

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»  
Проректор по учебно-  
методической работе  
\_\_\_\_\_ Ю.А. Устименко  
«8» сентября 2021 г.

### **Рабочая программа дисциплины**

#### **Б1.О.22 Теория вероятностей и математическая статистика**

Направление подготовки **01.03.02 Прикладная математика и информатика**  
Направленность (профиль) **Математическое и информационное моделирование**

Форма обучения – очная

Курс – 3

Семестр – 5,6

Всего зачётных единиц – 7, часов – 252

Форма отчетности: экзамен – 5,6 семестры

Программу разработал: кандидат физико-математических наук Хартов А. А.

Одобрена на заседании кафедры  
«01» сентября 2021 г., протокол № 1

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ К.М. Расулов

Смоленск  
2021

## 1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» включена в обязательную часть и изучается в 5 и 6 семестрах бакалавриата 01.03.02 Прикладная математика и информатика (профиль «Математическое и информационное моделирование»). Изучение теории вероятностей и математической статистики позволяет создать условия, необходимые для формирования у студентов современного естественнонаучного мировоззрения и целостной научной картины мира, в которой органично сочетаются знания из различных областей науки. Для освоения курса необходимы компетенции, сформированные в результате предварительного обучения дисциплинам: «Математический анализ», «Функциональный анализ», «Алгебра» и др.

Изучение курса основано на традиционных методах высшей школы, тесной взаимосвязи со смежными курсами, а также на использовании современной учебной, методической литературы, информационных и образовательных технологий.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
<b>ОПК-1.</b> Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	<b>Знать:</b> основные законы естественнонаучных дисциплин, базовый аппарат математики, необходимые для осуществления профессиональной деятельности; <b>Уметь:</b> применять знания в области естественнонаучных и математических дисциплин для проведения теоретических и экспериментальных исследований в профессиональной деятельности; <b>Владеть:</b> методами математического анализа и моделирования, навыками в области естественнонаучного и общеинженерного знания, позволяющими осуществлять исследования в профессиональной деятельности.
<b>ОПК-3.</b> Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	<b>Знать:</b> базовые методы анализа, модификации и применения математических моделей, современные информационные методы в решении прикладных задач; <b>Уметь:</b> применять аппарат математического моделирования для решения прикладных задач; <b>Владеть:</b> навыками работы с инструментальными средствами математического моделирования предметной области, прикладных и информационных процессов.

## 3. Содержание дисциплины

**1. Введение.** История возникновения теории вероятностей и математической статистики. Предмет и цель теории вероятностей и математической статистики. Связь теории вероятностей и математической статистики с другими математическими науками.

**2. Случайные события.** Случайные события, их классификация. Действия над событиями. Алгебра событий. (Теоретико-множественная трактовка). Свойство статистической устойчивости относительной частоты события. Статистическое определение вероятности. Классическое определение вероятности. Элементы комбинаторики. Примеры вычисления вероятностей. Геометрическое определение вероятности. Аксиоматическое определение вероятности. Свойства вероятностей. Конечное вероятностное пространство. Условные вероятности. Вероятность произведения событий. Независимость событий. Вероятность суммы событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса (теорема гипотез). Последовательность независимых испытаний. Независимые испытания. Схема Бернулли. Формула Бернулли. Предельные теоремы в схеме Бернулли. Локальная предельная теорема. Интегральная предельная теорема. Теорема Пуассона. Иллюстрация схемы независимых испытаний. Полиномиальная схема.

**3. Случайные величины.** Понятие случайной величины. Закон распределения

случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины. Многоугольник распределения. Функция распределения и ее свойства. Функция распределения дискретной случайной величины. Плотность распределения и ее свойства. Числовые характеристики случайных величин; математическое ожидание, дисперсия, начальные и центральные моменты. Статистическое истолкование математического ожидания. Механическая интерпретация математического ожидания и дисперсии. Теоремы о математическом ожидании и дисперсии. Основные законы распределения случайных величин. Примеры законов распределения: биномиальный закон, гипергеометрический закон, нормальное распределение, равномерное распределение, гамма-распределение.

**4. Системы случайных величин.** Понятие о системе случайных величин и законе ее распределения. Функция распределения двумерной случайной величины и ее свойства. Плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины и ее свойства. Зависимость и независимость двух случайных величин. Условные законы распределения. Числовые характеристики двумерной случайной величины. Математическое ожидание и дисперсия. Корреляционный момент, коэффициент корреляции. Двумерное нормальное распределение. Условное математическое ожидание и условное распределение относительно  $\sigma$ -алгебры. Свойства условных математических ожиданий. Аналог формулы полной вероятности для условных математических ожиданий. Условная плотность распределения. Формула Байеса для плотностей. Регрессия. Теорема о нормальной корреляции. Многомерная ( $n$ -мерная) случайная величина (общие сведения).

