Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»
Проректор по учебно-
методической работе
____________ Ю.А. Устименко
«08» сентября 2021 г.

Рабочая программа дисциплины
Б1.О.13.03 Теория функций комплексного переменного

Направление подготовки: **44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)**
Направленность (профиль): **Математика и информатика**
Форма обучения: очная
Курс – 3
Семестр – 6
Всего зачётных единиц – 4, часов – 144
Форма отчетности: экзамен – 6 семестр

Программу разработал:
доктор физико-математических наук, профессор Расулов К.М.;

Одобрена на заседании кафедры
«01» сентября 2021 г., протокол № 1
Заведующий кафедрой _____________ К.М. Расулов

Смоленск
2021

1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Теория функций комплексного переменного» (ТФКП) играет фундаментальную роль в теоретической и практической подготовке бакалавров направления подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование» (профиль «Математика и информатика»). Эта дисциплина относится к обязательным для изучения дисциплинам учебного плана.

Данная дисциплина важна по целому ряду причин. Во-первых, несмотря на свою кажущуюся абстрактность, теория функций комплексного переменного нашла обширнейшие практические приложения. С ее помощью решаются многие вопросы картографии, теории упругости, гидро-, аэро- и электродинамики и т.д. Аналитические функции комплексного переменного применяются для решения проблем квантовой теории, при изучении движения естественных и искусственных небесных тел и во многих иных областях науки и техники. Наряду с практическими приложениями теория аналитических функций используется при решении теоретических проблем математики, в частности в теории чисел. С помощью таких функций вычисляют сложные интегралы, решают дифференциальные уравнения и т.д. Во-вторых, понимание многих вопросов, связанных с изучением показательной и логарифмической функций, тригонометрических и обратных тригонометрических функций, требует рассмотрения этих функций в комплексной области.

Теория функций комплексного переменного (ТФКП) является вспомогательной для изучения ряда дисциплин учебного плана (математическое моделирование, численные методы, физика и др.), а также для вычислительных и педагогических практик, предусмотренных ОП. Кроме того, содержание данного курса дает вполне подходящий материал для актуального элективного курса. «Элементарные функции на комплексной плоскости» для классов с углубленным изучением математики.

Цели освоения дисциплины:

– перенос основных понятий математического анализа на комплексную плоскость;

– знакомство с основными теоремами ТФКП;

– приобретение навыков использования функций комплексного переменного;

– развитие математической эрудиции, воспитание математической культуры.

Задачи освоения дисциплины:

– познавательная – освоение методов ТФКП;

– воспитательная – развитие культуры мышления, способности логически верно выстраивать устную и письменную речь;

– развивающая – усвоение важнейшей информации, накопленной человечеством в процессе развития математики, привитие способности применения полученных знаний в педагогической деятельности.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
ОПК-8. Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний	**Знать**: объект, предмет, основные категории, принципы, закономерности, структуру педагогической науки; сущность, структуру, динамику целостного педагогического процесса; состояние и тенденции развития отечественных и международных педагогических и психологических исследований; методологию педагогического исследования; особенности, логику, закономерности, формы, методы и средства процесса обучения и воспитания; основы психологии личности, основные теоретические подходы к пониманию феномена личности; познавательные процессы, их свойства, закономерности и роль в интеллектуальной и творческой деятельности; общетеоретические основы методики преподавания предмета в объеме, необходимом для осуществления

	педагогической деятельности; строение и функции организма, основные закономерности развития человека; общие закономерности и возрастные особенности функционирования основных систем организма учащихся; гигиенические требования к организации образовательного процесса и гигиену учебного процесса; инструментальные средства информационных технологий. **Уметь**: применять теоретические знания по теории функций комплексного переменного в решении педагогических задач; планировать, проектировать и осуществлять педагогический процесс в различных типах образовательных учреждений; определять структуру и методологию проведения педагогического исследования; адекватно целям выстраивать учебный и воспитательный процесс, выбирая соответствующие формы, методы и средства его осуществления; использовать в педагогической деятельности и межличностном взаимодействии современные достижения психологической науки; учитывать возрастные физиологические особенности учащихся в педагогическом процессе; использовать информационные технологии для решения профессиональных задач. **Владеть**: категориальным аппаратом педагогической науки; навыками решения педагогических задач; способами планирования и осуществления образовательного процесса; способами проведения педагогического эксперимента; формами и методами осуществления учебной и воспитательной работы; приемами и методами психодиагностики личности, изучения особенностей профессиональной деятельности; навыками организации педагогической деятельности с позиций сохранения здоровья; методами профилактики нарушений физического развития и повышения адаптационных резервов организма; методами оказания первой доврачебной помощи; методами применения информационно-коммуникационных технологий в образовательном процессе.
ПК-5. Способен использовать научные знания в предметной области (математика) в процессе формирования предметной компетенции обучающихся в рамках реализации основной общеобразовательной программы	**Знать:** современное состояние и перспективы развития математики как учебной дисциплины, направления развития школьного математического образования, теоретические основы обучения математике, принципы построения методической системы обучения математике, основные линии школьного курса математики, их структуру, содержание и роль, этапы формирования математических понятий, методические подходы к изучению основных тем школьного курса математики; **Уметь:** анализировать и интерпретировать содержание математических понятий, теорем, задач, разрабатывать фрагменты уроков, организовывать образовательный процесс обучения математике, конструировать методику введения понятий, изучения теорем, решения задач; **Владеть:** основными приемами организации деятельности школьников по изучению математики, навыками разработки методики изучения частных вопросов обучения математике, исследовательскими методами в профессиональной деятельности.
ПК-7 Способен математически корректно ставить естественнонаучные задачи и	**Знать:** базовые принципы постановки естественнонаучных задач и классических задач математики, определения основных понятий и доказательства теорем по основным разделам математики;

классические задачи математики, строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	**Уметь:** решать основные типы математических задач, доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть его следствия; **Владеть:** первичными навыками применения математического аппарата к решению конкретных задач из различных областей прикладной математики и информатики.

3. Содержание дисциплины

Раздел 1. Плоскость комплексных чисел. Геометрический смысл модуля и аргумента комплексных чисел. Уравнения окружности, луча и серединного перпендикуляра в комплексной форме.

Раздел 2. Понятие расширенной комплексной плоскости. Последовательности и ряды комплексных чисел. Кривые и области на расширенной комплексной плоскости.

Раздел 3. Функции комплексного переменного. Предел, непрерывность.

Раздел 4. Производная комплексной функции. Условия дифференцируемости Коши-Римана. Понятие аналитической функции. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие конформного отображения.

Раздел 5. Дробно-линейная функция, экспонента, натуральный логарифм и тригонометрические функции комплексного переменного.

Раздел 6. Интегрирование функций комплексного переменного. Оценка интеграла. Теорема Коши (без строгого доказательства) и ее следствия. Первообразная и ее существование. Формула Ньютона-Лейбница. Интегральная формула Коши для аналитических функций и ее производных.

Раздел 7. Степенные ряды на комплексной плоскости (обзорно). Разложение аналитической функции в степенной ряд. Неравенства Коши. Ряды для элементарных функций. Теорема Лиувилля. Основная теорема алгебры многочленов.

Раздел 8. Теорема единственности. Аналитическое продолжение с вещественной оси. Нули аналитической функции, их кратность, изолированность.

