость равенства $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3!}x^n \quad =\frac{1}{(1-x)^4}$.

Практическое занятие 13. «Степенные ряды. Радиус и интервал сходимости степенных рядов»

I.*Контрольные вопросы и задания*:

1. Дайте определение степенного ряда.
2. Сформулируйте теорему Абеля и следствие из нее.
3. Что называется радиусом сходимости степенного ряда ?
4. Какова структура множества сходимости степенного ряда?
5. Могут ли множество сходимости и интервал сходимости степенного ряда совпадать ?

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

13.1. Найти интервалы и множества сходимости данных степенных рядов:

а) $10x+100x^2+\ldots+10^n x^n+\ldots$; б) $x+\frac{x^2}{20}+\ldots+\frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}+\ldots$;в) $3x+\ldots+(n-1)3^{n-1}x^{n-1}+\ldots$;

г) $x+\frac{(2x)^2}{2!}+\ldots+\frac{(nx)^n}{n!}+\ldots$ (при исследовании сходимости на правом конце интервала учесть, что факториалы больших чисел могут быть выражены приближенно формулой Стирлинга: $n!\approx\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi\ n}$);

д) $\frac{\ln 2}{2}x^2+\frac{\ln 3}{3}x^3+\ldots+\frac{\ln(n+1)}{n+1}x^{n+1}+\ldots$;е) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1+(-1)^n}{2+(-1)^{n+1}}\right)^n(x-2)^n=1+4(x-2)^2+\ldots$

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

13.2. Найти интервалы и множества сходимости данных степенных рядов:

а) $x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}+\ldots$;б) $\frac{x}{1\cdot 2}+\frac{x^2}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{x^n}{n(n+1)}+\ldots$;

в) $x+4x^2+\ldots+(nx)^n+\ldots$; г) $2x+\left(\frac{9}{4}x\right)^2+\ldots+\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^n x\right]^n+\ldots$;

д) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2+(-1)^n}{7+(-1)^{n+1}}\right)^n(x-1)^n=1+\frac{1}{8}(x-1)+\ldots$.

Практическое занятие 14. «Основные свойства степенных рядов»

I.*Контрольные вопросы и задания*:

1. Сформулируйте свойство о равномерной сходимости степенных рядов.
2. Может ли множество сходимости степенного ряда отличаться от множество сходимости ряда, полученного при почленном интегрировании?
3. Верно ли утверждение «Степенной ряд можно почленно дифференцировать любое число раз в интервале его сходимости»?

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

14.1. Докажите, что сумма, разность и произведение двух степенных рядов с центром интервала сходимости в одной и той же точке также являются степенными рядами с центрами интервалов сходимости в той же точке.

14.2.Найдите суммы следующих рядов: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}n^2x^n$.

14.3. Докажите, что функция $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ бесконечно дифференцируема на $(-\infty,+\infty)$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

14.4. Докажите, что функция $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ непрерывна на $\boldsymbol{R}=(-\infty,+\infty)$.

14.5.Найдите суммы следующих рядов: а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}n(n-1)x^n$.

14.6. Докажите, что функция $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ бесконечно дифференцируема на $(-\infty,+\infty)$.

Практическое занятие 15. «Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора»

I.*Контрольные вопросы и задания*:

1. Что называется разложением функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0?
2. Каково необходимое условие разложимости функции $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0?
3. Каково необходимое и достаточное условие разложимости функции $f(x)$ в ряд Тейлора в интервале $(-R+x_0,\ R+x_0)$?

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

15.1. Разложите функцию $y = \ln x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 1$.

15.2. Разложите функцию $y = \dfrac{1}{x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 3$, а затем в окрестности точки $x_0 = -2$.

15.3. Разложите функцию $y = ch\, x$ в ряд Маклорена.

15.4. Найдите первые пять членов ряда Тейлора для функции $y = \ln(1 + e^x)$ в окрестности точки $x_0 = 0$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

15.5. Разложите функцию $y = \sin\dfrac{\pi\ x}{4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 2$.

15.6. Разложите функцию $y = x^2 e^x$ в ряд Маклорена.

15.7. Найдите первые пять членов ряда Тейлора для функции $y = e^{\cos x}$ в окрестности точки $x_0 = 0$.

Практическое занятие 16. «Разложение основных элементарных функций в степенные ряды»

I.*Контрольные вопросы и задания*:

1. Какие функции называются основными элементарными функциями ?

2. Разложите в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$ (т.е. в ряд Маклорена) функции $e^x,\ \cos x,\ \sin x,\ \ln(1+x),\ (1+x)^m,$ где m – любое действительное число.

3. На каком множестве сумма, разность, произведение двух степенных рядов обязательно будет абсолютно сходящимся степенным рядом?

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

16.1. Разложите каждую из данных функций в степенной ряд в окрестности точки $x = 0$ (используя ряды Маклорена для функций e^x, $\cos x,\ \sin x,\ \ln(1+x),\ (1+x)^m$):

а) $y = \cos^2 x$;

б) $y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0; \end{cases}$

в) $y = \sqrt{1 + x^2}$;

г) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

16.2. Разложите каждую из данных функций в степенной ряд в окрестности точки $x = 0$ (используя ряды Маклорена для функций e^x, $\cos x,\ \sin x,\ \ln(1+x),\ (1+x)^m$):

а) $y = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 1 & \text{при } x = 0; \end{cases}$

б) $y = \sin\dfrac{x}{2}$;

в) $y = (x - tgx)\cos x$;

г) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{1 + x^3}}$.