**5. Функции случайных величин.** Функция одного случайного аргумента. Функции двух случайных аргументов. Распределение функций нормальных случайных величин.

**6. Закон больших чисел.** Массовые явления и закон больших чисел. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева. Теорема Бернулли. Необходимые и достаточные условия для закона больших чисел. Лемма Бореля-Кантелли. Закон «0 или 1» Колмогорова. Различные виды сходимости случайных величин. Усиленный закон больших чисел.

**7. Производящие функции.** Целочисленные случайные величины и их производящие функции. Примеры производящих функций распределений некоторых целочисленных случайных величин. Факториальные моменты. Многомерные производящие функции. Мультипликативное свойство. Сумма случайного числа случайных величин.

**8. Характеристические функции.** Определение и простейшие свойства характеристических функций. Вычисление характеристических функций некоторых законов распределения: биномиального, пуассоновского, геометрического, вырожденного, нормального. Формулы обращения для характеристических функций. Теорема о непрерывном соответствии между множеством характеристических функций и множеством функций распределения.

**9. Центральная предельная теорема.** Центральная предельная теорема для одинаково распределенных независимых слагаемых. Теорема Ляпунова. Применение центральной предельной теоремы.

**10. Многомерные характеристические функции.** Определение и простейшие свойства. Формула обращения. Предельные теоремы для характеристических функций. Многомерное нормальное распределение и связанные с ним распределения. Сферическое нормальное распределение.  $\chi^2$ -распределение, распределение Стьюдента,  $F$ -распределение

**11. Выборки и их характеристики.** Основные понятия: выборка, статистическая модель, выборочные характеристики (статистики). Статистические решения. Представление о статистических решениях с наименьшим риском ошибки. Основные типы статистических решений: точечные оценки, интервальные оценки, выбор одной из двух статистических гипотез. Вариационный ряд выборки. Порядковые статистики и их распределения. Эмпирическая функция распределения, ее свойства как функции распределения и как случайного элемента. Сходимость эмпирической функции распределения к истинной

функции распределения. Теорема Гливленко-Кантелли. Теорема Колмогорова. Доказательства независимости статистики Колмогорова от вида непрерывной функции распределения. Критерий Колмогорова для проверки гипотезы о данном непрерывном распределении.

**12. Элементы теории оценок.** Статистические оценки. Свойства оценок параметров в параметрической статистической модели: состоятельность, несмещенность, эффективность. Теорема Колмогорова-Блекуэла-Рао об улучшении оценок с помощью достаточных статистик. Полные достаточные статистики и их использование для нахождения несмещенных оценок с минимальной дисперсией. Эффективные оценки в регулярном случае. Неравенство информации (Крамера-Рао). Информация Фишера и ее свойства. Экспоненциальное семейство распределений и эффективные оценки. Асимптотические свойства статистических оценок: состоятельность и асимптотическая нормальность. Состоятельность и асимптотическая нормальность эмпирических моментов и функций от них. Методы оценивания параметров. Метод моментов, теорема о состоятельности оценок. Метод максимального правдоподобия, теорема об асимптотической нормальности оценок. Оценки метода моментов и максимального правдоподобия для параметров нормального биномиального и других распределений. Байесовский подход к задачам статистического оценивания. Теорема о байесовской оценке при квадратичной функции риска. Понятия априорного и апостериорного риска, априорного и апостериорного распределений. Построение байесовских оценок для параметров биномиального и нормального распределений, сравнение их с оценками максимального правдоподобия. Минимаксные оценки. Нормальное распределение в  $R^n$ . Эквивалентность различных определений и основные свойства. Распределение линейных и квадратичных форм от независимых нормально распределенных случайных величин. Лемма о независимости среднего арифметического и среднего квадратического для независимых нормальных случайных величин. Распределения хи-квадрат, Стьюдента и Фишера – Снедекора как распределения статистик в выборках из нормального распределения. Квантили распределения. Интервальное оценивание параметров, доверительные интервалы. Построение точных и асимптотических доверительных интервалов. Точный и асимптотический доверительные интервалы для параметра биномиального распределения. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения. Доверительный интервал для квантилей.

