

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»
Проректор по учебно-
методической работе
_____ Ю.А. Устименко
«23» июня 2022 г.

Рабочая программа дисциплины
Б1.О.18 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Направление подготовки: **01.03.02 Прикладная математика и информатика**
Направленность (профиль): **Математическое и информационное моделирование**

Форма обучения - очная
Курс – 2
Семестр – 4
Всего зачетных единиц – 3, часов – 108

Форма отчетности: экзамен – 4 семестр

Программу разработала:
старший преподаватель Богданова Н.Н.

Одобрена на заседании кафедры
«16» июня 2022 г., протокол № 10

Заведующий кафедрой _____ К.М. Расулов

Смоленск
2022

1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Дифференциальные уравнения» относится к обязательной части блока 1 и изучается в 4 семестре. Она помогает в изучении таких дисциплин, как «Численные методы», «Уравнения математической физики».

Для успешного освоения данной дисциплины необходимы компетенции студентов, сформированные при изучении курса «Математический анализ».

Целями преподавания дисциплины являются:

- познакомить студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения как теоретических, так и практических задач;
- привить студентам умение и привычку к самостоятельному изучению учебной литературы по математике;
- развить логическое мышление и повысить общий уровень математической культуры;
- выработать навыки математического исследования прикладных задач и умение формулировать задачи на математическом языке;
- показать возможности математического аппарата при решении задач, возникающих в различных сферах человеческой деятельности.

К основным задачам изучения курса дифференциальных уравнений относятся следующие:

- изучить основные понятия, связанные с дифференциальными уравнениями (понятие уравнения и его решения, задача Коши, геометрическая интерпретация дифференциальных уравнений, понятие особого решения);
- рассмотреть методы решения различных типов дифференциальных уравнений первого и высших порядков;
- сформировать устойчивые навыки решения линейных дифференциальных уравнений, как наиболее важных в различных приложениях;
- рассмотреть элементы качественной теории дифференциальных уравнений, понятие устойчивости решения;
- изучить системы дифференциальных уравнений и некоторые методы их интегрирования;
- рассмотреть общие свойства решений и теорию устойчивости для нормальных систем дифференциальных уравнений;
- научить решать некоторые прикладные задачи с использованием аппарата дифференциальных уравнений;
- познакомить с основными этапами истории возникновения и развития теории дифференциальных уравнений.

Изучение курса основано на традиционных методах высшей школы, тесной взаимосвязи со смежными курсами, а также на использовании современной учебной, методической литературы, информационных и образовательных технологий.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы
-------------	------------

<p>ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности</p>	<p>Знать: основные законы естественнонаучных дисциплин, базовый аппарат математики, необходимые для осуществления профессиональной деятельности; Уметь: применять знания в области естественнонаучных и математических дисциплин для проведения теоретических и экспериментальных исследований в профессиональной деятельности; Владеть: методами математического анализа и моделирования, навыками в области естественнонаучного и общинженерного знания, позволяющими осуществлять исследования в профессиональной деятельности.</p>
<p>ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности</p>	<p>Знать: базовые методы анализа, модификации и применения математических моделей, современные информационные методы в решении прикладных задач; Уметь: применять аппарат математического моделирования для решения прикладных задач; Владеть: навыками работы с инструментальными средствами математического моделирования предметной области, прикладных и информационных процессов.</p>

3. Содержание дисциплины

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Понятие дифференциального уравнения. Порядок и решение обыкновенного дифференциального уравнения. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Задача Коши и теорема Коши-Пикара (о существовании и единственности решения) для уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Понятия общего, частного и особого решений дифференциального

уравнения. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ и

его решений. Дифференциальное уравнение первого порядка в симметричной форме. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли и Риккати. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Дифференциальное уравнение первого порядка, однородное относительно x и y . Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Методы интегрирования дифференциальных уравнений вида $F(x, y, y') = 0$. Уравнения Лагранжа и Клеро. Составление дифференциального уравнения первого порядка по его общему интегралу.

3. Понятие об устойчивости решений уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Теорема непрерывной зависимости решений уравнения от начальных условий. Понятие устойчивости решений уравнения $y' = f(x, y)$. Примеры.

4. Обыкновенные дифференциальные уравнения высшего порядка. Задача Коши и теорема Коши-Пикара для дифференциальных уравнений высшего порядка. Понятия общего и частного решений дифференциального уравнения высшего порядка. Некоторые классы дифференциальных уравнений высшего порядка, допускающие понижение порядка.

5. Линейные уравнения высших порядков. Понятие линейного дифференциального уравнения высшего порядка. Теорема Коши-Пикара для линейных уравнений высшего порядка. Построение общего решения для линейных однородных уравнений. Структура общего решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений. Отыскание частного решения линейного уравнения методом вариации произвольных постоянных. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Построение общего решения. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнение Эйлера.

6. Нормальные системы дифференциальных уравнений. Нормальная система дифференциальных уравнений. Задача Коши и теорема Коши-Пикара о существовании и единственности решения. Сведение дифференциальных уравнений n -го порядка к нормальной системе дифференциальных уравнений.

7. Системы линейных дифференциальных уравнений. Системы линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка. Фундаментальная система решений. Формула Остроградского-Лиувилля. Структура общего решения системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений. Метод Лагранжа. Матричный метод интегрирования линейных систем дифференциальных уравнений. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера.

8. Общие свойства решений и теория устойчивости для нормальных систем дифференциальных уравнений. Непрерывная зависимость решений от начальных условий и параметров. Первые интегралы нормальной системы дифференциальных уравнений. Симметричная форма систем дифференциальных уравнений. Автономные системы дифференциальных уравнений. Понятие устойчивости по Ляпунову. Простейшие типы точек покоя для системы двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Исследование устойчивости решений с помощью функций Ляпунова. Исследование на устойчивость по первому приближению.

4. Тематический план

4 семестр

№ п/п	Темы	Всего часов	Формы занятий			
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	Самостоятельная работа
1.	Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка	15	6	6	-	3
2.	Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной	5	2	2	-	1
3.	Понятие об устойчивости решений уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$	5	2	2	-	1
4.	Обыкновенные дифференциальные уравнения высшего порядка	5	2	2	-	1
5.	Линейные уравнения высших порядков	14	6	6	-	2
6.	Контрольная работа	3	-	2	-	1

7.	Нормальные системы	5	2	2	-	1
8.	Системы линейных дифференциальных уравнений	13	6	6	-	1
9.	Общие свойства решений и теория устойчивости для нормальных систем дифференциальных уравнений	16	8	6	-	2
Экзамен		27	-	-	-	27
Всего за семестр		108	34	34	-	40

5. Виды образовательной деятельности

4 семестр

Лекции 1-3 «Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка»: понятие дифференциального уравнения. Порядок и решение обыкновенного дифференциального уравнения. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Задача Коши и теорема Коши-Пикара (о существовании и единственности решения) для уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$. Понятия общего, частного и особого решений дифференциального уравнения. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ и его решений. Дифференциальное уравнение первого порядка в симметричной форме. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли и Риккати. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Дифференциальное уравнение первого порядка, однородное относительно x и y . Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

Лекция 4 «Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной»: методы интегрирования дифференциальных уравнений вида $F(x, y, y') = 0$. Уравнения Лагранжа и Клеро. Составление дифференциального уравнения первого порядка по его общему интегралу.

Лекция 5 «Понятие об устойчивости решений уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ »: теорема непрерывной зависимости решений уравнения от начальных условий. Понятие устойчивости решений уравнения $y' = f(x, y)$. Примеры.

Лекция 6 «Обыкновенные дифференциальные уравнения высшего порядка»: задача Коши и теорема Коши-Пикара для дифференциальных уравнений высшего порядка. Понятия общего и частного решений дифференциального уравнения высшего порядка. Некоторые классы дифференциальных уравнений высшего порядка, допускающие понижение порядка.