Практическое занятие 17. «Некоторые применения степенных рядов»

I.*Контрольные вопросы и задания*:

1.Как применяются ряды Тейлора:

а) при вычислении приближенных значений функций;
б) при вычислении определенных интегралов;
в) при вычислении корней?

2. Какие полезные факты можно установить, применяя степенные ряды как способ задания функций ?

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

17.1. Вычислите приближенное значение $\sqrt[3]{e}$, взяв лишь три члена разложения в ряд Маклорена функции $f(x)=e^x$, и оцените совершаемую при этом погрешность.

17.2. Пользуясь формулой разложения в ряд Маклорена функции $\sin x$, вычислите $\sin 1^o$ с точностью 0,0001.

17.3. Вычислите приближенное значение определенного интеграла $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx$, взяв ровно три члена разложения подынтегральной функции в ряд, и оцените погрешность, совершаемую при этом.

17.4. Вычислите с точностью до 0,001 интеграл $\int\limits_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3}dx$.

17.5. Пользуясь разложением функции в ряд Тейлора, вычислите предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\ln(\sqrt{1+x^2}-x)}{x^3}$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

17.6. Вычислите приближенное значение $\sqrt[3]{10}=2\sqrt[3]{1{,}25}$, взяв четыре члена разложения в ряд Маклорена функции $f(x)=(1+x)^m$, и оцените погрешность.

17.7. Пользуясь формулой разложения в ряд Маклорена функции $\cos x$, вычислите $\cos 1^o$ с точностью 0,001.

17.8. Выразите в форме ряда неопределенный интеграл $\int \frac{\cos x}{x}dx$, используя разложение в ряд подынтегральной функции; укажите область сходимости полученного ряда.

17.9. Вычислите приближенное значение определенного интеграла $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$, взяв два члена разложения подынтегральной функции в ряд, укажите погрешность.

17.10. Пользуясь разложением функции в ряд Тейлора, вычислите $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2(tgx-\sin x)-x^3}{x^5}$.

Практическое занятие 18. «Обзорное занятие по степенным рядам»

I.*Контрольные вопросы и задания*:

1. Что называется радиусом сходимости степенного ряда?

2. Если R – радиус сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, то какова может быть область сходимости этого ряда ?

3. Сформулируйте теоремы о почленном интегрировании и почленном дифференцировании степенных рядов.

4. Каковы необходимые условия разложимости функции в степенной ряд ?

5. Какие применения степенных рядов Вы знаете ?

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

18.1. Найти промежуток сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+c^n}$, с ≥ 0, и исследовать поведение ряда на концах промежутка.

18.2. Применяя различные методы, найти разложение в ряд по степеням x функции $y = x\,arctgx - \ln\sqrt{1+x^2}$.

18.3. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ имеет радиус сходимости R_1, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ – радиус сходимости $R_2<R_1$, то каково соотношение между R_1, R_2 и радиусом сходимости R ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$?

18.4. Пользуясь разложением функции в ряд по степеням x, вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x+x^2)+\ln(1-x+x^2)}{x(e^x-1)}$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

18.5. Найти промежуток сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}c^{\ln n}x^n$, с > 0, и исследовать поведение ряда на концах промежутка.

18.6. Применяя различные методы, найти разложение в ряд по степеням x функции $y = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}arctg\;x$.

18.7. Производя соответствующие действия со степенными рядами, получить разложение в ряд по степеням x функции $y = e^x\sin x$.

18.8. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ имеет радиус сходимости R_1, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n$ – радиус сходимости $R_2<R_1$, то каково соотношение между R_1, R_2 и радиусом сходимости R ряда $\sum_{n=0}^{\infty}a_n b_n x^n$?

Практическое занятие 19. «Тригонометрический ряд Фурье. Ортогональные системы функций»

I.*Контрольные вопросы и задания*:

1. Какой ряд называется тригонометрическим ?
2. Каково основное свойство суммы $S(x)$ тригонометрического ряда?
3. Какая система функций называется ортогональной (ортонормированной) на отрезке $[a; b]$?
4. Какой ряд называется тригонометрическим рядом Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi; \pi]$?

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

19.1. С помощью формул Эйлера $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ и $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ докажите равенство

$$\cos\varphi+\cos 2\varphi+\ldots+\cos n\varphi = \frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}},\ \text{где } \varphi\neq 2\pi k,\ n\in\mathbf{N},\ k\in\mathbf{Z}.$$

19.2. Разложить функцию $y = x^2$ в ряд Фурье: 1) в интервале $[-\pi; \pi]$; 2) в интервале $(0; 2\pi)$.

При помощи полученных разложений вычислить суммы числовых рядов:

$$s_1 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots\ ; \qquad s_2 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \ldots;$$

$$s_3 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \ldots\ .$$

19.3. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} 1 & при\ x \in (-\pi,\ 0), \\ 3 & при\ x \in (0,\ \pi). \end{cases}$

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

19.4. Докажите соотношения:

1) $\cos\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos(2n-1)\varphi = \dfrac{\sin 2n\varphi}{2\sin\varphi}$, *где* $\varphi \neq \pi k$, $n \in \boldsymbol{N},\ k \in \boldsymbol{Z}$;

2) $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \ldots + \sin n\varphi = \dfrac{\sin\dfrac{n\varphi}{2}\sin\dfrac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin\dfrac{\varphi}{2}}$, *где* $\varphi \neq 2\pi k$, $n \in \boldsymbol{N},\ k \in \boldsymbol{Z}$.