Раздел 9. Ряд Лорана. Теорема Лорана. Изолированные особые точки, их характеристические свойства. Теорема Сохоцкого.

Раздел 10. Понятие вычета. Основная теорема о вычетах. Применения вычетов.

4. Тематический план

№ п/п	Темы	Всего часов	Формы занятий		
			Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа
1.	Комплексная плоскость C и расширенная комплексная плоскость $\overline{C}$	18	4	4	10
2.	Предел, непрерывность и производная функции	20	6	4	10

	комплексного переменного				
3.	Элементарные функции на C	18	4	4	10
4.	Интеграл от функции комплексного переменного	18	4	4	10
5.	Степенные ряды, теорема единственности	18	4	4	10
7.	Ряд Лорана. Особые точки. Вычеты	18	4	4	10
	Контрольная работа	7		2	5
	Экзамен	27			27
	ВСЕГО:	**144**	**26**	**26**	**65+27**

5. Виды образовательной деятельности

Лекции

Лекции 1-2. *Комплексная плоскость* ***C***. Исторический очерк. Плоскость комплексных чисел. Геометрический смысл модуля и аргумента комплексных чисел. Понятие расширенной комплексной плоскости. Последовательности и ряды комплексных чисел.

Лекция 3. *Предел, непрерывность.*. Комплексные функции комплексного переменного и отображения плоскости; предел и непрерывность функций.

Лекция 4. *Производная комплексной функции*. Понятие аналитической функции. Условия дифференцируемости Коши-Римана.

Лекция 5. *Геометрический смысл производной.* Угол поворота и коэффициент растяжения кривой в точке при отображении. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие конформного отображения.

Лекции 6-7. *Элементарные функции*. Дробно-линейная функция, экспонента, натуральный логарифм и тригонометрические функции комплексного переменного. Комплексная степень.

Лекции 8-9. *Интеграл.* Интегрирование функции комплексного переменного. Оценка интеграла. Теорема Коши (без строгого доказательства) и ее следствия. Первообразная и ее существование. Формула Ньютона-Лейбница. Интегральная формула Коши для аналитических функций. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций.

Лекции 10. *Степенные ряды*. Степенные ряды на комплексной плоскости (обзорно). Разложение аналитической функции в степенной ряд. Неравенства Коши. Ряды для элементарных функций.

Лекция 11. *Аналитическое продолжение*. Теорема единственности. Аналитическое продолжение с вещественной оси. Продолжение функциональных соотношений. Нули аналитической функции, их кратность, изолированность.

Лекции 12-13. *Особые точки*. Ряд Лорана. Теорема Лорана. Изолированные особые точки, их характеристические свойства. Теорема Сохоцкого. Понятие вычета, основная теорема о вычетах и применения вычетов.

Практические занятия

Практическое занятие №1. «Поле комплексных чисел. Геометрические интерпретации комплексных чисел. Алгебраическая и тригонометрические формы записи комплексных чисел»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Если определить комплексные числа $z_1 = (a_1, b_1)$ и $z_2 = (a_2, b_2)$ как упорядоченные пары двух действительных чисел, то как определяются операции сложения и умножения этих чисел?
2. Какова алгебраическая форма записи комплексных чисел?
3. Что такое действительная и мнимая части комплексного числа? Приведите примеры.
4. Какие комплексные числа называются сопряженными?

5. Как определяется сумма, разность, произведение и частное комплексных чисел, заданных в алгебраической форме? Приведите примеры.
6. Дайте определение поля комплексных чисел $\boldsymbol{C} = \langle C; +, \bullet \rangle$.
7. Какие геометрические интерпретации комплексных чисел Вам известны?
8. Сформулируйте определение модуля и аргумента комплексного числа $z = a + ib$. Приведите примеры их вычисления.
9. Что называется главным значением аргумента комплексного числа?
10. Как задаются всевозможные значения аргумента комплексного числа? Приведите примеры.
11. Какими свойствами обладает модуль комплексного числа?
12. Какова тригонометрическая форма записи комплексных чисел?
13. Каков геометрический смысл операций сложения и умножения комплексных чисел? Приведите примеры.
14. Что называется окрестностью точки $z_0 = x_0 + iy_0$ на комплексной плоскости $\boldsymbol{C}$?
15. Как можно вычислить степень комплексного числа, заданного в тригонометрической форме? Какие формулы называются *формулами Муавра*?
16. По какой формуле определяются корни n-й степени из комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1.1. Пусть $z_1 = 2 + i2$, $z_2 = 2 - i2$. Найдите числа и изобразите их в виде точек (векторов) на комплексной плоскости: $z_3 = z_1 + z_2$, $z_4 = z_1 \cdot z_3$, $z_5 = \dfrac{z_2}{z_4}$, $z_6 = z_4 - z_5$.

1.2. Найдите модуль и аргумент числа z, если:

а) $z = 5$; б) $z = -10$; в) $z = 7i$; г) $z = -3i$;

д) $z = 3 - i3$; е) $z = -1 + \sqrt{3}i$; ж) $z = -\sqrt{3} - i$; з) $z = \sin\alpha + i\cos\alpha,\ \alpha \in \boldsymbol{R}$.

1.3. Докажите, что $|z_1 - z_2|$ есть расстояние между точками z_1 и z_2 на комплексной плоскости.

1.4. Докажите равенства:

а) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$; б) $|z| = |\bar{z}|$; в) $Arg(z_1 \cdot z_2) = Arg\ z_1 + Arg\ z_2$; г) $|z^n| = |z|^n, n \in \boldsymbol{N}$;

1.5. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек, удовлетворяющих условию:

а) $|z + 2i| = 3$; б) $|z + 2i| < 3$;в) $|z + 2i| > 3$; г) $\arg(iz + 1) = \dfrac{\pi}{2}$.

1.6. Решите уравнение и изобразите все его корни на комплексной плоскости:

а) $z^2 + 49 = 0$; б) $z^2 + 4z + 5 = 0$; в) $z^3 - 27i = 0$.

Задание для самостоятельной работы

1.7. Пусть $z_1 = 2i$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}\,i$. Найдите числа и изобразите их в виде точек (векторов) на комплексной плоскости: $z_3 = z_1 - z_2$, $z_4 = z_2 \cdot z_3$, $z_5 = \dfrac{z_2}{z_4}$.

1.8. Найдите модуль и аргумент комплексного числа z, если:

а) $z = -3 + i$; б) $z = \sqrt{3} - i$; в) $z = \sin\alpha - i\cos\alpha,\ \alpha \in \boldsymbol{R}$.

1.9. Выясните, для любого ли $z \in C$ верно равенство:

а) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$; б) $z^2 = \bar{z}^2$; в) $Arg\left(z^2\right) = 2Arg z$.

1.10. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек, удовлетворяющих условию:

а) $|z - i| = |2 - i|$; б) $|z - i| < |2 - i|$; в) $|z - i| > |2 - i|$.

1.11. Решите уравнение и изобразите все его корни на комплексной плоскости:

а) $z^3 + 1 = 0$; б) $z^2 - 2z + 5 = 0$; в) $z^4 - 81i = 0$.