Лекции 7-9 «Линейные уравнения высших порядков»: понятие линейного дифференциального уравнения высшего порядка. Теорема Коши-Пикара для линейных уравнений высшего порядка. Построение общего решения для линейных однородных уравнений. Структура общего решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений. Отыскание частного решения линейного уравнения методом вариации произвольных постоянных. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Построение общего решения. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнение Эйлера.

Лекция 10 «Нормальные системы дифференциальных уравнений»: нормальная система дифференциальных уравнений. Задача Коши и теорема Коши-Пикара о

существовании и единственности решения. Сведение дифференциальных уравнений n -го порядка к нормальной системе дифференциальных уравнений.

Лекции 11-13 «Системы линейных дифференциальных уравнений»: системы линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка. Фундаментальная система решений. Формула Остроградского-Лиувилля. Структура общего решения системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений. Метод Лагранжа. Матричный метод интегрирования линейных систем дифференциальных уравнений. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера.

Лекции 14-17 «Общие свойства решений и теория устойчивости для нормальных систем дифференциальных уравнений»: непрерывная зависимость решений от начальных условий и параметров. Первые интегралы нормальной системы дифференциальных уравнений. Симметричная форма систем дифференциальных уравнений. Автономные системы дифференциальных уравнений. Понятие устойчивости по Ляпунову. Простейшие типы точек покоя для системы двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Исследование устойчивости решений с помощью функций Ляпунова. Исследование на устойчивость по первому приближению.

Практические занятия

Занятие №1.

Понятия дифференциального уравнения и его решения.

Задача Коши и теоремы о существовании и единственности решения для дифференциальных уравнений 1-го порядка

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Дайте определение дифференциального уравнения. Когда дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*?

2. Что называется *порядком* дифференциального уравнения? Каков порядок дифференциального уравнения $yy' - 3 \sin(xy'') = 0$?

3. Каков общий вид обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка?

4. Дайте определение *решения* обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка.

5. Что называется *интегральной кривой* обыкновенного дифференциального уравнения?

6. Сколько различных решений, определенных на одном и том же промежутке $\langle a, b \rangle$, может иметь заданное дифференциальное уравнение?

7. Сформулируйте задачу Коши для дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

8. В чем состоит геометрический смысл задачи Коши для дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

9. Объясните смысл следующего предложения: «Функция $f(x, y)$ в некотором прямоугольнике $\Pi\{(x_0, y_0); a, b\}$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y ».

10. Приведите пример функции двух переменных $f(x, y)$, непрерывной по переменной y в некотором прямоугольнике $\Pi\{(x_0, y_0); a, b\}$, но не удовлетворяющей в нем условию Липшица по y .

11. Приведите пример функции двух переменных $f(x, y)$, непрерывной в некотором прямоугольнике $\Pi\{(x_0, y_0); a, b\}$ и удовлетворяющей в нем условию Липшица по y , но не имеющей в этом прямоугольнике ограниченной частной производной по y .
12. Сформулируйте и докажите теорему Коши-Пикара о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.
13. Сформулируйте теорему Коши о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.
14. Приведите пример задачи Коши, для которой в некотором прямоугольнике $\Pi\{(x_0, y_0); a, b\}$ выполняются условия теоремы Коши-Пикара, но не выполняются условия теоремы Коши.
15. Объясните смысл следующего предложения: «Решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения может быть продолжено вправо (влево)».
16. Какое решение дифференциального уравнения называется *полным*?
17. Что называется *областью единственности решения* дифференциального уравнения?
18. Дайте определение *общего решения (общего интеграла)* дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.
19. Что называется *частным решением (частным интегралом)* дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?
20. Дайте определение *особого решения* обыкновенного дифференциального уравнения.

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1) Какие из следующих уравнений являются *дифференциальными*:

а) $x^2 - 5y = 0$;

б) $3y'' + y = 0$;

в) $\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} - 7 \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x \partial y} = 0$;

г) $\Phi(x, y, z) = 0$?

2) Проверьте, являются ли следующие функции решениями для указанного дифференциального уравнения (C – произвольная постоянная):

а) $y = \sqrt{x^2 + C}$, $yy' = x$; б) $y = x \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$, $xy' = y + x \sin x$;

в) $y = x + Ce^y$, $(x - y + 1)y' = 1$; г) $\begin{cases} x = t \ln t, \\ y = t^2(2 \ln t + 1), \end{cases} y' \ln \frac{y'}{4} = 4x$.

3) Пусть $y = \varphi(x)$ – интегральная кривая дифференциального уравнения $y' = y \cos(x - 1) + \ln x$, проходящая через точку $P(1, 3)$. Найдите значения $\varphi'(1)$, $\varphi''(1)$.

- 4) Докажите, что функция $f(x, y) = y^2 \sin x + e^x$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y в прямоугольнике $\Pi\{(0,0); a, b\}$ и найдите наименьшую из постоянных Липшица для данной функции (здесь a и b - положительные постоянные числа).
- 5) Докажите, что дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = 2|y|^{\frac{1}{2}}$ имеет более одного решения, удовлетворяющего начальному условию $y|_{x=x_0} = 0$, где x_0 - фиксированное действительное число. Какое из условий теоремы Коши-Пикара не выполняется для рассматриваемой здесь задачи Коши?
- 6) Составьте интегральное уравнение, эквивалентное следующей задаче Коши:
 $y' = 2x - y, \quad y|_{x=0} = \pi$.
- 7) Для данных дифференциальных уравнений выделите области, в которых выполняются условия теоремы Коши о существовании и единственности решения:
- а) $y' = x^2 + y^2 - 9$; б) $y' = y + 3\sqrt[3]{y}$; в) $y' = \frac{y}{\cos x}$.
- 8) Проверьте, является ли семейство функций $y = x \left(1 - \frac{1}{\ln x + C}\right)$, где C - произвольная постоянная, *общим решением* дифференциального уравнения $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 1$ в полуплоскости $G_+ = \{(x, y) \in R^2 \mid x > 0, -\infty < y < +\infty\}$. Будет ли функция $y = x$ *особым решением* данного дифференциального уравнения?
- 9) Зная общие решения (общие интегралы) дифференциальных уравнений, найдите их частные решения (частные интегралы), удовлетворяющие заданным начальным условиям:
- а) $y = Cx^2, \quad y|_{x=2} = 3$;
 б) $\ln^2(x + y) + y \ln x = C,$
 $y|_{x=1} = e - 1$; здесь e - основание натурального логарифма.
- 10) Известно, что семейство функций $y = x + \sqrt{(x + C)^3}$, где C - произвольная постоянная, является *общим решением* дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{3}{2}(y - x)^{\frac{1}{3}}$ в полуплоскости $G_1 = \{(x, y) \in R^2 \mid y > x\}$. Будет ли функция $y = x$ *особым решением* данного дифференциального уравнения?

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1) Какие из следующих уравнений являются *дифференциальными*:

а) $y = xy' - (y')^2$; б) $3y^2 + y = 0$;

в) $\frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} = 0$; г) $x^2 + y^2 = 1$?

2) Проверьте, являются ли для заданного дифференциального уравнения следующие функции его решениями (C - произвольная постоянная):

а) $y^2 - x^2 - 2xyy' = 0, \quad y = \sqrt{2Cx - x^2}$;

б) $y' - y = e^{x+x^2}$, $y = e^x \int_0^x e^{t^2} dt + Ce^x$; в) $xy' = y \cdot \operatorname{tg}(\ln y)$, $y = e^{\operatorname{arcsin} Cx}$.

3) Проверьте, удовлетворяет ли условию Липшица по переменной y функция

$q(x, y) = (2 + \cos x) \cdot y^{\frac{2}{3}} - \sin x$ в прямоугольнике $\Pi\{(0,0); a, b\}$, где a и b - положительные постоянные числа.

4) Верно ли, что существует единственное решение дифференциального уравнения $y' = x + y$, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=1} = 5$? Ответ обосновать.

5) Составьте интегральное уравнение, эквивалентное следующей задаче Коши:
 $y' = y^2 + xy + x^2$, $y|_{x=0} = 1$.