19.5. Разложите в ряд Фурье функцию $y = x^3$ в интервале $(-\pi;\pi)$.

Практическое занятие 20. «Некоторые достаточные условия разложимости функции в тригонометрический ряд Фурье»

I.*Контрольные вопросы и задания*:

1. Какая функция называется кусочно-непрерывной (кусочно-гладкой) на отрезке $[a,b]$?
2. Сформулируйте достаточные условия поточечной сходимости (равномерной сходимости) тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$.
3. Сформулируйте достаточные условия m раз почленного дифференцирования тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[-\pi,\pi]$.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

20.1. Постройте график периодического продолжения функции $f(x) = x^2$, заданной на $[-\pi,\pi]$.

20.2. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} 1 & при\ x \in (-\pi,\ 0), \\ 0 & при\ x = 0, \\ 1 & при\ x \in (0,\ \pi). \end{cases}$

20.3. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x) = x^4$ в промежутке $[-\pi;\ \pi]$ и докажите, что полученный ряд сходится равномерно к данной функции на этом промежутке.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

20.4. Постройте график периодического продолжения функции $f(x) = |x|$, заданной на $[-\pi,\pi]$.

20.5. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x) = e^x$ в интервале $(-\pi;\ \pi)$/

20.5. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$ в промежутке $[-\pi;\ \pi]$ и докажите, что полученный ряд сходится равномерно к данной функции на этом промежутке.

Практическое занятие 21. «Тригонометрические ряды Фурье для четных и нечетных функций»

I.*Контрольные вопросы и задания*:

1. Какова особенность тригонометрического ряда Фурье четной (нечетной) функции, заданной на $(-\pi;\pi)$?

2. Как можно разложить функцию $f(x)$, заданную на $(0;\pi)$, в ряд по синусам (косинусам) ?

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

21.1. Разложите функцию $y = x^2$ в интервале $(0;\pi)$ в ряд синусов.

21.2. Разложите функцию $y = \cos ax$ (a – целое число) в интервале $(0;\pi)$ в ряд синусов.

21.3. Разложите функцию $y = x(\pi - x)$ в ряд синусов в интервале $(0;\pi)$. Использовать полученный результат для нахождения суммы числового ряда $1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3} + \ldots$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

21.4. Разложите в ряд по синусам функцию $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ в интервале $(0;\pi)$.

21.5. Разложите в ряд по косинусам функцию $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ в интервале $(0;\pi)$.

21.6. Разложите функцию $y = chx$ в интервале $(0;\pi)$ в ряд косинусов и в ряд синусов.

Практическое занятие 22. «Ряд Фурье по произвольной ортогональной системе функций»

I.*Контрольные вопросы и задания*:

1. Дайте определение ряда Фурье по произвольной ортогональной на $[a,b]$ системе функций.

2. Какой ряд называется тригонометрическим рядом Фурье общего вида ?

3. Сформулируйте достаточные условия сходимости (равномерной сходимости) тригонометрического ряда общего вида.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

22.1. Разложите в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если } x \in [-1, 0), \\ x, & \textit{если } x \in (0, 1]. \end{cases}$

22.2. Разложите в тригонометрический ряд Фурье функцию $g(x) = \frac{x}{2}, \quad \textit{если } x \in [0, 2\pi]$.

22.3. Разложите в ряд Фурье по косинусам функцию $f(x) = \begin{cases} \frac{l}{2} - x, & \textit{если } x \in (0, \frac{l}{2}], \\ 0, & \textit{если } x \in (\frac{l}{2}, l), \quad l > 0. \end{cases}$

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

22.4. Разложите в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} 0, & \textit{если } x \in (-2, 0), \\ 2, & \textit{если } x \in (0, 2). \end{cases}$

22.5. Разложите в ряд Фурье по косинусам функцию $q(x) = \begin{cases} 0, & \textit{если } x \in (0, \frac{l}{2}], \\ x - \frac{l}{2}, & \textit{если } x \in [\frac{l}{2}, l), \quad l > 0. \end{cases}$

22.6. Разложите в ряд Фурье по синусам функцию $f(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x\in[0,\frac{l}{2}), \\ l-x, & \text{если } x\in[\frac{l}{2},l], \quad l>0. \end{cases}$

Практическое занятие 23. «Обзорное занятие по тригонометрическим рядам Фурье»

I.*Контрольные вопросы и задания*:

1. При изучении каких классов функций возникает необходимость в использовании тригонометрических рядов Фурье ?

2. Каковы достаточные условия того, что тригонометрический ряд Фурьефункции $f(x)$ сходится в точке $x_0\in[-\pi,\pi]$, причем так, что сумма этого ряда $S(x_0)$ равняется значению данной функции в точке x_0 ?

3. Сформулируйте достаточные условия равномерной сходимости общего тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ на отрезке $[-l,l]$.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

23.1Разложите функцию $y=|\cos x|$ в ряд Фурьев промежутке$[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$. Использовать полученный результат для нахождения суммы числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1}$.