Практическое занятие №2. «Понятие расширенной комплексной плоскости. Последовательности и ряды комплексных чисел»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Опишите отображение, называемое *стереографической проекцией* комплексной плоскости на сферу.
2. Что называется *расширенной комплексной плоскостью*?
3. Что понимается под *сферой Римана* (*сферой комплексных чисел*)?
4. Каковы формулы стереографической проекции, устанавливающей взаимно-однозначное соответствие между комплексным числом $z = x + iy$ и его образом $M(\xi, \eta, \zeta)$ на сфере Римана?
5. В какие множества на сфере Римана отображаются *окружности* и *прямые* на комплексной плоскости $\boldsymbol{C}$ при стереографической проекции?
6. Сформулируйте определение предела последовательности комплексных чисел. Приведите примеры.
7. Какими основными свойствами обладает сходящиеся последовательности комплексных чисел?
8. Сформулируйте определение ряда с комплексными членами. Приведите примеры.
9. Какой ряд называется сходящимся? Приведите примеры.
10. Дайте определение абсолютной сходимости числового ряда.
11. Какой ряд называется *сходящимся условно*? Приведите пример условно сходящегося ряда с комплексными членами.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

2.1. Какая точка z_0 комплексной плоскости при стереографической проекции служит образом точки $M_0\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ на сфере Римана?

2.2. Что является прообразом прямой $y = x$ на сфере Римана при стереографической проекции ?

2.3. Пользуясь определением, докажите, что последовательность $z_n = \dfrac{n - in + 2 + 3i}{n}$ сходится к точке $a = 1 - i$.

2.4. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$.

2.5. Вычислите предел последовательности z_n, если:

а) $z_n = \dfrac{n^2 + i5}{1 + in^2}$; б) $z_n = \left(\dfrac{3+4i}{25}\right)^n$.

2.6. Найдите все предельные точки множества G, состоящего из точек $z_n = i^n \dfrac{n+1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

2.7. Исследуйте ряд на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{i^n}{i + n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3i)^n}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{(1+i)^n}$.

Задание для самостоятельной работы

2.8. Какая точка z_0 комплексной плоскости при стереографической проекции служит образом точки $M_0\left(0, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ на сфере Римана?

2.9. Что является прообразом окружности $x^2 + y^2 = 1$ на сфере Римана при стереографической проекции ?

2.10. Пользуясь определением, докажите, что последовательность $z_n = \dfrac{n^2 - 1 + (n^2 + 1)i}{n^2 + in - 1}$ сходится к точке $a = 1 + i$.

2.11. Вычислите предел последовательности z_n, если:

а) $z_n = \left(1 + \dfrac{i}{n}\right)^n$; б) $z_n = \arg\left(-1 + \dfrac{i^n}{n}\right)$.

2.12. Найдите все предельные точки множества G, состоящего из точек $z_n = (-1)^n + \dfrac{i}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

2.13. Исследуйте ряд на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\cos(in) + i\sin(in)}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(in)^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2i)^n}{n!}$.

Практическое занятие №3. «Понятие функции комплексного переменного. Предел и непрерывность функции комплексного переменного»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Дайте определение функции комплексного переменного. Каков геометрический смысл функции комплексного переменного?
2. Когда функция $w = f(z)$ называется однозначной (многозначной)? Приведите примеры однозначных и многозначных функций.
3. Выделите действительную и мнимую части функции $W = z^3$ двумя способами: а) через вещественную и мнимую части переменного $z = x + iy$; б) через модуль и аргумент переменного z.
4. Сформулируйте определение предела функции $w = f(z)$ в точке z_0 на языке «$\varepsilon - \delta$» (на языке последовательностей). Приведите примеры.
5. Перечислите основные свойства предела функции в точке.
6. Дайте определение непрерывности функции $w = f(z)$ в точке z_0. Приведите примеры непрерывных и разрывных в точке $z = 0$ функций.

7. Перечислите основные свойства функций, непрерывных в точке.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

3.1. Выделите действительную и мнимую части каждой из указанных функций:

а) $w=\dfrac{\operatorname{Re} z^2}{z}$; б) $w=\dfrac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}$; в) $w=\dfrac{z+i}{z-i}$; г) $w=\overline{z^2}+\left|z^2\right|$.

3.2. Найдите образ окружности $L=\{z:|z|=1\}$ при отображении $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{\bar{z}}\right)$.

3.3. На какие линии w-плоскости отображает функция $w=\dfrac{1}{z}$ следующие кривые z-плоскости:

а) $x^2+y^2=4$; б) $y=x$; в) $x=1$; г) $(x-1)^2+y^2=1$?

3.4. В какую фигуру переводится единичный круг $T=\{z:|z|<1\}$ следующими функциями:

а) $w=|z|$; б) $w=z-\bar{z}$?

3.5. Найдите предел функции $w=\dfrac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}$ в точке $z_0=1+i$.

3.6. Дайте, если это возможно, определения, соответствующие следующим утверждениям:

а) $\lim\limits_{z\to a} f(z)=b$; б) $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$; в) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=b$;
г) $\lim\limits_{z\to+\infty} f(z)=b$; д) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$; е) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=0$.

3.7. Можно ли доопределить функцию $w=\dfrac{\operatorname{Re} z^2}{z}$ в точке $z_0=0$ так, чтобы она стала в ней непрерывной? Ответ обосновать.

3.8. Докажите, что функция $f(z)=z^2+\bar{z}\cdot(z+1)$ непрерывна в каждой точке комплексной плоскости $\boldsymbol{C}_z$.

Задание для самостоятельной работы

3.9. Выделите действительную и мнимую части каждой из указанных функций:

а) $w=z^2-\dfrac{1}{z^2}$; б) $w=z^4+5$; в) $w=z^2+az+b$ (a и b – действительные числа).

3.10. Найдите образ окружности $L=\{z:|z|=1\}$ при отображении $w=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$.

3.11. На какие линии w-плоскости отображает функция $w=\dfrac{1}{z}$ следующие кривые z-плоскости:

а) $x^2+y^2=1$; б) $y=-x$; в) $y=1$; г) $(x+1)^2+y^2=1$?

3.12. В какую фигуру переводится единичный круг $T=\{z:|z|<1\}$ следующими функциями:

а) $w=|z-1|$; б) $w=\dfrac{1}{2}|z-\bar{z}|$?

3.13. Определите, в каких точках данная функция не имеет предела:

а) $w=\dfrac{\bar z}{z}$; б) $w=\dfrac{|z+i|^2}{z+i}$; в) $w=i\arg(z-1)$.

3.14. Можно ли доопределить функцию $w=\dfrac{(z-1)\cdot \operatorname{Im}(z-1)}{|z-1|}$ в точке $z_0=1$ так, чтобы она стала в ней непрерывной? Ответ обосновать.

3.15. Докажите, что функция $f(z)=\bar z^2+5i$ непрерывна в каждой точке комплексной плоскости $\boldsymbol{C}_z$.

Практическое занятие №4. «Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Понятие аналитической функции»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Сформулируйте определение производной функции $w=f(z)$ в точке z_0. Приведите примеры.
2. Перечислите основные свойства функций, дифференцируемых в точке.
3. Сформулируйте необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции комплексного переменного в точке $z_0=x_0+iy_0$. Приведите примеры.
4. Как записываются условия Коши Римана с использованием дифференциальных операторов?
5. Какая функция называется аналитической в точке? Приведите примеры.
6. Является ли функция $f(z)=z^2+(z-1)\cdot\bar z$ аналитической в какой-либо точке комплексной плоскости?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

4.1. Пользуясь определением, найдите производную функции $w=f(z)$ в точке z_0, если:

а) $f(z)=z^3-3z^2+1,\ z_0=1-i$; б) $f(z)=\dfrac{z+i}{z-i},\ z_0=-i$.