6) Для данных дифференциальных уравнений выделите области, в которых выполняются условия теоремы Коши о существовании и единственности решения:

а) $y' = \sqrt{x - 4y^2}$; б) $y' = y \cdot \operatorname{tg} x$.

7) Зная общие решения (общие интегралы) дифференциальных уравнений, найдите их частные решения (частные интегралы), удовлетворяющие заданным начальным условиям:

а) $x^2 + 2y^2 = C$, $y|_{x=-1} = 5$; б) $y = \int_0^x \frac{e^t}{t} dt + C$, $y|_{x=0} = -5$.

8) Докажите, что дифференциальное уравнение $y' = \sqrt{1 - y^2}$ имеет по крайней мере два решения, удовлетворяющих начальному условию $y|_{x=0} = 1$. Найдите особые решения данного уравнения.

Занятие №2.

Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, однородные относительно x и y

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Когда дифференциальное уравнение называется интегрируемым в квадратурах?
2. Какое дифференциальное уравнение 1-го порядка называется уравнением с разделенными переменными?
3. Каков общий интеграл уравнения с разделенными переменными?
4. Какое дифференциальное уравнение 1-го порядка называется уравнением с разделяющимися переменными?
5. Каков общий интеграл уравнения с разделяющимися переменными?
6. Может ли уравнение с разделяющимися переменными иметь *особые решения*? Почему?
7. Когда функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией степени n* в области $D \subset \mathbb{R}^2$?
8. Какое дифференциальное уравнение называется *однородным относительно x и y* ?
9. Каков общий метод решения дифференциального уравнения, однородного относительно x и y ?
10. Могут ли уравнения, *однородные относительно x и y* , иметь *особые решения*?

11. Каким образом уравнение вида $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ приводится к однородному?
12. Приведите пример уравнения, которое приводится к однородному путем замены $y = z^m$, $m \in \mathbb{N}$.

II. Задания для аудиторной работы студентов.

- 1) Найдите общий интеграл уравнения

$$x dx + (1 + y) dy = 0.$$

- 2) Найдите общее и особые решения дифференциального уравнения

$$(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0.$$

- 3) Найдите частное решение уравнения $y' = 2\sqrt{y} \ln x$, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=e} = 1$.

- 4) Решите уравнение $y' = \sin(x - y)$, используя замену переменной.

- 5) Решите дифференциальные уравнения:

а) $y dx + (2\sqrt{xy} - x) dy = 0$; б) $(y + \sqrt{x^2 + y^2}) dx - x dy = 0$.

- 6) Выделите интегральные кривые, проходящие через точку $M(1; 1)$, для следующих

уравнений: а) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$; б) $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$.

- 7) Решите дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$.

- 8) Найдите кривую, для которой площадь Q фигуры, ограниченной искомой кривой, осью OX и двумя прямыми, параллельными оси OY и пересекающими ось абсцисс

в точках 0 и x , является функцией от y вида: $Q = a^2 \ln \frac{y}{a}$, $a > 0$.

- 9) Решите дифференциальное уравнение

$$(2x + y + 1) dx + (2y - x - 1) dy = 0.$$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

- 1) Найдите общее и особые решения дифференциальных уравнений:

а) $ye^{2x} dx - (1 + e^{2x}) dy = 0$; б) $yy' = \frac{1 - 2x}{y}$.

- 2) Найдите частное решение дифференциального уравнения $y' \operatorname{tg} x - y = 1$,

удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1$.

- 3) Решите дифференциальные уравнения:

а) $xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x$; б) $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$.

- 4) Найдите интегральную кривую уравнения $xy dy - y^2 dx = (x + y)^2 e^{-\frac{y}{x}} dx$, проходящую через точку $M(1; 1)$.

5) Найдите интегральную кривую уравнения $(1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})dy = 0$,

проходящую через точку $P(0; 2)$.

6) Найдите кривую, проходящую через точку $M(-1; 1)$, если угловой коэффициент касательной к ней в любой точке равен квадрату ординаты точки касания.

7) Решите дифференциальное уравнение

$$(x + y + 1)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0.$$

Занятие №3.

Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка.

Уравнения Бернулли и Риккати

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Какое дифференциальное уравнение называется интегрируемым в квадратурах?
2. Каков вид общего решения дифференциального уравнения $y' = Q(x)$?
3. Какое дифференциальное уравнение называется линейным?
4. Каким приемом линейное дифференциальное уравнение $y' + P(x)y = Q(x)$ можно привести к уравнению, явно не содержащему искомой функции?
5. Каков вид общего решения *однородного* линейного дифференциального уравнения (ЛДУ) $y' + P(x)y = 0$?
6. Каков вид общего решения *неоднородного* ЛДУ $y' + P(x)y = Q(x)$?
7. Изложите способ решения *линейного неоднородного* дифференциального уравнения $y' + P(x)y = Q(x)$, который принято называть *методом вариации произвольной постоянной*.
8. Почему уравнение $y' + P(x)y = Q(x)$ относится к уравнениям, разрешимым в квадратурах?
9. Какова структура общего решения линейного *неоднородного* уравнения $y' + P(x)y = Q(x)$?
10. Сформулируйте теорему Коши для ЛДУ. Могут ли ЛДУ иметь особые решения?
11. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением Бернулли?
12. Какие способы решения уравнения Бернулли Вы знаете?
13. Каков вид общего интеграла уравнения Бернулли?
14. Может ли уравнение Бернулли иметь особые решения?
15. Запишите общий вид уравнения Риккати. Каким образом уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли?

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1) Найдите общие решения дифференциальных уравнений:

а) $xy' + 2y = x^2$; б) $y' + y = \cos x$.

2) Найдите частные решения следующих дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

а) $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, $y|_{x=0} = 1$; б) $y' + x^2 y = x^2$, $y|_{x=2} = 1$.

3) Общее решение некоторого дифференциального уравнения имеет вид:

$y = C\varphi(x) + \psi(x)$, где C - произвольная постоянная, φ, ψ - конкретные функции от x . Докажите, что дифференциальное уравнение, задающее любое семейство кривых этого вида, есть линейное уравнение.

- 4) Решите уравнение, линейное относительно переменной x :

$$y' = \frac{1}{x \cos y + \sin 2y}.$$

- 5) За сколько минут тело, нагретое до 100° , охладится до 25° в комнате с температурой 20° , если до 60° оно охлаждается за 10 минут? (По закону Ньютона скорость охлаждения пропорциональна разности температур).

- 6) Сила тока i в цепи с сопротивлением R , самоиндукцией L и напряжением $U(t)$

удовлетворяет дифференциальному уравнению $L \frac{di}{dt} + Ri = U(t)$.

Решите это уравнение, считая R, L постоянными, а $U(t) = kt$ ($k > 0$);

начальное условие $i(0) = 0$.

- 7) Решите дифференциальное уравнение $y' + 2xy = 2x^3 y^3$.

- 8) Найдите общее и особые решения дифференциального уравнения $xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}$.

- 9) Найдите общее решение дифференциального уравнения $xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2$, имеющего частное решение вида $y = ax + b$.

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

- 1) Найдите общее решение дифференциального уравнения $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

- 2) Найдите частные решения следующих дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

а) $xy' - \frac{y}{x+1} = x$, $y|_{x=1} = 1$; б) $y' - 2xy = 0$, $y|_{x=0} = 5$.

- 3) Решите уравнение, линейное относительно переменной x :

$$(x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0.$$

- 4) Закон распада радия состоит в том, что скорость распада пропорциональна наличному количеству радия. Известно, что половина его первоначального запаса распадается по истечении 1600 лет. Определите количество нераспавшегося радия по истечении 100 лет, если первоначальное его количество равно 1 кг.

- 5) Найдите общее и особые решения дифференциального уравнения $xy' + y = y^2 \ln x$.

- 6) Решите дифференциальное уравнение $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$, имеющее частное решение вида $y = ax + b$.