23.2. Разложить функцию $y=ax+b,$ где a и $b-$постоянные, в промежутке [0;*l*] в ряд синусов.

23.3. Разложите функцию $y=\mathrm{sh}x$ в промежутке$[-\pi,\pi]$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

23.4. Разложите функцию $y=|\sin x|$ в ряд Фурьев промежутке$[-\pi,\pi]$.

23.5. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x)=\begin{cases} -x-1 & \text{при } x\in[-1,0), \\ 0 & \text{при } x=0, \\ -x+1 & \text{при } x\in(0,1]. \end{cases}$.

23.6. Разложите в ряд по косинусам функцию $y=\frac{x}{2}$ в промежутке $[0,2]$.

Практическое занятие 24. «Контрольная работа»

Образец варианта письменного задания

24.1. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ сходится, и найдите его сумму.

24.2. Используя свойства арифметических операций над сходящимися рядами, установите сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2}\right)$.

24.3. Разложите функцию $y=(x-tgx)\cos x$ в окрестности точки *x*= 0, пользуясь формулами разложения в ряд Маклорена функций e^x, $\cos x$, $\sin x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^m$, где *m* – любое действительное число.

24.4. Вычислите с точностью до 0,001 интеграл $\int\limits_{0}^{0,5} \frac{arctg\, x}{x} dx$.

24.5. Разложите функцию $f(x)=\begin{cases} -x & \text{при } -\pi \le x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{\pi} & \text{при } \quad 0 < x \le \pi \end{cases}$ в тригонометрический ряд Фурье на отрезке [-π, π].

4 семестр

Лекции 1-4 «Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность»: понятие n-мерного евклидова пространства. Открытие и замкнутые множества. Понятие области. Функции нескольких переменных. График и линии уровня функции двух переменных. Предел и непрерывность функций нескольких переменных.

Лекции 5-9 «Частные производные и дифференцируемость функций нескольких переменных»: понятие частных производных, дифференцируемость функций нескольких переменных, дифференцирование сложной функции, частные производные и дифференциалы высших порядков, формула Тейлора, неявные функции, экстремумы функций двух переменных.

Лекции 10-12 «Двойные и тройные интегралы»: понятие двойного интеграла и его основные свойства. Вычисление двойных интегралов и формула замены переменных в двойном интеграле, понятие тройных интегралов, приложения двойных и тройных интегралов.

Лекции 13-16 «Криволинейные интегралы и их приложения»:понятие криволинейного интеграла второго рода и способы его вычисления. Криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру и формула Грина, условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Понятие криволинейного интеграла первого рода и его связь с криволинейным интегралом второго рода. Приложения криволинейных интегралов.

Планы и содержание практических занятий в 4 семестре изложено учебном пособии [6].

Самостоятельная работа

Задания для самостоятельной работы приводятся в планах практических занятий.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Текущая аттестация осуществляется на каждом практическом занятии в процессе фронтального опроса, выполнения заданий для аудиторной работы, в процессе проверки домашней самостоятельной работы.

С целью дифференциации уровня подготовки бакалавров и для ликвидации имеющихся при изучении дисциплины задолженностей студентам предлагаются индивидуальные дидактические задания и домашние работы, которые выполняются в процессе внеаудиторной работы и сдаются на проверку преподавателю.

Проведение текущего контроля осуществляется также посредством проведения аудиторных контрольных работ и разноуровневых самостоятельных работ.

Оценочные средства

I.Контрольные вопросы для проверки теоретической подготовки к практическому занятию.

Перечень вопросов приводится в планах практических занятий.

II.Задания для самостоятельной работы.

Перечень практических заданий для самостоятельной работы приводится в планах практических занятий.

III.Контрольные работы по дисциплине.

Проведение текущего контроля осуществляется также посредством проведения аудиторных письменных контрольных работ (два раза в течение семестра на 1 курсе и один раз в семестр на 2 курсе).

1 семестр

Образец контрольной работы №1

1. Докажите, что число $\sqrt{5}$ иррациональное.
2. а) Найдите предел последовательности $x_n = \dfrac{3n^2 - n + 1}{2n^3 + n + 2}$.

   б) Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3}$.
3. Исследуйте функцию на непрерывность: $f(x) = \begin{cases} 2^x, & если\ x < 0, \\ x + 1, & если\ x \ge 0. \end{cases}$

Критерии оценивания контрольной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно реализован каждый метод решения	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	3,75-4
2	Хорошо	2,75-3,5
3	Удовлетворительно	2-2,5
4	Неудовлетворительно	менее 2

Образец контрольной работы № 2

1. Найдите производную третьего порядка для функции $y = \ln(x+1)$.
2. Вычислите предел $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x-1)}{ctg\,\pi x}$.
3. Из всех прямоугольников периметра p найдите тот, который имеет наибольшую площадь.
4. Исследуйте функцию $y = x + \dfrac{1}{x}$ и постройте ее график.