4.2. Определите, в каких точках комплексной плоскости имеет производную данная функция:

а) $w=(\bar z-z)^2$; б) $w=\overline{z+\operatorname{Re} z}$; в) $w=(z+i)^3-2\bar z$;

г) $w=|z-i|^2+(z-i)^2$; д) $w=iz^2-3z$; е) $w=\operatorname{Im} z+i\operatorname{Re} z$.

4.3. Докажите, что функция $w=\bar z$ нигде не дифференцируема.

4.4. Найдите значения действительных параметров a, b и c, при которых функция $w=ax+by+i(cx+y)$ будет аналитической на всей комплексной плоскости.

4.5. Являются ли следующие функции аналитическими в какой-либо области:

а) $f(z)=z^3-z+1$; б) $g(z)=z^2-\bar z$; в) $q(z)=\dfrac{5}{z^2-z}$?

Задание для самостоятельной работы

4.6. Пользуясь определением, найдите производную функции $w=f(z)$ в точке z_0, если:

а) $f(z)=z^2+2z$, $z_0=3+2i$; б) $f(z)=\dfrac{z+1}{z-1}$, $z_0=-1$.

4.7. Докажите, что функция $w=|z-a|^2$ дифференцируема в точке a.

4.8. Определите, в каких точках имеет производную данная функция:

а) $w=(\operatorname{Re} z+i\operatorname{Im}\bar{z})^2$; б) $w=\operatorname{Im}(z+\operatorname{Re} z)$; в) $w=z^3-2|z-1|^2$;

г) $w=\overline{z-i}+(z-i)^2$; д) $w=z^2+2iz$; е) $w=\operatorname{Re}^2 z-i\operatorname{Im}^2 z$.

4.9. Являются ли следующие функции аналитическими в какой-либо области:

а) $f(z)=z^2+\bar{z}-z$; б) $g(z)=z^{2015}-2015$; в) $q(z)=\dfrac{z}{z^2-4}$?

Практическое занятие №5. «Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексного переменного. Понятие о конформном отображении»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. В чем состоит геометрический смысл модуля производной функции $f(z)$ комплексного переменного в точке z_0?
2. Каков геометрический смысл аргумента производной функции $f(z)$ комплексного переменного в точке z_0?
3. Какое отображение называется конформным в точке z_0? Приведите примеры.
4. Какое отображение называется конформным на множестве D? Приведите примеры.
5. Какая связь между аналитическими функциями комплексного переменного и конформными отображениями?
6. Является ли конформным на множестве $D=\{z \mid 0<\operatorname{Im} z<\pi\}$ отображение, задаваемое функцией $W=e^z$?
7. При каком условии отображение, задаваемое дробно-линейной функцией, является конформным в $\boldsymbol{C}$?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

5.1. Для отображения $w=f(z)$ найдите коэффициент деформации и угол поворота в точке z_0, если:

а) $f(z)=z^3-3z^2+1$, $z_0=1-i$; б) $f(z)=\dfrac{z+i}{z-i}$, $z_0=-i$.

5.2. Найдите угол между образами кривых $\gamma_1:|z-1|=2$ и $\gamma_2:|z+1|=2$ при отображении $w=iz^2+z-1$.

5.3. Определите, в каких точках плоскости коэффициент деформации отображения $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ равен 1.

5.4. Определите, в каких точках плоскости угол поворота отображения $w = \frac{iz+1}{iz-1}$ равен нулю.

5.5. Найдите образы прямых $\operatorname{Re} z = a$ и $\operatorname{Im} z = b$ $(a, b \in R)$ при отображении $w = z^2$.

5.6. Постройте конформное отображение верхней полуплоскости на единичный круг.

Задание для самостоятельной работы

5.7. Для отображения $w = f(z)$ найдите коэффициент деформации и угол поворота в точке z_0, если:

а) $f(z) = (z-3)^2$, $z_0 = 2+i$; б) $f(z) = \frac{iz+1}{z-1}$, $z_0 = -1$.

5.8. Найдите угол между образами кривых $\gamma_1 : |z-1| = |z+1|$ и $\gamma_2 : |z+i| = |z-i|$ при отображении $w = iz^{2022} + 2021z - 1$.

5.9. Определите, какая часть плоскости сжимается при отображении $w = \frac{z}{z-i}$.

5.10. Определите, в каких точках плоскости угол поворота отображения $w = 3z^2 - 6z + 11$ равен $\frac{\pi}{2}$.

5.11. Выясните, во что функция $w = \frac{1}{z}$ переводит полярную сетку $|z| = R$, $\arg z = \alpha$ ($R > 0$, $0 \le \alpha < 2\pi$).

5.12. Найдите конформное отображение единичного круга на верхнюю полуплоскость.

Практическое занятие №6. «*Основные элементарные функции комплексного переменного и их свойства*»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Сформулируйте определение линейной функции комплексного переменного. Приведите примеры.
2. В какой области является аналитической линейная функция комплексного переменного?
3. Верно ли утверждение: *Всякое линейное отображение* $W = az + b$, $a \neq 0$, *получается в результате суперпозиции трех простейших отображений*:
   а) $t = |a|z$ (*отображение подобия* с центром подобия в точке $z = 0$ и коэффициентом подобия $|a|$);
   б) $\tau = e^{i \arg a} t$ (*вращение* вокруг точки $t = 0$ с углом поворота $\arg a$);
   в) $W = \tau + b$ (*параллельный перенос* в направлении вектора b на расстояние $|b|$)?
4. Сформулируйте определение невырожденной дробно-линейной функции комплексного переменного. Приведите примеры.
5. В какой области является аналитической дробно-линейная функция комплексного переменного?

6. Верно ли утверждение: *Всякое дробно-линейное отображение* $W = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $bc - ad \neq 0, c \neq 0$, *получается в результате суперпозиции следующих трех простейших отображений*:

   а) $t = \dfrac{c^2}{bc-ad} z + \dfrac{cd}{bc-ad}$; б) $\tau = \dfrac{1}{t}$; в) $W = \dfrac{a}{c} + \tau$?
7. Сформулируйте круговое свойство дробно-линейных отображений?
8. В чем состоит инвариантность ангармонического отношения четырех точек при невырожденном дробно-линейном отображении?
9. Сформулируйте определение и основные свойства показательной функции комплексного переменного.
10. Дайте определение синуса и косинуса комплексного числа $z = x + iy$. Найдите $\sin(5-3i)$ и $\cos(2i)$.
11. Сформулируйте определение и основные свойства тригонометрических функций комплексного переменного.
12. Может ли $|\sin z| > 100$? Если да, то укажите хотя бы одно число z_1, для которого $|\sin z_1| > 100$.
13. Дайте определение натурального логарифма комплексного числа $z = x + iy$. По какой формуле вычисляются значения $\mathrm{Ln} z$?
14. Сформулируйте определение и основные свойства логарифмической функции комплексного переменного.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами в точках 0, 1, $-i$ на подобный ему треугольник с вершинами 0, 2, $1-i$.