Занятие №4.

Геометрическое истолкование уравнения $y' = f(x, y)$ и его решений.

О приближенных методах решения дифференциальных уравнений.

Уравнения в полных дифференциалах

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Какой геометрический смысл имеет дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ и его решение?
2. Что такое изоклины дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$?
3. Может ли изоклина быть интегральной кривой данного дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$?

4. В каких точках плоскости XOY интегральные кривые уравнения $y' = f(x, y)$ могут быть параллельны оси OY ?
5. Что называется областью задания поля направлений дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$?
6. Какова симметричная форма записи дифференциального уравнения 1-го порядка?
7. Какая точка называется особой точкой дифференциального уравнения $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$?
8. В чем основная суть приближенного решения уравнения $y' = f(x, y)$ методом изоклин (методом последовательных приближений)?
9. Дайте определение решения дифференциального уравнения $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.
10. Когда уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах?
11. Если $dU(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$, то каков общий интеграл дифференциального уравнения $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$?
12. Каков признак того, что уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ является уравнением в полных дифференциалах?
13. В чем суть метода решения уравнения в полных дифференциалах?
14. Что называется интегрирующим множителем дифференциального уравнения?

II. Задания для аудиторной работы студентов.

- 1) Найдите особые точки следующих дифференциальных уравнений:

$$\text{а) } y' = \frac{x + 3y - 5}{x - 2y}; \quad \text{б) } y' = \frac{x^3 + y^3 - 28}{x + y - 4}.$$

- 2) Методом изоклин приближенно постройте интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = y - x^2$.

- 3) Методом последовательных приближений решите задачу Коши:

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad y(0) = 1.$$

- 4) Сколько решений дифференциального уравнения $(x - 1)\frac{dy}{dx} + y = 0$ определяет соотношение $y(x - 1) = C$ при каждом фиксированном значении $C \in \mathbf{R}$?

- 5) Решите дифференциальное уравнение $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx = \frac{2y}{x^3}dy$.

- 6) Выделите интегральную кривую уравнения $\frac{x}{x^2 + y^2}dy = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1\right)dx$, проходящую через точку $M(1; 1)$.

- 7) Найдите кривую, для которой площадь, ограниченная этой кривой, осью абсцисс и двумя прямыми, параллельными оси OY , пропорциональна отношению абсциссы к ординате правой концевой точки дуги кривой.

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

- 1) Решите дифференциальные уравнения:

$$\text{а) } 3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1)dy = 0; \quad \text{б) } (\sin xy + xy \cos xy)dx + x^2 \cos xy dy = 0.$$

2) Выделите интегральную кривую уравнения

$$(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (6xy + x^2 + 3)dy = 0, \text{ проходящую через точку } M(0; 1).$$

3) Найдите особые точки дифференциального уравнения

$$y' = \frac{x^2 + y^2 - 13}{xy - 6}.$$

4) Методом изоклин приближенно постройте интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = \frac{y}{2x}$.

5) Найдите три последовательных приближения решения следующей задачи Коши:

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1.$$

Занятие №5.

Дифференциальные уравнения 1-го порядка, неразрешенные относительно производной.

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Какие методы решения уравнений неразрешенных относительно производной вы знаете?
2. Как решаются уравнения вида $F(y') = 0$?
3. Опишите метод введения параметра применительно к уравнениям вида $F(x, y') = 0$.
4. Опишите метод введения параметра применительно к уравнениям вида $F(y, y') = 0$.
5. Расскажите о методе введения параметра в общем случае для уравнения вида $F(x, y, y') = 0$.
6. Как решается уравнение вида $y = f(x, y')$?
7. Как решается уравнение вида $x = f(y, y')$?
8. Какое уравнение называется уравнением Лагранжа? Как оно интегрируется?
9. Какое уравнение называется уравнением Клеро? Как оно интегрируется?

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1) Найти все решения данных дифференциальных уравнений.

а) $(y')^2 - y^2 = 0$

б) $y(y')^3 + x = 1$

в) $x(y')^2 - 2yy' + x = 0$

2) Решить дифференциальные уравнения методом введения параметра.

а) $x = (y')^3 + y'$

б) $y = (y')^2 + 2(y')^3$

в) $(y')^2 - (y')^3 = y^2$

г) $2xy' - y = y' \ln yy'$

3) Решить уравнения Лагранжа и Клеро.

а) $y = 2xy' - 4(y')^3$

б) $y = x(y')^2 - 2(y')^3$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1) Найти все решения данных дифференциальных уравнений.

а) $8(y')^3 = 27y$

б) $(y')^2 - 4y^3 = 0$

2) Решить дифференциальные уравнения методом введения параметра.

а) $x = y' \sqrt{(y')^2 + 1}$

б) $y = \ln(1 + (y')^2)$

3) Решить уравнения Лагранжа и Клеро.

а) $y + xy' = 4\sqrt{y'}$

Занятие №6.

Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Каким образом решатся простейшее уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$?
2. Как достигается понижение порядка в уравнении не содержащим неизвестную функцию y ?
3. Как достигается понижение порядка в уравнении не содержащим независимую переменную x ?
4. Какие еще способы понижения порядка вам известны?

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1) Решить дифференциальные уравнения.

а) $2xy' \cdot y'' = (y')^2 - 1$

б) $(y')^2 + 2yy'' = 0$

в) $y'' - xy''' + (y''')^3 = 0$

г) $(y' + 2y)y'' = (y')^2$

д) $xy'' = y' + x \sin \frac{y'}{x}$

2) Решить уравнения, преобразовав их к такому виду, чтобы обе части уравнения являлись полными производными.

а) $yy''' + 3y'y'' = 0$

б) $yy'' + (y')^2 = 1$

в) $xy'' = 2yy' - y'$

3) Решить уравнения, понизив их порядок, пользуясь их однородностью.

а) $xyy'' - x(y')^2 = yy'$

б) $x^2yy'' + (y')^2 = 0$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1) Решить дифференциальные уравнения.

а) $x^2 y'' = (y')^2$

б) $y''' = (y'')^2$

в) $yy'' + y = (y')^2$

2) Решить уравнения, преобразовав их к такому виду, чтобы обе части уравнения являлись полными производными.

а) $yy'' = y'(y'+1)$

б) $y' \cdot y''' = 2(y'')^2$

3) Решить уравнения, понизив их порядок, пользуясь их однородностью.

а) $xyy'' + x(y')^2 = 2yy'$

Занятие №7.

Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка. Фундаментальная система решений. Структура общего решения. Метод вариации произвольных постоянных

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Каков общий вид линейного дифференциального уравнения 2-го порядка?
2. Сформулируйте задачу Коши для линейных уравнений 2-го порядка.
3. Могут ли у линейных уравнений быть особые решения? Почему?
4. На каком множестве определены решения однородного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка?
5. Что называется фундаментальной системой решений линейного однородного уравнения 2-го порядка?
6. Что называется определителем Вронского системы функций?
7. Какая система функций называется линейно независимой (зависимой) на промежутке (a, b) ?
8. Какова структура общего решения однородного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка?
9. Какова структура общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения?
10. В чём состоит метод вариации произвольных постоянных интегрирования неоднородного линейного дифференциального уравнения?
11. Дайте определение аналитической (голоморфной) функции в точке.
12. Как можно сформулировать теорему Коши для линейных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами?
13. В чём суть метода интегрирования линейных дифференциальных уравнений при помощи степенных рядов?

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1) Исходя из определения, докажите, что следующая система функций линейно независима на $(-\infty; +\infty)$: $y_1 = e^{2x} \sin 3x$; $y_2 = e^{2x} \cos 3x$.

2) Исследуйте, являются ли данные три функции линейно зависимыми или нет:
 $y_1 = x$; $y_2 = 2x$; $y_3 = x^2$.

3) Покажите, что функции $y_1 = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ и $y_2 = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ линейно

независимы, а соответствующий определитель Вронского тождественно равен нулю.