Критерии оценивания контрольной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно реализован каждый метод решения (последняя задача – 2 балла)	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов

1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

2 семестр

Образец контрольной работы № 1

1. Найдите первообразную функции $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, если ее график проходит через точку $A(1,\, 2\pi)$.
2. Вычислите неопределённые интегралы:

а) $\int \frac{dx}{(5-3x)^3}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-4x-x^2}}$; в) $\int \dfrac{dx}{3+5\cos x}$; г) $\int \dfrac{xdx}{(x+1)(2x-1)(x^2-1)}$.

Критерии оценивания контрольной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно реализован каждый метод решения	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25; 0,5; 0,75 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

Образец контрольной работы № 2

1. Вычислите объёмтела, получаемого при вращении вокруг оси Ох фигуры, ограниченной графиками функций $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.
2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho=\sin 2\varphi$;
3. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы растянуть пружину на 6 см, если сила 1 Н растягивает её на 1 см.

Критерии оценивания контрольной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Решена одна задача	0-3
2	Решены две задачи	0-4
3	Решены три задачи	0-5

(*) Возможна градация в 0,25; 0,5; 0,75 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,5-5
2	Хорошо	3,5-4
3	Удовлетворительно	2,5-3
4	Неудовлетворительно	менее 2,5

3 семестр

Образец контрольной работы

1. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ сходится, и найти его сумму.

2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n+n^2}{3^n+n}$.

3. Используя свойства арифметических операций над сходящимися рядами, установите сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n^2}\right)$.

4. Пользуясь разложением функции в ряд Тейлора, вычислить $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+\cos x}{x^3\sin x}-\frac{3}{x^4}\right)$.

5. Разложить функцию $f(x)=\begin{cases}-x & \text{при } -\pi\le x\le 0,\\ \frac{x^2}{\pi} & \text{при } 0<x\le\pi\end{cases}$ в тригонометрический ряд Фурье на отрезке [-π, π].

Критерии оценивания контрольной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно реализован каждый метод решения	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

4 семестр

Образец контрольной работы

1.Найти и изобразить область определения функции $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

2. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}\left((x^2+y^2)e^{-(x+y)}\right)$.

3. Является ли функция $f(x,y)=\sqrt[5]{x^5+y^5}$ дифференцируемой в точке O(0;0)? Ответ обосновать.

4. Исследовать на экстремум функцию $U=x^2-2xy+4y^3$.

5. Вычислить двойной интеграл

$\iint\limits_D (x+y^2)dxdy$ по области D, ограниченной кривыми $y=x$ и $y=x^2$.

6. Вычислить криволинейный интеграл $\oint\limits_L (x+y)dx-(x-y)dy$,

где L – эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$ применив формулу Грина.

Критерии оценивания контрольной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно реализован каждый метод решения	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	5,75-6
2	Хорошо	4,75-5,5
3	Удовлетворительно	3-4,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация осуществляется посредством проведения экзамена в 1, 2, 3 и 4 семестрах.

Вопросы для подготовки к экзамену и образцы экзаменационных заданий.

1 семестр

Вопросы к экзамену

1. Множество рациональных чисел и их основные свойства.
2. Действительные числа и их основные свойства.
3. Ограниченные и неограниченные множества. Грани и точные грани множеств.
4. Модуль действительного числа и его свойства.
5. Понятие числовой последовательности. Ограниченные и неограниченные числовые последовательности. Монотонные последовательности. Примеры.
6. Бесконечно малые последовательности и их свойства.
7. Бесконечно большие последовательности. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями.
8. Понятие предела последовательности. Признак предела последовательности.
9. Свойства сходящихся последовательностей.
10. Предельный переход в неравенствах.
11. Сходимость монотонных последовательностей. Число e.
12. Теорема о вложенных стягивающихся отрезках.
13. Понятие подпоследовательности. Предел последовательности и подпоследовательности.
14. Теорема Больцано-Вейерштрасса.
15. Понятие фундаментальной последовательности. Критерий Коши.
16. Понятие функции одной переменной. Способы задания функции. Ограниченные и неограниченные функции. Монотонные функции.
17. Предел функции в точке. Эквивалентность определений предела функции по Коши и по Гейне.
18. Свойства предела функции в точке.
19. Предел функции на бесконечности.
20. Первый замечательный предел.
21. Бесконечно малые функции. Признак предела функции. Сравнение бесконечно малых.
22. Второй замечательный предел.
23. Непрерывность функции в точке.
24. Свойства функций, непрерывных в точке.
25. Односторонние пределы функции в точке. Примеры.
26. Точки разрыва функции и их классификация.
27. Понятие обратной функции. Существование и непрерывность обратной функции.
28. Первая и вторая теоремы Больцано-Коши.
29. Первая теорема Вейерштрасса.

30. Вторая теорема Вейерштрасса.
31. Понятие производной функции. Связь между существованием производной и непрерывностью.
32. Правила вычисления производных.
33. Производная сложной функции. Примеры. Логарифмическая производная.
34. Производная обратной функции. Примеры.
35. Понятие дифференцируемости функции.
36. Понятие дифференциала и его применение в приближенных вычислениях. Инвариантность формы первого дифференциала.
37. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Лейбница.
38. Теорема Ферма. Теорема Ролля.
39. Теорема Лагранжа. Теорема Коши.
40. Правила Лопиталя. Примеры.
41. Формула Тейлора для функции одной переменной.
42. Признак постоянства функции.
43. Исследование функции на монотонность.
44. Исследование функции на экстремум.
45. Алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке. Пример.
46. Направление выпуклости графика функции. Достаточное условие выпуклости графика функции.
47. Точки перегиба графика функции. Достаточные условия точек перегиба.
48. Асимптоты графика функции.