2. Найдите линейное преобразование, отображающее круг $T_2 = \{z : |z - i| \leq 2\}$ на единичный круг $T_1 = \{W : |W| \leq 1\}$.

3. Найдите образы следующих линий при отображении $w = \dfrac{z+1}{z}$:

а) $|z| = 2$; б) $|z-1| = 1$; в) $\mathrm{Re}\, z = 0$; г) $\mathrm{Im}\, z = 1$.

4. Найдите образ круга $T_1 = \{z :\ |z - 2i| \leq 1\}$ при отображении $w = (1+i)z + 2$.

5. Отобразите верхнюю полуплоскость $\mathrm{Im}\, z > 0$ на круг $T_2 = \{w :\ |w| < 2\}$.

6. Найдите действительную и мнимую части, а также модуль и аргумент каждого из указанных чисел:

а) $e^{-1+i\frac{\pi}{2}}$; б) $\sin(1+i)$; в) $\cos(1-i)$.

7. Докажите, что $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ для любого $z \in \boldsymbol{C}$.

8. Решите уравнения: а) $\sin z = 2$; б) $\cos z = 1$; в) $e^z = i$.

Задание для самостоятельной работы

1. Найдите линейное преобразование с неподвижной точкой $2-i$, переводящее точку i в точку -1.
2. Найдите линейную функцию, отображающую единичный круг на круг $|z+1-i|\le 4$ так, чтобы центры кругов соответствовали друг другу и диаметр, лежащий на действительной оси, переходил в диаметр, образующий с действительной осью угол, равный $\dfrac{\pi}{2}$.
3. Найдите дробно-линейную функцию, переводящую точки 1, $-i$, $1-i$ соответственно в точки i, ∞, 1.
4. Найдите образы следующих линий при отображении $w=\dfrac{z-i}{z+i}$:

   а) $|z|=1$; б) $|z+1|=1$; в) $\operatorname{Re} z=1$.
5. Постройте дробно-линейную функцию, отображающую единичный круг $|z|<1$ на полуплоскость $\operatorname{Re}W>0$.
6. Найдите действительную и мнимую части, а также модуль и аргумент каждого из указанных чисел:

   а) e^{1+i}; б) $\sin i$; в) $\cos(2-3i)$.
7. Докажите, что справедлива формула $\sin 2z = 2\sin z\cos z$ для любого $z\in \boldsymbol{C}$.
8. Вычислите $\operatorname{Ln}(-i)$.

Практическое занятие №7. «*Понятие интеграла от функции комплексного переменного*»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Сформулируйте определение производной комплекснозначной функции действительного переменного. Приведите примеры.
2. Что называется интегральной суммой для функции $f(z)$ по кривой L?
3. Сформулируйте определение интеграла от функции $f(z)$ комплексного переменного по кривой L. Приведите примеры.
4. Какая связь между $\int\limits_L f(z)dz$ и криволинейными интегралами от функций $\operatorname{Re} f(z)=u(x,y)$ и $\operatorname{Im} f(z)=v(x,y)$?
5. Перечислите основные свойства интеграла от функции комплексного переменного.
6. Сформулируйте теорему о существовании интеграла от функции комплексного переменного по заданной кривой.
7. Вычислите интеграл $\oint\limits_L z^n dz$, где $L=\{z:\ |z|=\rho\}$, $\rho>0$ и n - целое число.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите производную комплекснозначной функции $f(t)$ действительного переменного t, если:

   а) $f(t)=(t+i)^3$; б) $f(t)=\dfrac{t+i}{t-i}$; в) $f(t)=e^{it}$.

2. Вычислите:

   а) $\int\limits_{-1}^{1}(t+i)^2dt$; б) $\int\limits_0^1\dfrac{dt}{t+i}$; в) $\int\limits_0^{2\pi}e^{it}dt$.

3. Составьте интегральную сумму для функции $f(z)=z^2$ по отрезку $[-4;4i]$, соответствующую разбиению отрезка на четыре равные части и выбору левых концов частичных дуг в качестве промежуточных точек.

4. Вычислите интеграл от функции $f(z)$ по кривой L, если:
   а) $f(z)=\operatorname{Re} z$, $L=[-1-i;\ 1+i]$; б) $f(z)=\bar{z}$, $L=[1;i]$;
   в) $f(z)=(z+i)^2$, $L=\left\{z \,\middle|\, z=e^{it},\ 0\le t\le \pi\right\}$; г) $f(z)=|z|$, L: $|z|=1$;
   д) $f(z)=z+(z+1)\bar{z}$, L – треугольник с вершинами 1, $1+i$, i.

Задание для самостоятельной работы

1. Найдите производную комплекснозначной функции $f(t)$ действительного переменного t, если:
   а) $f(t)=t^2+t+i(t^2-1)$; б) $f(t)=\dfrac{t^2+1}{t^2+i}$; в) $f(t)=\cos t+i\sin t$.

2. Вычислите:
   а) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sin(t+i)dt$; б) $\displaystyle\int_0^1\frac{dt}{t^2+i}$; в) $\displaystyle\int_0^{\pi}e^{-2it}dt$.

3. Составьте интегральную сумму для функции $f(z)=z+2i$ по отрезку $[2i;\ 2]$, соответствующую разбиению отрезка на четыре равные части и выбору середин частичных дуг в качестве промежуточных точек.

4. Вычислите интеграл от функции $f(z)$ по кривой L, если:
   а) $f(z)=\operatorname{Im} z$, $L=[-i;1+i]$;
   б) $f(z)=\bar{z}^2$, $L=[1+i;0]$;
   в) $f(z)=z\cdot\bar{z}-1$, $L=\left\{z \,\middle|\, z=e^{it}, 0\le t\le 2\pi\right\}$;
   г) $f(z)=\operatorname{Im}^2 z-i\operatorname{Re}^2 z$, L:$|z|=1$;
   д) $f(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, L – квадрат с вершинами 1, i, -1, $-i$.

Практическое занятие №8. «*Теорема Коши. Интегральная формула Коши*»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Сформулируйте интегральную теорему Коши и следствия из нее. Приведите примеры.
2. Дайте определение первообразной для функции $f(z)$ в области D. Приведите примеры.
3. Сформулируйте теорему о формуле Ньютона-Лейбница для аналитической функции $f(z)$.
4. Запишите интегральную формулу Коши для функции $f(z)$?
5. Приведите конкретные примеры, когда достаточно сложные интегралы эффективно вычисляются с помощью интегральной теоремы Коши или интегральной формулы Коши.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Вычислите интеграл от функции $f(z)$ по линии L, если:

   а) $f(z)=(iz+1)^2$, $L=[-1+i;2i]$;

   б) $f(z)=e^{iz}$, $L=[0;\pi]$;

   в) $f(z)=z\cdot\cos z$, $L=\{z: z=t+it^2, 0\le t\le 1\}$;

   г) $f(z)=z^2\cdot e^{-iz}$, $L=\{z: |z|=2\}$;

   д) $f(z)=\dfrac{z^3}{z-2}$, $L=\{z: |z|=1\}$;

   е) $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z+2)}$, $L=\{z: z=e^{it}, 0\le t\le 2\pi\}$;

   ж) $f(z)=\dfrac{z}{z^2-4z+3}$, $L=\{z: |z-1|=1\}$;

   з) $f(z)=\dfrac{1}{z(z^2+1)}$, $L=\{z: |\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|=2\}$.