**13. Проверка гипотез.** Проверка гипотез о параметрах нормального распределения. Проверка однородности двух нормальных выборок: критерий Фишера равенства дисперсий, критерий Стьюдента равенства средних значений. Однофакторная статистическая модель. Дисперсионный анализ выборок из нормального распределения. множественное сравнение средних значений нормальных выборок. Статистические задачи для схемы Бернулли. Свойства частоты как оценки параметра схемы Бернулли. Критерии проверки гипотез о значении параметра схемы Бернулли. Непараметрический критерий знаков для одной и двух выборок. Критерий «хи-квадрат» для гипотезы о полиномиальном распределении. Теорема об асимптотическом хи-квадрат распределении статистики Пирсона. Критерий «хи-квадрат» для проверки гипотезы о произвольном распределении. Линейная регрессия. Метод наименьших квадратов для оценки коэффициентов линейной регрессии. Доверительный эллипсоид и проверка гипотез о коэффициентах регрессии в нормальной статистической модели. Проверка статистических гипотез. Общие понятия: простые и сложные гипотезы, статистический критерий, критическая область, вероятность ошибок I и II рода, размер и мощность критерия, функция мощности критерия. Теорема Неймана-Пирсона: критерий отношения правдоподобия как наиболее мощный критерий для проверки двух простых гипотез. Понятие равномерно наиболее мощного критерия. Равномерно наиболее мощный критерий для семейства распределений с монотонным отношением правдоподобия.

#### 4. Тематический план

5 семестр

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий		
			Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа
1.	Введение	5	2	2	1
2.	Случайные события	10	4	4	2
3.	Случайные величины	10	4	4	2
4.	Системы случайных величин	10	4	4	2
5.	Функции случайных величин	9	4	4	1
6.	Закон больших чисел	9	4	4	1
7.	Производящие функции	9	4	4	1
8.	Характеристические функции	5	2	2	1
9.	Центральная предельная теорема	5	2	2	1
10.	Многомерные характеристические функции	9	4	4	1
11.	Экзамен	27			27
Всего за семестр		108	34	34	13+27

6 семестр

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий		
			Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа
11.	Выборки и их характеристики	27	6	6	15
12.	Элементы теории оценок	52	16	16	20
13.	Проверка гипотез	38	10	10	18
14.	Экзамен	27			27
Всего за семестр		144	32	32	53+27

#### 5. Виды образовательной деятельности

Занятия лекционного типа

5 семестр

**1. Введение.** История возникновения теории вероятностей и математической статистики. Предмет и цель теории вероятностей и математической статистики. Связь теории вероятностей и математической статистики с другими математическими науками. Случайные события, их классификация. Действия над событиями. Алгебра событий. (Теоретико-множественная трактовка). Свойство статистической устойчивости относительной частоты события.

**2. Определение вероятности.** Статистическое определение вероятности. Классическое определение вероятности. Элементы комбинаторики. Примеры вычисления вероятностей. Геометрическое определение вероятности. Аксиоматическое определение вероятности. Свойства вероятностей. Конечное вероятностное пространство.

**3. Основные теоремы теории вероятностей.** Условные вероятности. Вероятность произведения событий. Независимость событий. Вероятность суммы событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса (теорема гипотез.)

**4. Последовательность независимых испытаний.** Независимые испытания. Схема Бернулли. Формула Бернулли. Предельные теоремы в схеме Бернулли: локальная предельная

теорема, интегральная предельная теорема, теорема Пуассона. Иллюстрация схемы независимых испытаний.

**5. Случайные величины.** Понятие случайной величины. Закон распределения случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины. Многоугольник распределения. Функция распределения и ее свойства. Функция распределения дискретной случайной величины. Плотность распределения и ее свойства.

**6. Числовые характеристики случайных величин.** Математическое ожидание, дисперсия, начальные и центральные моменты. Статистическое истолкование математического ожидания. Механическая интерпретация математического ожидания и дисперсии. Теоремы о математическом ожидании и дисперсии.

**7. Основные законы распределения случайных величин.** Биномиальный закон. Гипергеометрический закон. Нормальное распределение. Равномерное распределение. Гамма–распределение.

**8. Системы случайных величин.** Понятие о системе случайных величин и законе ее распределения. Функция распределения двумерной случайной величины и ее свойства. Плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины и ее свойства. Зависимость и независимость двух случайных величин. Условные законы распределения.