Образец экзаменационного задания

1. Производные основных элементарных и гиперболических функций.
2. Предел числовой последовательности (определение). Свойства предела числовой последовательности (с доказательством необходимого условия сходимости).
3. Найти области определения функций:

а) $f(x)=\dfrac{3x-1}{2x^2-3x-1}$; б) $f(x)=\dfrac{x+9}{\sqrt{8-x^3}}$;

в) $f(x)=\lg(2x^2-6x)$; г) $f(x)=\arcsin\dfrac{2-x}{7}$.

4. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}(n-\sqrt{n^2+2n})$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n-1}{4n+5}\right)^{n+8}$; в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-64}{2x^2-x-28}$;

г) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\cos 4x}{arctg^2(\sin x)}$.

5. Исследовать функцию на непрерывность: $f(x)=\begin{cases} e^{1/x}, \ x<0, \\ 1-x, \ 0\le x\le 1, \\ \dfrac{1}{1-x}, \ x>1. \end{cases}$

Критерии оценивания ответа на экзамене

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Правильный ответ на вопрос	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25, 0,5 и 0,75 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

2 семестр

Вопросы к экзамену

1. Понятие первообразной функции одной переменной (определение, примеры, доказательство теоремы о структуре множества первообразных).
2. Понятие неопределённого интеграла. Свойства неопределённого интеграла (с доказательством теоремы об интегрировании алгебраической суммы функций).
3. Таблица неопределённых интегралов. Примеры применения.
4. Непосредственное интегрирование (понятие, приёмы, примеры).
5. Метод замены переменной в неопределённом интеграле (понятие, док-во теоремы, примеры).
6. Метод интегрирования по частям в неопределённом интеграле (док-во теоремы, стандартные ситуации, примеры).
7. Понятие рациональной функции. Интегрирование простейших рациональных дробей (определения, вывод формул, примеры).
8. Интегрирование рациональных дробей общего вида (алгоритмы, примеры).
9. Интегрирование тригонометрических функций. Универсальная тригонометрическая подстановка (вывод формул, примеры).
10. Приёмы интегрирования тригонометрических функций (частные случаи, примеры).
11. Интегрирование дробно-линейных иррациональностей (виды подстановок, примеры).
12. Интегрирование биномиальных дифференциалов (определение, случаи интегрирования в конечном виде, примеры).
13. Интегрирование квадратичных иррациональностей. Подстановки Эйлера.
14. Приёмы интегрирования квадратичных иррациональностей (понятие, частные случаи, примеры).
15. Понятие определённого интеграла, его геометрический и механический смысл. Примеры вычисления определённого интеграла по определению.
16. Необходимое условие интегрируемости функции одной переменной (с док-вом).
17. Критерий интегрируемости функции одной переменной (с док-вом).
18. Классы интегрируемых функций.
19. Свойства определённого интеграла (с док-вом интегрируемости суммы и разности).
20. Свойства определённого интеграла (с док-вомаддитивности, геометрический смысл свойства).
21. Свойства определённого интеграла (с док-вом теоремы об оценке модуля интеграла).
22. Свойства определённого интеграла (с док-вомтеоремы об оценке интеграла, геометрический смысл свойства).
23. Свойства определённого интеграла (с док-вом теоремы о среднем значении, геометрическая интерпретация).
24. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница (док-во, примеры применения).
25. Замена переменной в определённом интеграле (док-во теоремы, примеры).
26. Интегрирование по частям в определённом интеграле (док-во теоремы, примеры).
27. Понятие квадрируемости плоской фигуры. Площадь квадрируемой фигуры.
28. Площадь криволинейной трапеции (понятие криволинейной трапеции, док-во теоремы, пример).

29. Площадь произвольной плоской фигуры (формулы, примеры).
30. Понятие полярных координат, криволинейный сектор и его площадь (формула, примеры).
31. Вычисление длины дуги плоской кривой (понятие спрямляемости, формулы, примеры).
32. Понятие кубируемости и объёма. Объём тела с заданным поперечным сечением (постановка задачи, формула, пример).
33. Объём тела вращения (формулы, примеры).
34. Вычисление площади поверхности вращения (определение площади поверхности, формулы, примеры).
35. Вычисление пути при прямолинейном неравномерном движении тела (постановка задачи, формула, пример).
36. Вычисление работы переменной силы (постановка задачи, формула, пример).
37. Нахождение центра тяжести плоской кривой и плоской фигуры; теоремы Паппа-Гульдина (формулы; примеры).
38. Нахождение центра масс (формула, пример).
39. Несобственные интегралы I рода (теория, примеры).
40. Несобственные интегралы II рода (теория, примеры).

Образец экзаменационного задания

1. Непосредственное интегрирование. Таблица неопределённых интегралов.
2. Формула Ньютона- Лейбница (с доказательством).
3. Вычислить: $\int_0^{\pi} e^x \cos x dx$.
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-|x|}$, $2y - 1 = 0$.
5. Исследовать несобственный интеграл на сходимость: $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$.