4) Составьте линейное дифференциальное уравнение по заданной фундаментальной системе решений: e^x, xe^x .

5) Покажите, что система функций e^{2x}, e^{-3x} является фундаментальной для уравнения $y'' + y' - 6y = 0$, и запишите соответствующее общее решение этого уравнения.

6) Методом степенных рядов решите задачу Коши:

$$y'' + \frac{1}{1-x}y = x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1) Найдите определитель Вронского для системы функций: $\frac{1}{x}, e^{\frac{1}{x}}$.

2) Покажите, что функции

$$y_1 = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases} \quad y_2 = \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

линейно независимы, а соответствующий определитель Вронского тождественно равен нулю. Постройте графики этих функций.

3) Составьте однородное линейное дифференциальное уравнение, если задана его фундаментальная система решений: $y_1 = e^{-x}, y_2 = e^x$.

4) Методом степенных рядов найдите общее решение уравнения $y'' + xy = 0$.

Занятие №8.

Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Каков общий вид линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами?
2. В какой области выполняются условия теоремы Коши (о существовании и единственности решения) для однородных линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами?
3. На каком множестве определены решения однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами?
4. Как выглядит характеристическое уравнение для дифференциального уравнения $y'' + py' + qu = 0$, где p, q – фиксированные числа?
5. Каков вид общего решения дифференциального уравнения $y'' + py' + qu = 0$ с постоянными коэффициентами, если дискриминант $D = p^2 - 4q$ характеристического уравнения:

- 1) положительное число;
- 2) равен нулю;
- 3) отрицательное число?
6. В чем состоит идея *метода неопределенных коэффициентов* при решении неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами?
7. В каких случаях неоднородные линейные дифференциальные уравнения удобнее решать *методом неопределенных коэффициентов*, чем *методом вариации произвольных постоянных*?
8. В каком виде можно искать частное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами вида:
 - а) $y'' + py' + qy = e^{ax} P_m(x)$; (*)
 - б) $y'' + py' + qy = e^{ax} [P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x]$? (**)
9. Какова структура общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами вида (*) (вида (**)) ?
10. Каково дифференциальное уравнение свободных (вынужденных) колебаний груза в среде без сопротивления?

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1) Составьте линейное однородное дифференциальное уравнение, зная его характеристическое уравнение: $k^2 + 3k + 2 = 0$.

2) Зная корни характеристического уравнения $k_1 = 3 - 2i$, $k_2 = 3 + 2i$, найдите общее решение однородного уравнения.

3) Найдите частное решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$ при условии, что $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$.

4) Найдите частное решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(\pi) = \pi e^\pi$, $y'(\pi) = e^\pi$.

5) Определите вид частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения, если известны корни его характеристического уравнения $k_1 = -2$, $k_2 = 2$ и правая часть $f(x) = 5xe^{2x}$.

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1) Составьте линейное однородное дифференциальное уравнение, зная его характеристическое уравнение: $3k^2 - k - 2 = 0$.

2) Решите дифференциальное уравнение $y'' + y' - 2y = 0$.

3) Найдите частное решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 7$, $y'(0) = 8$.

4) Составьте общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения вида $5y'' - 6y' + 5y = f(x)$, для чего предварительно найдите его частное

решение либо подбором, либо методом вариации произвольных постоянных, если

$$f(x) = e^{\frac{3}{5}x} \cos x.$$

5) Определите вид частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения, если известны корни его характеристического уравнения $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$ и правая часть $f(x) = A \sin 2x + B \cos 2x$, где $A = \text{const}$, $B = \text{const}$.

Занятие №9

Контрольная работа

Вариант 1.

1. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $xy' + y = y^2$, проходящую через точку $M(1;0,5)$.
2. Решить дифференциальное уравнение $y' + 2y = y^2 e^x$.
3. Решить дифференциальное уравнение $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$.
4. Решить дифференциальное уравнение $\frac{3x^2 + y^2}{y^2} dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3} dy = 0$.
5. Решить дифференциальное уравнение $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$.
6. Решить дифференциальное уравнение $xy' - y = \ln y'$.

Вариант 2.

1. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $xy' - \frac{y}{x+1} = x$, проходящую через точку $M(1;1)$.
2. Решить дифференциальное уравнение $(1+x^2)y' - 2xy = (1+x^2)^2$.
3. Решить дифференциальное уравнение $xy' = y \ln \frac{y}{x}$.
4. Решить дифференциальное уравнение $\frac{xdy}{x^2 + y^2} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1 \right) dx$.
5. Решить дифференциальное уравнение $yy'' - (y')^2 = y^2 y'$.
6. Решить дифференциальное уравнение $y = xy' + (y')^2$.

Занятие №10

Понятие нормальной системы дифференциальных уравнений. Основные приемы решения.

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Дайте определение системы дифференциальных уравнений.
2. Какая система дифференциальных уравнений называется нормальной?
3. Каким образом обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка сводится к нормальной системе дифференциальных уравнений?
4. Что называется решением системы дифференциальных уравнений?
5. Как ставится задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений?

6. Сколько решений может иметь задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений?
7. Сформулируйте теорему Коши-Пикара для нормальной системы дифференциальных уравнений.
8. Расскажите о решении системы дифференциальных уравнений методом исключения.
9. Расскажите о решении системы дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций.

II. Задания для аудиторной работы студентов.

Решить систему дифференциальных уравнений.

$$\text{a) } \begin{cases} y' = \frac{x}{z} \\ z' = -\frac{x}{y} \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y' = y^2 z \\ z' = \frac{z}{x} - yz^2 \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 2zy' = y^2 - z^2 + 1 \\ z' = z + y \end{cases}$$

$$\text{г) } \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z} \quad \text{д) } \frac{dx}{y-x} = \frac{dy}{x+y+z} = \frac{dz}{x-y}$$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

Решить систему дифференциальных уравнений.

$$\text{a) } \begin{cases} y' = \frac{y^2}{z-x} \\ z' = y+1 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y' = \frac{z}{x} \\ z' = \frac{z(y+2z-1)}{x(y-1)} \end{cases} \quad \text{в) } \frac{dx}{2y-z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

$$\text{г) } \frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y} \quad \text{д) } \frac{dx}{x(y+z)} = \frac{dy}{z(z-y)} = \frac{dz}{y(y-z)}$$

Занятие №11

Однородные системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Дайте определение системы линейных дифференциальных уравнений.
2. Какую линейную систему называют однородной (неоднородной)?
3. Что называют матрицей системы линейных уравнений?
4. Запишите систему линейных дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме.
5. Дайте определение фундаментальной системы решений для системы линейных дифференциальных уравнений.
6. Какова структура общего решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений?
7. Сформулируйте определение Вронскиана системы линейных дифференциальных уравнений.
8. Как составляется характеристическое уравнение для однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами?
9. Расскажите о методе Эйлера решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

II. Задания для аудиторной работы студентов.

Решить систему линейных дифференциальных уравнений.

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} + x + 5y = 0 \\ \frac{dy}{dt} - x - y = 0 \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + z - y \\ \frac{dy}{dt} = x + y - z \\ \frac{dz}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 2z \end{cases} \quad \text{д) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2z - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2z \\ \frac{dz}{dt} = y - 2x - z \end{cases}$$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

Решить систему линейных дифференциальных уравнений.

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = y - 4x \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} - 5x - 3y = 0 \\ \frac{dy}{dt} + y + 3x = 0 \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + y + z \\ \frac{dz}{dt} = 4x - y + 4z \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y - z \\ \frac{dz}{dt} = 2y + 3z - x \end{cases}$$

Занятие №12

Неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Какова структура общего решения неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений?
2. Какие способы поиска частного решения системы вы знаете?
3. Расскажите подробно о методе вариации произвольных постоянных применительно к системам линейных уравнений.
4. Расскажите о методе подбора частного решения в линейной системе по виду неоднородности.

5. Каковы особенности метода подбора частного решения для системы линейных уравнений по сравнению с одним уравнением?