2. В зависимости от значений параметра a ($a>0$) вычислите $\int\limits_L \dfrac{dz}{z^2+9}$, $L=\{z: |z-i|=a\}$.

3. Пусть z_1 и z_2 – два различных комплексных числа. Какое число различных значений может принимать интеграл $\int\limits_L \dfrac{dz}{(z-z_1)(z-z_2)}$, если замкнутый контур L не проходит ни через одну точку z_k, $k=1,2$?

Задание для самостоятельной работы

1. Вычислите интеграл от функции $f(z)$ по линии L, если:

   а) $f(z)=(2iz-1)^3$, $L=[i;1+2i]$;

   б) $f(z)=e^{-2iz}$, $L=\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$;

   в) $f(z)=z\cdot\sin z$, $L=\{z: z=t+\pi i\sin t, 0\le t\le\pi\}$;

   г) $f(z)=z\cdot e^z$, $L=\{z: |z|=1\}$;

   д) $f(z)=\dfrac{z^2+i}{z+2i}$, $L=\{z: |z|=1\}$;

   е) $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-2i)(z+2)}$, $L=\{z: z=e^{it}, 0\le t\le 2\pi\}$;

   ж) $f(z)=\dfrac{z}{z^2-5iz-6}$, $L=\{z: |z-2i|=2\}$;

   з) $f(z)=\dfrac{z^2-iz}{z(z^2-1)}$, L – треугольник с вершинами 2, $-2+2i$, $-2-2i$.

2. В зависимости от значений параметра a ($a>0$) вычислите $\int\limits_L \frac{dz}{z^2+a^2}$, $L=\{z:\ |z|=a+1\}$.

Практическое занятие №9. «*Степенные ряды в комплексной области*»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Сформулируйте определение степенного ряда. Приведите примеры.
2. Что называется кругом сходимости степенного ряда?
3. Перечислите основные свойства степенных рядов.
4. Сформулируйте теорему о разложимости аналитической функции в степенной ряд.
5. Запишите неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда аналитической функции.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите круг сходимости степенного ряда, если:

   а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1+i}{3+4i}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2iz-3)^n}{(1+i)^n}$.

2. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\frac{z}{z^2+4}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z+1-i)^n$ и его коэффициенты c_0 и c_1.
3. Приведите пример степенного ряда, круг сходимости которого $T_2=\{z:|z-i|<2\}$. Что можно сказать о сходимости этого ряда в точках $z=1$ и $z=-3-i$?
4. Известно, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z+i)^n$ сходится в точке $z_1=1-2i$ и расходится в точке $z_2=-3-5i$. Что можно сказать о сходимости этого ряда в точках $z_3=0$, $z_4=-1$, $z_5=-2+i$, $z_6=-4+6i$?
5. Вычислите интеграл от функции $f(z)$ по линии L, если:

   а) $f(z)=\frac{z+2i}{(z^2+1)(z+1)^2}$, $L=\{z:\ |z-1|=1\}$; б) $f(z)=\frac{e^z}{(z-i)^3}$, $L=\{z:\ |z-2|=10\}$.

Задание для самостоятельной работы

1. Найдите круг сходимости степенного ряда, если:

   а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{1+i}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n}$ в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(iz-5)^n}{(3+4i)^n}$.

2. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\frac{1}{z^2+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z+2+i)^n$ и его коэффициенты c_0 и c_1.
3. Приведите пример степенного ряда, круг сходимости которого $|z+i|<5$. Что можно сказать о сходимости этого ряда в точках $z=1$ и $z=-3+10i$?
4. Известно, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-i)^n$ сходится в точке $z_1=2+i$ и расходится в точке $z_2=-3-i$. Что можно сказать о сходимости этого ряда в точках $z_3=0$, $z_4=3i$, $z_5=-2+i$, $z_6=-1+6i$?
5. Вычислите интеграл от функции $f(z)$ по линии L, если:

а) $f(z)=\dfrac{z+i}{z^2+4}$, $L:|z-i|=2$; б) $f(z)=\dfrac{z^4+4z+1}{(z-i)^{2012}}$, $L:|z-i|=1$.

6. В зависимости от значений параметра $a \in C$ вычислите $\int\limits_L \dfrac{z^2+1}{(z-a)^2}dz$, где $L=\{z: \ |z|=1\}$.

Практическое занятие №10. «*Разложение аналитических функций в ряд Тейлора. Нули аналитической функции. Теорема единственности. Аналитическое продолжение*»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Сформулируйте определение ряда Тейлора для функции $f(z)$ с центром в точке a. Приведите примеры.
2. Как находятся коэффициенты ряда Тейлора?
3. Сформулируйте определение нуля аналитической функции $f(z)$. Приведите примеры.
4. Что называется порядком (кратностью) нуля аналитической функции $f(z)$? Приведите примеры.
5. Какие способы определения порядка нулей аналитической функции Вам известны?
6. Дайте определение предельной точки. Приведите примеры.
7. Сформулируйте теорему единственности.
8. Может ли аналитическая в области D функция $f(z)$ иметь в ней бесконечно много нулей?
9. В каком случае функция $F(z)$ называется аналитическим продолжением функции $f(z)$. Приведите примеры.
10. Сколькими способами можно аналитически продолжить функцию с заданного множества, имеющего предельную точку?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z-a$ и найдите круг сходимости, если:

а) $f(z)=e^{iz}$, $a=-1$; б) $f(z)=\sin^2 z$, $a=0$; в) $f(z)=\dfrac{z}{z^2-4}$, $a=2i$.

2. Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_{|z+1|=2} \dfrac{e^{iz}}{(z+1)^2}dz$; б) $\int\limits_{|z|=1} \dfrac{\sin^2 z}{z}dz$.

3. Найдите все нули функции $f(z)$ и укажите их порядки, если:

а) $f(z)=(z^2-9)(z^2+9)$; б) $f(z)=\dfrac{\sin^3 z}{z}$.

4. Найдите порядок нуля $a=0$ функции $f(z)$, если:

а) $f(z)=z^2\sin z$; б) $f(z)=z\left(e^{-z^2}-1\right)$.

5. Пусть число a является нулем порядка m и n соответственно для аналитических функций $f(z)$ и $\varphi(z)$. Что можно сказать о порядке нуля a для функции: а) $f(z)+\varphi(z)$; б) $f(z)\cdot\varphi(z)$; в) $f'(z)\cdot\varphi''(z)$.

6. Найдите все предельные точки множества E, если:

а) $E=[1-i;-1+i]$; б) $E=\left\{z: z=1+\dfrac{i}{n}, n\in N\right\}$.

7. Определите, существует ли функция $f(z)$, аналитическая в единичном круге и удовлетворяющая условиям:

а) $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$, $n\in N$; б) $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+\sin\frac{\pi n}{2}}$, $n\in N$.

8. Используя теорему единственности, докажите равенство $\sin^2 z+\cos^2 z=1$.

9. Объясните, почему не противоречит теореме единственности равенство $\sin z=\cos z$ при $z=\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$.

10. Докажите, что функция $F(z)=\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n$ является аналитическим продолжением функции $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$.