Критерии оценивания ответа на экзамене

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Правильный ответ на вопрос	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25, 0,5 и 0,75 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

3 семестр

Вопросы к экзамену

1. Понятие числового ряда. Сходящиеся и расходящиеся ряды. Геометрический ряд.
2. Основные свойства сходящихся числовых рядов.
3. Необходимый признак сходимости числового ряда. Гармонический ряд.
4. Критерий сходимости Коши числового ряда.
5. Необходимый и достаточный признак сходимости положительных рядов.
6. Признаки сравнения положительных рядов.
7. Признак Даламбера.
8. Признак Коши сходимости положительных рядов.
9. Интегральный признак сходимости положительных рядов.
10. Обобщенный гармонический ряд и его сходимость.

11. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
12. Теорема об остатке ряда Лейбница.
13. Абсолютная и условная сходимость рядов с произвольными членами.
14. Перестановка членов абсолютно сходящегося ряда.
15. Теорема Римана об условно сходящихся рядах. Пример.
16. Понятие о функциональном ряде. Область сходимости функционального ряда. Понятие о равномерной сходимости функционального ряда. Пример.
17. Теорема Вейерштрасса.
18. Непрерывность суммы функционального ряда.
19. Почленное интегрирование функционального ряда.
20. Почленное дифференцирование функционального ряда.
21. Степенные ряды. Теорема Абеля.
22. Радиус и интервал сходимости степенного ряда. Структура области сходимости степенных рядов.
23. Основные свойства степенных рядов.
24. Разложение функции в степенной ряд. Ряд Тейлора.
25. Условия сходимости рядов Тейлора.
26. Разложение в степенной ряд показательной функции.
27. Разложение в степенной ряд тригонометрических функций.
28. Разложение в степенной ряд логарифмической функции.
29. Разложение в ряд Тейлора степенной функции.
30. Применение степенных рядов к вычислению интегралов.
31. Степенные ряды как способ определения функций. Формула Эйлера.
32. Применение степенных рядов к вычислению интегралов.
33. Применение степенных рядов к вычислению корней.
34. Понятие тригонометрического ряда. Основное свойство суммы тригонометрического ряда.
35. Ортогональные системы функций и их основные свойства.
36. Основная тригонометрическая система функций и ее ортогональность.
37. Тригонометрический ряд Фурье. Единственность разложения.
38. Условия сходимости тригонометрических рядов Фурье.
39. Ряды Фурье для четных и нечетных функций.
40. Ряды Фурье по произвольной ортогональной системе функций.
41. Разложение функции в тригонометрический ряд общего вида.

<u>Образец экзаменационного задания</u>

1. Признак Лейбница о сходимости знакочередующихся рядов.

2. Разложите в степенной ряд функцию $f(x) = \sin x$ в окрестности точки $x_0 = 0$.

3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{2^n}$.

4. Найдите интервал и множество сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 x^n$.

5. Разложите в тригонометрический ряд Фурье на $[-\pi, \pi]$ функцию $f(x) = kx$.

<u>Критерии оценивания ответа на экзамене</u>

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Правильный ответ на вопрос	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25, 0,5 и 0,75 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

4 семестр

Вопросы к экзамену

1. Евклидово пространство. Открытые и замкнутые множества в $\boldsymbol{R}^2$.
2. Понятие непрерывной кривой и области в $\boldsymbol{R}^2$.
3. Предел последовательности точек в $\boldsymbol{R}^2$.
4. Определение функции нескольких переменных. График функции двух переменных.
5. Предел функции нескольких переменных. Основные теоремы о пределах.
6. Непрерывность функции нескольких переменных. Точки разрыва.
7. Непрерывность сложной функции.
8. Основные свойства непрерывных функций.
9. Равномерная непрерывность функций двух переменных.
10. Частные производные функций нескольких переменных.
11. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Понятие дифференциала.
12. Необходимые условия дифференцируемости функций двух переменных.
13. Достаточные условия дифференцируемости функций двух переменных.
14. Дифференцируемость сложных функций нескольких переменных.
15. Инвариантность формы дифференциала первого порядка.
16. Частные производные высших порядков.
17. Дифференциалы высших порядков.
18. Формула Тейлора для функций двух переменных.
19. Неявные функции. Дифференцируемость неявных функций.
20. Экстремумы функций двух переменных. Необходимое условие экстремума.
21. Понятие условного экстремума для функции двух переменных.
22. Достаточные условия экстремума для функции двух переменных.
23. Наибольшее и наименьшее значение функции в области.
24. Уравнение касательной плоскости к поверхности. Геометрический смысл дифференциала для функции двух переменных.
25. Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла.
26. Определение двойного интеграла. Условия существования двойного интеграла.
27. Основные свойства двойного интеграла.
28. Понятие повторного интеграла для x-правильных областей.
29. Понятие повторного интеграла для y-правильных областей.
30. Способы вычисления двойных интегралов.
31. Замена переменных в двойном интеграле.
32. Двойной интеграл в полярных координатах.
33. Геометрические и механические приложения двойных интегралов.
34. Тройные интегралы и способы их вычисления.
35. Задача о работе плоского силового поля и метод ее решения.
36. Определение криволинейного интеграла по координатам (второго рода).
37. Основные свойства криволинейного интеграла второго рода.
38. Вычисление криволинейного интеграла второго рода.
39. Криволинейный интеграл по замкнутому контуру. Формула Грина.
40. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.
41. Условия полного дифференциала.
42. Восстановление функции двух переменных по ее полному дифференциалу.