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1. Решить систему линейных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + tg^2t - 1 \\ \frac{dy}{dt} = -x + tgt \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + \frac{1}{\cos t} \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

2. Решить систему линейных дифференциальных уравнений, применяя метод подбора частного решения.

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 5\cos t \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + y - e^{2t} \\ \frac{dy}{dt} = y - 2x \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^t \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^{4t} \end{cases}$$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1. Решить систему линейных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - x \\ \frac{dy}{dt} = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t} + 1} \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y + 15e^t \sqrt{t} \end{cases}$$

2. Решить систему линейных дифференциальных уравнений, применяя метод подбора частного решения.

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 2e^t \\ \frac{dy}{dt} = x + t^2 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = y - 2x + 18t \end{cases}$$

Занятие №13

Матричный метод интегрирования систем дифференциальных уравнений

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Запишите систему линейных дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме.

2. Что называют показательной функцией e^A матрицы A ?
3. Каковы основные свойства матрицы e^A ?
4. Как находится матрица A^n ?
5. Как находится производная матрицы A^n ?
6. Каким образом производится матричное интегрирование однородной системы линейных дифференциальных уравнений?
7. Как матричным методом найти частное решение неоднородной линейной системы дифференциальных уравнений?

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1. Найти показательную функцию e^A данной матрицы A .

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Решить систему уравнений, записанную в векторно-матричной форме $\dot{X} = AX$, где X – вектор A – заданная матрица.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \dot{X} = AX, A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} & \text{б) } \dot{X} = AX, A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \\ \text{в) } \dot{X} = AX, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} & \text{г) } \dot{X} = AX, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1. Найти показательную функцию e^A данной матрицы A .

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Решить систему уравнений, записанную в векторно-матричной форме $\dot{X} = AX$, где X – вектор A – заданная матрица.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \dot{X} = AX, A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} & \text{б) } \dot{X} = AX, A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \\ \text{в) } \dot{X} = AX, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \end{array}$$

Занятие №14

Понятие устойчивости решения системы дифференциальных уравнений. Фазовый портрет системы двух линейных уравнений

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Дайте определение фазового пространства системы.
2. Как связан график движения заданного системой с траекторией движения?
3. Сформулируйте определение устойчивости решения системы по Ляпунову.
4. При каких условиях решение системы называется асимптотически устойчивым?
5. Каким образом исследование устойчивости произвольного решения системы сводится к исследованию устойчивости нулевого решения системы?
6. Каким образом исследуется на устойчивость нулевое решение однородной системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами?
7. Дайте классификацию нулевой точки покоя линейной системы двух однородных уравнений с постоянными коэффициентами. Изобразите соответствующие фазовые портреты.

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1. Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову, выясните устойчивость решения данных уравнений с указанными начальными условиями.

а) $3(t-1)x' = x \quad x(2) = 0$

б) $x' = t - x \quad x(0) = 1$

2. Начертить на плоскости xu траектории данных систем вблизи точки $(0,0)$ и по чертежу выяснить, устойчиво ли нулевое решение.

а) $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -2y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$

в) $\begin{cases} x' = y \\ y' = -\sin x \end{cases}$ г) $\begin{cases} x' = -y \cos x \\ y' = \sin x \end{cases}$

3. Классифицировать нулевое решение системы.

а) $\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 2x + y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x \end{cases}$

в) $\begin{cases} x' = -2x - 5y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$ г) $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2x - y \end{cases}$

д) $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 4x - y \end{cases}$ е) $\begin{cases} x' = y \\ y' = y - 2x \end{cases}$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1. Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову, выясните устойчивость решения данных уравнений с указанными начальными условиями.

а) $x' = 4x - t^2 x \quad x(0) = 0$

б) $2tx' = x - x^3 \quad x(1) = 0$

2. Начертить на плоскости xu траектории данных систем вблизи точки $(0,0)$ и по чертежу выяснить, устойчиво ли нулевое решение.

а) $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = -y \\ y' = 2x^3 \end{cases}$

3. Классифицировать нулевое решение системы.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = 2x + y \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x' = 2y - 3x \\ y' = x - 4y \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -x - y \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \end{cases} \end{array}$$

Занятие №15

Исследование на устойчивость по первому приближению.

Метод функции Ляпунова

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Какую систему называют системой первого приближения для данной нормальной системы дифференциальных уравнений?
2. Сформулируйте теорему Ляпунова об исследовании на устойчивость по первому приближению.
3. Что называют производной от функции $V(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ в силу нормальной системы дифференциальных уравнений?
4. Дайте определение функции Ляпунова.
5. Сформулируйте теорему Ляпунова об устойчивости нулевого решения методом функции Ляпунова.
6. В каком виде часто удобно искать функцию Ляпунова?
7. Сформулируйте теорему о неустойчивости.

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1. С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение следующих систем:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x' = 2xy - x + y \\ y' = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x' = e^{x+2y} - \cos 3x \\ y' = \sqrt{4+8x} - 2e^y \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} x' = \ln(3e^y - 2\cos x) \\ y' = 2e^x - \sqrt[3]{8+12y} \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} x' = \operatorname{tg}(z-y) - 2x \\ y' = \sqrt{9+12x} - 3e^y \\ z' = -3y \end{cases} \end{array}$$

2. Исследовать при каких значениях параметров a и b асимптотически устойчиво нулевое решение систем:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x' = ax - 2y + x^2 \\ y' = x + y + xy \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x' = x + ay + y^2 \\ y' = bx - 3y - x^2 \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} x' = 2e^{-x} - \sqrt{4+ay} \\ y' = \ln(1+9x+ay) \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} x' = \ln(e+ax) - e^y \\ y' = bx + \operatorname{tgy} \end{cases} \end{array}$$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения системы, построив функцию Ляпунова и применив теоремы об устойчивости или неустойчивости.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} x' = x^3 - y \\ y' = x + y^3 \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} x' = 2y^3 - x^5 \\ y' = -x - y^3 + y^5 \end{cases} \end{array}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x' = y - 3x - x^3 \\ y' = 6x - 2y \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x' = -x - xy \\ y' = y^3 - x^3 \end{cases}$$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1. С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение следующих систем:

$$\text{а) } \begin{cases} x' = x^2 + y^2 - 2x \\ y' = 3x^2 - x + 3y \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x' = \ln(4y + e^{-3x}) \\ y' = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x} \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x' = \operatorname{tg}(y - x) \\ y' = 2^y - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x' = e^x - e^{-3z} \\ y' = 4z - 3\sin(x + y) \\ z' = \ln(1 + z - 3x) \end{cases}$$

2. Исследовать при каких значениях параметров a и b асимптотически устойчиво нулевое решение систем:

$$\text{а) } \begin{cases} x' = ax + y + x^2 \\ y' = x + ay + y^2 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x' = y + \sin x \\ y' = ax + by \end{cases}$$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения системы, построив функцию Ляпунова и применив теоремы об устойчивости или неустойчивости.

$$\text{а) } \begin{cases} x' = y - x + xy \\ y' = x - y - x^2 - y^3 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x' = xy - x^3 + y^3 \\ y' = x^2 - y^3 \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x' = 2y - x - y^3 \\ y' = x - 2y \end{cases}$$

Занятие 16. Исследование особых точек

Задача 973.

Исследовать особые точки. Дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y) .

$$\begin{aligned} x' &= x + 3y, \\ y' &= -6x - 5y. \end{aligned}$$

Задача 975.

Исследовать особые точки. Дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y) .

$$\begin{aligned} x' &= -2x - 5y, \\ y' &= 2x + 2y. \end{aligned}$$

Задача 976.

Исследовать особые точки. Дать чертеж расположения интегральных кривых на плоскости (x, y) .

$$\begin{aligned} x' &= 3x + y, \\ y' &= y - x. \end{aligned}$$

Задача 980.

Найти и исследовать особые точки.

$$y' = (2x + y)/(x - 2y - 5).$$

Задача 982.