Задание для самостоятельной работы

1. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z-a$ и найдите её круг сходимости, если:

а) $f(z)=ze^{-z}$, $a=-i$; б) $f(z)=\frac{z+2}{z^2+4}$, $a=2$.

2. Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_{|z+i|=2}\frac{ze^{-z}}{(z+1)^3}dz$; б) $\int\limits_{|z-2|=1}\frac{z+2}{(z^2+4)(z-2)}dz$.

3. Найдите порядок нуля $a=0$ функции $f(z)$, если:

а) $f(z)=z\sin z-z^2$; б) $f(z)=z\left(e^{z^2}-1\right)-z^3$.

4. Пусть число a является нулем порядка m и n соответственно для аналитических функций $f(z)$ и $\varphi(z)$. Что можно сказать о порядке нуля a для функции:

а) $f(z)-\varphi(z)$; б) $f^2(z)\cdot\varphi^3(z)$; в) $c_1\cdot f(z)+c_2\cdot\varphi(z),\ c_1,c_2\in C$.

5. Найдите предельные точки множества E, если:

а) $E=\{z:\ |z|=1\}$; б) $E=\left\{z:z=\frac{1}{n}+2i,n\in N\right\}$.

6. Определите, существует ли функция $f(z)$, аналитическая в единичном круге и удовлетворяющая условиям:

а) $f\left(\frac{1}{n}\right)=-f\left(-\frac{1}{n}\right)$, $n\in N$; б) $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2+\cos^2\frac{\pi n}{2}}$, $n\in N$.

7. Используя теорему единственности, докажите равенство $\sin 2z=2\sin z\cos z$.

8. Объясните, почему не противоречит теореме единственности равенство $\cos z=\cos^2 z$ при $z=2\pi n,\ n\in Z$.

9. Докажите, что функция $F(z)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{4^n}$ является аналитическим продолжением функции $f(z)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+1)^n}{3^n}$.

Практическое занятие №11. «*Ряд Лорана. Изолированные особые точки аналитической функции*»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Сформулируйте определение ряда Лорана.
2. Что называется главной (правильной) частью ряда Лорана? Приведите примеры.
3. Что является областью сходимости ряда Лорана?
4. Сформулируйте теорему Лорана.
5. Дайте определение изолированной особой точки функции $f(z)$. Приведите примеры.
6. В каком случае функция $f(z)$ называется правильной в точке z_0? Приведите примеры.
7. Сформулируйте определение полюса функции $f(z)$. Приведите примеры.
8. Что называется кратностью полюса функции $f(z)$?
9. Дайте определение существенно особой точки функции $f(z)$. Приведите примеры.
10. Сформулируйте теорему Сохоцкого-Вейерштрасса.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите область сходимости :

   а) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{3^n z^n}{n^2+1}$; б) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{2^n}$; в) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}+\frac{n}{z^{n+1}}\right)$.
2. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-z_0$, если:

   а) $f(z)=\frac{z}{(z+i)(z-3)}$, $z_0=0$; б) $f(z)=z^2\sin\frac{1}{z-1}$, $z_0=1$.
3. Определите характер особых точек функции $f(z)$, если:

   а) $f(z)=\frac{1}{\sin z}$; б) $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z^2}}$; в) $f(z)=\frac{1-\cos 2z}{z^2}$.
4. Пусть функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ имеют полюсы в точке z_0 порядка m и n соответственно. Определите характер особенности в точке z_0 функции:

   а) $f(z)\cdot\varphi(z)$; б) $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$; в) $f(z)+\varphi(z)$.
5. Вычислите интеграл от функции $f(z)$ по кривой Γ, если:

   а) $f(z)=\frac{1}{z^3-z^5}$, $\Gamma=\left\{z:\ |z-1|=\frac{1}{2}\right\}$; б) $f(z)=ze^{\frac{1}{z}}$, $L=\{z:\ |z|=1\}$.
6. Проверьте справедливость теоремы Сохоцкого-Вейерштрасса для функции $\sin\frac{1}{z}$.

Задание для самостоятельной работы

1. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0, если:

а) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2-5z+6}$, $z_0=2$; б) $f(z)=(z^2-1)\cdot e^{\frac{1}{z^2}}$, $z_0=0$.

2. Определите характер особых точек функции $f(z)$, если:

а) $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^3-1}$; б) $f(z)=\dfrac{1-e^{z^2}}{z^4-z^2}$; в) $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z^2}}}{1-\cos^2 z}$.

3. Постройте пример функции, имеющей в расширенной комплексной плоскости следующие особенности:

а) ноль второго порядка в бесконечности;

б) ноль первого порядка в точке $z=0$ и простой полюс в бесконечности;

в) полюс третьего порядка в точке $z=i$ с главной частью $\dfrac{c_{-3}}{(z-i)^3}$ и полюс первого порядка в бесконечности.

4. Пусть $f(z)$ однозначная функция, не имеющая в области D других особенностей, кроме полюсов. Докажите, что функция $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ имеет простые полюсы во всех полюсах функции $f(z)$ и в тех точках, в которых $f(z)=0$.

Практическое занятие №12. «*Вычет функции относительно изолированной особой точки*»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Дайте определение изолированной особой точки функции $f(z)$. Приведите примеры.
2. Сформулируйте определение вычета функции $f(z)$ в изолированной особой точке.
3. Чему равен вычет функции $f(z)$ в правильной точке z_0?
4. Сформулируйте основную теорему о вычетах.
5. Как найти $\operatorname{Res}_{z_0} f(z)$, если z_0 является простым (кратным) полюсом функции $f(z)$?
6. Дайте определение вычета функции относительно бесконечно удаленной точки.
7. Чему равна сумма вычетов относительно всех особенностей аналитической функции в расширенной комплексной плоскости?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите вычеты функции $f(z)$ во всех ее изолированных особых точках, если:

а) $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2-1}$; б) $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2(z-\pi)}$; в) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^4\cos z}$.

2. Вычислите:

а) $\displaystyle\int_L \frac{z+1}{(z-1)(z+5)^2}\,dz$, если $L=\{z:\ |z|=3\}$;

б) $\displaystyle\int_L \frac{e^{iz}}{(z+1)(z+2)^2}$, если $L=\{z:|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|=3\}$; в) $\displaystyle\int_L \frac{dz}{\sin z}$, если L – единичная окружность.

3. Найдите вычеты в точке $z=\infty$ следующих функций:

а) $f(z)=\dfrac{z^4+1}{z^6-1}$; б) $f(z)=\cos\dfrac{(z+2)\pi}{2z}$.

Задание для самостоятельной работы

1. Найдите вычеты функции $f(z)$ во всех ее изолированных особых точках, если:

а) $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2+1}$; б) $f(z)=\dfrac{\sin\pi z+1}{z^2(z+1)}$; в) $f(z)=\dfrac{\cos\pi z}{(z-1)^2\sin\pi z}$.

2. Вычислите:

а) $\int\limits_L \dfrac{z+3}{(z+1)(z-5)^2}dz$, если $L=\{z:\ |z+1|=1\}$;

б) $\int\limits_L \dfrac{\cos\pi z}{(z-1)(z-2)^2}$, если $L=\{z:\operatorname{Re}^2 z+\operatorname{Im}^2 z=5\}$;

в) $\int\limits_L \dfrac{\cos 2z dz}{\sin z}$, если L – единичная окружность.