43. Понятие потенциального поля.
44. Криволинейные интегралы по длине дуги (первого рода) и их приложения.

Образец экзаменационного задания

1. Необходимые условия дифференцируемости функций двух переменных.
2. Формула Грина.
3. Найти $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y\to\infty}}\left((x^2+y^2)e^{-\sqrt{x^2+y^2}}\right)$.
4. Исследовать на экстремум функцию $U = x^2 - 2xy + 4y^3$.
5. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$ по области D, где

$D = \{(x, y) \in R^2 \big|\ x^2 + y^2 \le rx\}$.

Критерии оценивания ответа на экзамене

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Правильный ответ на вопрос	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25, 0,5 и 0,75 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Список основнойлитературы

1. Шипачев В. С. Высшая математика: учебное пособие для вузов / В. С. Шипачев. — 8-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 447 с. — (Бакалавр и специалист) —ISBN 978-5-534-12319-7[электронный ресурс:https://urait.ru].
2. Шипачев В.С. Дифференциальное и интегральное исчисление:учебник и практикум для вузов / В.С. Шипачев. – Москва: Издательство Юрайт, 2019. – 212 с. [электронный ресурс:https://urait.ru].
3. Ильин В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 1: учебник для академического бакалавриата / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 324 с. [электронный ресурс: https://urait.ru].
4. Ильин В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 2: учебник для академического бакалавриата / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 315 с. [электронный ресурс: https://urait.ru].
5. Ильин В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 2: учебник для академического бакалавриата / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 324 с. [электронный ресурс: https://urait.ru].

7.2. Список дополнительной литературы

6. Расулов К.М. Практикум по математическому анализу. Числовые и функциональные ряды: учебное пособие. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных – Смоленск: Изд-во СОИРО, 2014. – 251 с.

7. Расулов К.М. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисления для функций нескольких переменных. Учебное пособие. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2008. – 145 с.
8. Шерстнева Н.А. Математический анализ. Введение в анализ функций одной и нескольких переменных. Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных. – Смоленск: СмолГУ, 2007. – 40 с.
9. Шерстнева Н.А. Математический анализ. Интегральное исчисление функций одной и нескольких переменных. – Смоленск: СмолГУ, 2008. – 32 с.
10. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - СПб.: Изд- во «Профессия», 2008. – 416 с.
11. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1-3. - М.: Физматлит, 2006.
12. Зверович Э.И. Вещественный и комплексный анализ. Ч. 1. (Введение в анализ и дифференциальное исчисление). – Минск: Вышэйшая школа, 2006.
13. Зверович Э.И. Вещественный и комплексный анализ. Ч. 2. и Ч. 3. – Минск: Вышэйшая школа, 2008.
14. Зверович Э.И. Вещественный и комплексный анализ. Ч. 4. и Ч. 5. – Минск: Вышэйшая школа, 2008.
15. Задачник по курсу математического анализа. Часть 1 и Часть 2. Под редакцией Н.Я.Виленкина. - М.:Просвещение, 1971.
16. Демидович Б.П. Сборник задач по математическому анализу. - М.: АСТ: Астрель, 2009. – 558 с.
17. Уваренков И.М., Маллер М.З. Курс математического анализа. Том I. - М.:Просвещение, 1966.; Том II, М.:Просвещение, 1976.
18. Шагин В. Л., Соколов А.В. Математический анализ. Базовые понятия: учебное пособие для прикладного бакалавриата. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 245 с. [электронный ресурс: https://urait.ru].

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

- Система дистанционного обучения Смоленского государственного университета http://moodle.smolgu.ru
- Электронно-библиотечная система университета http://biblioteka.smolgu.ru
- Национальный открытый университет http://www.intuit.ru
- Образовательный математический сайт http://exponenta.ru
- Общероссийский математический портал http://www.mathnet.ru

8. Материально-техническое обеспечение

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используется интерактивная доска; проектор. Осуществляется поиск информации в WWW-пространстве; работа с Web-страницами и ресурсами сети Интернет.

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине в университете имеется следующая необходимая инструментальная база: учебные аудитории для проведения практических занятий; компьютерный класс, оборудованный персональными ЭВМ с необходимым математическим софтом и выходом в Интернет для самостоятельной работы студентов; кабинеты, оборудованные проекторами и электронными досками для проведения лекционных занятий. Имеется кабинет ксерокопирования и кафедральный принтер для подготовки индивидуальных дидактических карточек, контрольных и экзаменационных материалов. Используются портреты великих математиков, необходимые чертёжные инструменты.

9.Программное обеспечение

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине используется Информационно-вычислительный центр физико-математического факультета (Положение о Центре утверждено приказом ректора №01-66 от 28.09.2015 г.).

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используются информационные технологии обработки данных с помощью прикладных программных продуктов MicrosoftExcel, MicrosoftPowerPoint. Осуществляется поиск информации в WWW-пространстве; работа с Web-страницами и социальными ресурсами сети Интернет, а также используются различные системы компьютерной математики.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 03B6A3C600B7ADA9B742A1E041DE7D81B0
Владелец: Артеменков Михаил Николаевич
Действителен: с 04.10.2021 до 07.10.2022