Найти и исследовать особые точки.

$$y' = 2y/(x^2 - y^2 - 1).$$

Задачи для самостоятельной работы: 962, 964, 965, 979, 981.

Занятие 17.

Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений (повторение)

Задания для аудиторной работы

1)

Найти частное решение ДУ

$$xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}, y(1) = 0$$

2)

Решить дифференциальное уравнение $y' = \frac{x + 2y - 3}{4x - y - 3}$

3)

Найти частное решение дифференциального уравнения

$$2y' - 3y \cos x = -e^{-2x} \cdot (2 + 3 \cos x) \cdot y^{-1}, y(0) = 1$$

4)

Решить дифференциальное уравнение

$$(1 + \sin x)y''' = \cos x \cdot y''$$

5)

Найти решение задачи Коши.

$$y^3 y'' = 4(y^4 - 1), y(0) = \sqrt{2}, y'(0) = \sqrt{2}$$

6)

Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$\left(\frac{\sin 2x}{y} + x \right) dx + \left(y - \frac{\sin^2 x}{y^2} \right) dy = 0$$

7)

Найти общее решение неоднородного уравнения

$$y'' - 4y' + 8y = e^x (2 \sin x - \cos x)$$

8)

Найти частное решение системы линейных ДУ, соответствующее заданным начальным условиям

$$\begin{cases} x' = 2x - 5y + 3 \\ y' = 5x - 6y + 1 \end{cases} \quad x(0) = 6, y(0) = 5$$

Задания для самостоятельной работы

1)

Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

$$\frac{2x(1-e^y)dx}{(1+x^2)^2} + \frac{e^y dy}{1+x^2} = 0$$

2)

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + \frac{y'}{x+1} = 9(x+1)$$

3)

Найти общее решение дифференциального уравнения второго порядка

$$y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$$

4)

Найти частное решение дифференциального уравнения, соответствующее заданным начальным условиям

$$y'' - 6y' + 8y = \frac{4e^{2x}}{1+e^{-2x}}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

5)

Найти частное решение неоднородного уравнения, соответствующее заданным начальным условиям.

$$y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 4$$

6)

Найти частное решение линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений, соответствующее заданным начальным условиям

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = x - y - 2 \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = -2$$

Образец контрольной работы представлен в соответствующем разделе рабочей программы.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Текущая аттестация осуществляется на каждом практическом занятии в процессе фронтального опроса, выполнения заданий для аудиторной работы, в процессе проверки домашней самостоятельной работы.

С целью дифференциации уровня подготовки бакалавров и для ликвидации имеющихся при изучении дисциплины задолженностей студентам предлагаются индивидуальные дидактические задания и домашние лабораторные работы, которые выполняются в процессе внеаудиторной работы и сдаются на проверку преподавателю.

Проведение текущего контроля осуществляется также посредством проведения аудиторной контрольной работы и разноуровневых самостоятельных работ.

Оценочные средства

I. Контрольные вопросы для проверки теоретической подготовки к практическому занятию.

Перечень вопросов приводится в планах практических занятий.

II. Задания для самостоятельной работы.

Перечень практических заданий для самостоятельной работы приводится в планах практических занятий.

III. Контрольная работа по дисциплине.

Проведение текущего контроля осуществляется также посредством проведения аудиторной письменной контрольной работы (1 раз в течение 4-го семестра).

Критерии оценивания качества теоретической подготовки к практическому занятию и выполнения заданий

Оценка	Показатели и критерии оценки
«отлично»	обучающийся отвечает на все вопросы преподавателя, самостоятельно выделяет необходимые для анализа параметры задачи, свободно использует теоретический материал при анализе задачи, строго придерживается логики анализа и решения задачи, использует научную лексику, может сформулировать суть возникшего при решении задачи затруднения
«хорошо»	обучающийся самостоятельно выделяет необходимые для анализа параметры задачи, привлекает необходимый теоретический материал, использует его (иногда при подсказке преподавателя) при анализе задачи, в целом соблюдает логику анализа и решения задачи, старается использовать профессиональную терминологию; не всегда осознает и может сформулировать суть возникшего при решении задачи затруднения
«удовлетворительно»	обучающийся отвечает не на все вопросы преподавателя, выделяет необходимые для анализа параметры задачи (иногда с подсказкой преподавателя), привлекает необходимый теоретический материал, но затрудняется в его использовании при анализе задачи, частично прибегает к ненаучной лексике, испытывает затруднения при формулировке решения
«неудовлетворительно»	обучающийся не выделяет необходимых для анализа параметров задачи, не реагирует на подсказки преподавателя, испытывает серьезные затруднения в привлечении теоретических знаний, необходимых для анализа условия задачи

4 семестр

Образец контрольной работы

1. Является ли функция $y = x^2 + 2$ решением дифференциального уравнения $2yy' = x(y'^2 + 4)$?
2. Решите дифференциальное уравнение $y' = xy^2 + 2xy$.
3. Найдите интегральную кривую уравнения $(x - y)dx + (2y - x)dy = 0$, проходящую через точку $O(0;0)$.
4. Найдите общее и особые решения уравнения $y^2(y' - 1) = (2 - y')^2$.
5. Решите уравнение $y'' + 2y' - 3y = (x - 1)e^x$.

Критерии оценивания контрольной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно реализован каждый метод решения	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	3,75-4
2	Хорошо	2,75-3,5
3	Удовлетворительно	2-2,5
4	Неудовлетворительно	менее 2

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация осуществляется посредством проведения экзамена в 4 семестре.

Вопросы для подготовки к экзамену и образцы экзаменационных заданий.

4 семестр

Вопросы к экзамену

1. Понятия дифференциального уравнения. Порядок решение обыкновенного дифференциального уравнения.
2. Задача Коши и теорема Коши-Пикара для уравнения $y' = f(x, y)$.
3. Понятие общего, частного и особого решений дифференциального уравнения.
4. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ и его решений.
5. Дифференциальное уравнение 1-го порядка в симметричной форме.
6. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Различные методы решения.
7. Уравнения Бернулли и Риккати.
8. Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.
9. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, приводящиеся к дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными.
10. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Примеры.
11. Методы интегрирования дифференциальных уравнений вида $F(x, y, y') = 0$. Различные случаи.
12. Уравнения Лагранжа и Клеро.
13. Составление дифференциального уравнения 1-го порядка по его общему интегралу.
14. Понятие устойчивости решений уравнений вида $y' = f(x, y)$. Примеры.

15. Задача Коши и теорема Коши-Пикара для дифференциальных уравнений высшего порядка.
16. Понятие общего и частного решений дифференциального уравнения высшего порядка.
17. Некоторые классы дифференциальных уравнений высшего порядка, допускающие понижение порядка. Примеры.
18. Линейное дифференциальное уравнение высшего порядка. Теорема Коши-Пикара для таких уравнений.
19. Построение общего решения для линейных однородных уравнений высшего порядка.
20. Структура общего решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений высшего порядка.
21. Уравнение Эйлера.
22. Метод вариации произвольных постоянных для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка.
23. Линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Построение общего решения.
24. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод подбора частного решения.
25. Нормальная система дифференциальных уравнений. Задача Коши и теорема о существовании и единственности решения.
26. Сведение дифференциальных уравнений n -го порядка к нормальной системе уравнений.
27. Решение нормальной системы дифференциальных уравнений методом исключения.
28. Решение нормальной системы дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций.
29. Формула Остроградского-Лиувилля.
30. Однородные системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Структура общего решения.
31. Неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Структура общего решения.
32. Матричный метод решения однородных систем линейных уравнений 1-го порядка в общем случае.
33. Матричный метод решения однородных систем линейных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами.
34. Матричный метод решения неоднородных систем линейных уравнений 1-го порядка.
35. Решение однородных систем линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами методом Эйлера в случае, когда характеристическое уравнение имеет различные действительные корни.
36. Решение однородных систем линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами методом Эйлера в случае, когда характеристическое уравнение имеет различные комплексные корни.
37. Решение однородных систем линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами методом Эйлера в случае, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни.
38. Решение неоднородных систем линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами методом вариации произвольных постоянных.
39. Решение неоднородных систем линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами методом неопределенных коэффициентов.
40. Первые интегралы нормальной системы дифференциальных уравнений.
41. Общий интеграл нормальной системы дифференциальных уравнений.
42. О числе независимых интегралов нормальной системы.
43. Понижение порядка нормальной системы при помощи первых интегралов.
44. Приведение нормальной системы к симметрической форме.