3. Найдите вычеты в точке $z=\infty$ следующих функций:

а) $f(z)=\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{z-1}$; б) $f(z)=z\cos^2\dfrac{\pi}{z}$.

Практическое занятие №13. «Контрольная работа»

Образец контрольной работы

1. Вычислите $\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2021}$.

2. Является ли функция $g(z)=z^2-2\overline{z}+5i$ аналитической в какой-нибудь точке комплексной плоскости? Ответ обосновать.

3.Найдите круг сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(iz-3)^n}{(1-i)^n}$.

4. Вычислите $\int\limits_L \dfrac{z+1}{(z-1)^2(z+10)}dz$, если $L=\{z:|z|=2\}$.

5. Найдите вычеты функции $f(z)$ во всех ее изолированных особых точках, если $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2+4}$.

Самостоятельная работа

Задания для самостоятельной работы приводятся в планах практических занятий.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Текущая аттестация осуществляется на каждом практическом занятии в процессе фронтального опроса, выполнения заданий для аудиторной работы, в процессе проверки домашней самостоятельной работы.

Проведение текущего контроля осуществляется также посредством проведения аудиторных контрольных работ и разноуровневых самостоятельных работ.

Оценочные средства

I. Контрольные вопросы для проверки теоретической подготовки к практическому занятию.

Перечень вопросов приводится в планах практических занятий.

II. Задания для самостоятельной работы.

Перечень практических заданий для самостоятельной работы приводится в планах практических занятий.

III. Контрольные работы по дисциплине.

Проведение текущего контроля осуществляется также посредством проведения аудиторной письменной контрольной работы.

Образец контрольной работы

1. Вычислите $\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2021}$.

2. Является ли функция $g(z)=z^2-2\overline{z}+5i$ аналитической в какой-нибудь точке комплексной плоскости? Ответ обосновать.

3.Найдите круг сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz-3)^n}{(1-i)^n}$.

4. Вычислите $\int_L \frac{z+1}{(z-1)^2(z+10)}dz$, если $L=\{z:|z|=2\}$.

5. Найдите вычеты функции $f(z)$ во всех ее изолированных особых точках, если $f(z)=\frac{z+2}{z^2+4}$.

Критерии оценивания контрольной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно реализован каждый метод решения	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов

1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация осуществляется посредством проведения экзамена в 6 семестре.

Вопросы для подготовки к экзамену и образцы экзаменационных заданий.

Вопросы к экзамену

1. Плоскость комплексных чисел. Модуль, аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма записи комплексного числа.
2. Извлечение корней из комплексных чисел.
3. Предел последовательности комплексных чисел.
4. Числовые ряды с комплексными членами.
5. Понятие функции комплексной переменной. Примеры.
6. Предел и непрерывность функции комплексной переменной.
7. Понятие производной от функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана.
8. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие конформного отображения.
9. Линейная функция. Ее геометрический смысл.
10. Дробно-линейная функция и ее свойства.
11. Показательная функция и ее свойства. Показательная форма записи комплексных чисел.
12. Логарифмическая функция и ее свойства.
13. Тригонометрические функции и их свойства.
14. Гармонические функции и их связь с аналитическими функциями комплексного переменного.
15. Понятие интеграла от функции комплексной переменной. Условия существования интеграла от функции комплексной переменной. Вычисление интеграла.
16. Интегральная теорема Коши.
17. Понятие первообразной. Формула Ньютона-Лейбница.
18. Интегральная формула Коши.
19. Бесконечная дифференцируемость аналитических функций.
20. Неравенства Коши и теорема Лиувилля.
21. Степенные ряды. Теорема Абеля. Круг сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов.
22. Ряд Тейлора. Разложение аналитической функции в степенной ряд.
23. Разложение основных элементарных функций в степенные ряды.
24. Нули аналитической функции.
25. Теорема единственности.
26. Ряд Лорана. Теорема Лорана.
27. Устранимые особые точки функции комплексной переменной. Пример.

28. Полюсы функции комплексной переменной. Пример.
29. Существенно особые точки функции комплексной переменной. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса. Пример.
30. Вычет функции. Теорема о вычетах.

Образец экзаменационного задания

Вариант k

(в практических заданиях значение параметра k равно номеру варианта)

1. Показательная функция комплексного переменного и ее свойства.
2. Интегральная теорема Коши.
3. Найдите все корни уравнения $z^4 + i^k k = 0$.
4. Вычислите интеграл $\oint\limits_L \frac{e^z \cos kz}{z^2 + (k+1)z} dz$, где $L = \{z : |z| = 1\}$.
5. Найдите радиус и круг сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(k + (-1)^n\right)^n (z - ik)^n$.

Критерии оценивания ответа на экзамене

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Правильный ответ на вопрос	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25, 0,5 и 0,75 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

7. Перечень основнойи дополнительной учебной литературы

7.1. Список основной литературы

1. *Бугров, Я. С.* Высшая математика в 3 т. Том 3. В 2 кн. Книга 2. Ряды. Функции комплексного переменного : учебник для вузов / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 219 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-8645-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/452425.

2. *Далингер, В. А.* Комплексный анализ : учебное пособие для вузов / В. А. Далингер, С. Д. Симонженков. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 143 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08399-6. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/472770 .

3. *Привалов, И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного : учебник для вузов / И. И. Привалов. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 402 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-14313-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/468294 (дата обращения: 30.09.2021).

7.2. Список дополнительной литературы

4. Балк М.Б., Виленкин Н.Я., Петров В.А. Математический анализ: теория аналитических функций. – М., 1985.
5. Балк М.Б., Петров В.А., Полухин А.А. Задачник-практикум по теории аналитических функций. М., 1976.
6. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Т 1,2. – СПб., Лань, 2009.
7. Петров В.А. Теория функций комплексного переменного. – Смоленск. Изд-во СмолГУ, 2015.

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

- Система дистанционного обучения Смоленского государственного университета http://moodle.smolgu.ru
- Электронно-библиотечная система университета http://biblioteka.smolgu.ru
- Национальный открытый университет http://www.intuit.ru
- Образовательный математический сайт http://exponenta.ru
- Общероссийский математический портал http://www.mathnet.ru

8. Материально-техническое обеспечение

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используется интерактивная доска; проектор; система компьютерной математики Mathematica. Осуществляется поиск информации в WWW-пространстве; работа с Web-страницами и ресурсами сети Интернет.

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине в университете имеется следующая необходимая инструментальная база: учебные аудитории для проведения практических занятий; компьютерный класс, оборудованный персональными ЭВМ с необходимым математическим софтом и выходом в Интернет для проведения практических занятий; кабинеты, оборудованные проекторами и электронными досками для проведения лекционных занятий. Имеется кабинет ксерокопирования и кафедральный принтер для подготовки индивидуальных дидактических карточек, контрольных и экзаменационных материалов.

9. Программное обеспечение

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине используется Информационно-вычислительный центр физико-математического факультета (Положение о Центре утверждено приказом ректора №01-66 от 28.09.2015 г.).

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используются информационные технологии обработки данных с помощью прикладных программных продуктов Microsoft Excel, Microsoft PowerPoint. Осуществляется поиск информации в WWW-пространстве; работа с Web-страницами и социальными ресурсами сети Интернет, а также используются различные системы компьютерной математики.