45. Интегралы, первые интегралы и общий интеграл систем дифференциальных уравнений в симметрической форме.
46. О числе независимых интегралов автономной системы дифференциальных уравнений.
47. Механическое истолкование дифференциального уравнения 1-го порядка и его решений.
48. Механическое истолкование нормальной системы дифференциальных уравнений 1-го порядка и ее решений.
49. Понятие устойчивости решения в случае одного дифференциального уравнения.
50. Понятие устойчивости решения нормальной системы дифференциальных уравнений.
51. Условия устойчивости для однородных систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
52. Фазовый портрет линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и двумя независимыми функциями.
53. Критерий устойчивости по первому приближению нелинейных систем дифференциальных уравнений.
54. Исследование устойчивости методом функций Ляпунова.

Образец экзаменационного задания

1. Теорема Коши-Пикара для нормальных систем дифференциальных уравнений.
2. Исследование устойчивости решений с помощью функций Ляпунова.
3. Решите дифференциальное уравнение $y' = xy^2 + 2xy$.
4. Выделите интегральную кривую уравнения $\frac{x}{x^2 + y^2} dy = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1 \right) dx$, проходящую через точку М (1; 1).
5. Найдите частное решение уравнения $x \cdot y'' = y'$, удовлетворяющее начальным условиям $y|_{x=1} = y'|_{x=1} = 1$.

Критерии оценивания ответа на экзамене

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Правильный ответ на вопрос	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25, 0,5 и 0,75 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Список основной литературы

1. Дифференциальные уравнения. Устойчивость и оптимальная стабилизация: учебное пособие для вузов / А. Н. Сесекин [и др.]; ответственный редактор А. Н. Сесекин. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 119 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08215-9. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/454858>
2. Боровских, А. В. Дифференциальные уравнения в 2 ч. Часть 1: учебник и практикум для вузов / А. В. Боровских, А. И. Перов. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва:

- Издательство Юрайт, 2020. — 327 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01777-9. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/451405>
3. Боровских, А. В. Дифференциальные уравнения в 2 ч. Часть 2: учебник и практикум для вузов / А. В. Боровских, А. И. Перов. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 274 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02097-7. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/452068>
4. Аксенов, А. П. Дифференциальные уравнения в 2 т: учебник и практикум для академического бакалавриата / А. П. Аксенов. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 601 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-5873-7. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/448107>
5. Королев, А. В. Дифференциальные и разностные уравнения: учебник и практикум для вузов / А. В. Королев. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 280 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-9896-2. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/451251>
6. Шипачев, В. С. Высшая математика. Полный курс в 2 т. Том 2: учебник для вузов / В. С. Шипачев; под редакцией А. Н. Тихонова. — 4-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 305 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07891-6. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/452102>
7. Агафонова С.А., Муратова Т.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Издат. центр «Академия», 2008.
9. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. — М.: УРСС, 2004.

7.2. Список дополнительной литературы

11. Задачник по курсу математического анализа / Под ред. Н.Я. Виленкина. — М.: Просвещение, 1971. — Ч. II.
12. Дьяконов В.П. Компьютерная математика. Теория и практика. — М.: Нолидж, 2001.
13. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М., Изд-во иностранной литературы, 1958.
14. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Изд. 3, переработанное и дополненное. — М.: «Высшая школа», 1978.
15. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во МГУ, 1984.
16. Понтрягин Л.С. Дифференциальные уравнения и их приложения. — М.: Наука, 1988.
17. Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. — М.: Высшая школа, 1989.
18. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. — М., 1958.
19. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Едиториал УРСС, 2003.
20. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. — М.: Едиториал УРСС, 2003.
21. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. — Минск: Наука и техника, 1970.
22. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия (в трех томах). Под редакцией А.П. Юшкевича. — М.: Наука, 1972.

Методические указания для обучающихся

1. Конашечко А.В., Расулов К.М. Дифференциальные уравнения: учебно-методическое пособие / под ред. К.М. Расулова; Смоленский гос. ун-т. — Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2014. — 56 с.
2. Расулов К.М. Обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными. — Смоленск: СмолГУ, 2010.

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

- Система дистанционного обучения Смоленского государственного университета <http://cdo.smolgu.ru>
- Электронно-библиотечная система университета <http://biblioteka.smolgu.ru>
- Национальный открытый университет <http://www.intuit.ru>
- Образовательный математический сайт <http://exponenta.ru>
- Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru>
- Википедия (<http://www.wikipedia.ru>).
- Российская Государственная Библиотека: <http://www.rsl.ru/>.
- Научная электронная библиотека: <http://elibrary.ru/>.
- Научная библиотека Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова: <http://www.lib.msu.su/index.html>.
- Научная библиотека Санкт-Петербургского государственного университета: <http://www.lib.pu.ru/>.
- Университетская информационная система «Россия»: <http://uisrussia.msu.ru>

8. Материально-техническое обеспечение

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используется интерактивная доска; проектор; электронная библиотека кафедры, содержащая электронные учебники и задачки по различным главам математического анализа; система компьютерной математики Mathematica. Осуществляется поиск информации в WWW-пространстве; работа с Web-страницами и ресурсами сети Интернет.

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине в университете имеется следующая необходимая инструментальная база: учебные аудитории для проведения практических занятий; кабинеты, оборудованные проекторами и электронными досками для проведения лекционных занятий. Имеется кабинет ксерокопирования и кафедральный принтер для подготовки индивидуальных дидактических карточек, контрольных и экзаменационных материалов. Доступна электронная библиотека кафедры математического анализа.

Учебная аудитория для проведения лекционных и практических занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, для самостоятельной работы студентов оснащена следующим оборудованием: стандартная учебная мебель (количество учебных посадочных мест соответствует количеству студентов), стол и стул для преподавателя – по 1 шт., возможно кафедра для лектора – 1 шт., доска настенная – 1 шт., напольный мобильный проекционный экран DA-LITE – 1 шт., мультимедиапроектор BenQ – 1 шт., ноутбук/компьютер – 1шт., колонки Genius – 1 шт.

9. Программное обеспечение

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине используется Информационно-вычислительный центр физико-математического факультета (Положение о Центре утверждено приказом ректора №01-66 от 28.09.2015 г.).

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используются информационные технологии обработки данных с помощью прикладных программных продуктов Microsoft Excel, Microsoft PowerPoint. Осуществляется поиск информации в WWW-пространстве; работа с Web-страницами и социальными ресурсами сети Интернет.

Программное обеспечение: Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), Лицензия 66920993 от 24.05.2016, обновление раз в три года; Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), Лицензия 66975477 от

03.06.2016, обновление раз в три года; Dr. Web Server/Desktop Security Suite (Антивирус) Лицензия EE4E-QN5S-6FG2-N76B (Ежегодное обновление); Kaspersky Endpoint Security для бизнеса – Стандартный, Лицензия 1FB6151216081242, ежегодное обновление.

Электронные библиотечные системы и электронная информационно-образовательная среда: электронная библиотечная система «ЭБС ЮРАЙТ», Договор № 3074 от 15.11.2017, ежегодное обновление; СДО Русский Moodle 3KL Norm с техническим обслуживанием, Акт на передачу прав №УТДЮ0001785 от 06.12.2016, ежегодное обновление.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 03B6A3C600B7ADA9B742A1E041DE7D81B0

Владелец: Артеменков Михаил Николаевич

Действителен: с 04.10.2021 до 07.10.2022