**9. Числовые характеристики двумерной случайной величины.** Математическое ожидание и дисперсия. Корреляционный момент, коэффициент корреляции. Двумерное нормальное распределение. Условное математическое ожидание и условное распределение относительно  $\sigma$ -алгебры. Свойства условных математических ожиданий. Аналог формулы полной вероятности для условных математических ожиданий. Условная плотность распределения. Формула Байеса для плотностей.

**10. Функции случайных величин.** Функция одного случайного аргумента. Функции двух случайных аргументов. Распределение функций нормальных случайных величин.

**11. Закон больших чисел.** Массовые явления и закон больших чисел. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева. Теорема Бернулли. Различные виды сходимости случайных величин. Усиленный закон больших чисел.

**12. Производящие функции.** Целочисленные случайные величины и их производящие функции. Примеры производящих функций распределений некоторых целочисленных случайных величин. Факториальные моменты. Многомерные производящие функции. Мультипликативное свойство. Сумма случайного числа случайных величин.

### **13. Характеристические функции.**

Определение и простейшие свойства характеристических функций. Вычисление характеристических функций некоторых законов распределения: биномиального, пуассоновского, геометрического, вырожденного, нормального.

**14. Характеристические функции.** Формулы обращения для характеристических функций. Теорема о непрерывном соответствии между множеством характеристических функций и множеством функций распределения.

**15. Центральная предельная теорема.** Центральная предельная теорема для одинаково распределенных независимых слагаемых. Теорема Ляпунова. Применение центральной предельной теоремы.

**16. Многомерные характеристические функции.** Определение и простейшие свойства. Формула обращения. Предельные теоремы для характеристических функций.

**17. Многомерное нормальное распределение и связанные с ним распределения.** Сферическое нормальное распределение.  $\chi^2$  – распределение. Распределение Стьюдента.  $F$ –распределение.

## 6 семестр

**1. Выборки и их характеристики.** Основные понятия: выборка, статистическая модель, выборочные характеристики (статистики). Статистические решения. Представление о статистических решениях с наименьшим риском ошибки. Основные типы статистических решений: точечные оценки, интервальные оценки, выбор одной из двух статистических гипотез.

**2. Вариационный ряд выборки.** Порядковые статистики и их распределения. Эмпирическая функция распределения, ее свойства как функции распределения и как случайного элемента. Сходимость эмпирической функции распределения к истинной функции распределения. Теорема Гливленко-Кантелли.

**3. Теорема Колмогорова.** Доказательства независимости статистики Колмогорова от вида непрерывной функции распределения. Критерий Колмогорова для проверки гипотезы о данном непрерывном распределении.

**4. Статистические оценки.** Свойства оценок параметров в параметрической статистической модели: состоятельность, несмещенность, эффективность. Теорема Колмогорова-Блекуэла-Рао об улучшении оценок с помощью достаточных статистик. Полные достаточные статистики и их использование для нахождения несмещенных оценок с минимальной дисперсией.

**5. Эффективные оценки.** Эффективные оценки в регулярном случае. Неравенство информации (Крамера-Рао). Информация Фишера и ее свойства. Экспоненциальное семейство распределений и эффективные оценки.

**6. Асимптотические свойства статистических оценок.** Состоятельность и асимптотическая нормальность. Состоятельность и асимптотическая нормальность эмпирических моментов и функций от них.

**7. Методы оценивания параметров.** Метод моментов, теорема о состоятельности оценок. Метод максимального правдоподобия. Теорема об асимптотической нормальности оценок. Оценки метода моментов и максимального правдоподобия для параметров нормального биномиального и других распределений.

**8. Байесовский подход.** Байесовский подход к задачам статистического оценивания. Теорема о байесовской оценке при квадратичной функции риска. Понятия априорного и апостериорного риска, априорного и апостериорного распределений. Построение байесовских оценок. Построение байесовских оценок для параметров биномиального и нормального распределений. Сравнение их с оценками максимального правдоподобия. Минимаксные оценки.

**9. Нормальное распределение в  $R^n$ .** Эквивалентность различных определений и основные свойства. Распределение линейных и квадратичных форм от независимых нормально распределенных случайных величин. Лемма о независимости среднего арифметического и среднего квадратического для независимых нормальных случайных величин.

**10. Распределения статистик в выборках из нормального распределения.** Распределения хи-квадрат. Распределение Стьюдента. Распределение Фишера – Снедекора . Квантили распределения.

**11. Интервальное оценивание параметров.** Доверительные интервалы. Построение точных и асимптотических доверительных интервалов. Точный и асимптотический доверительные интервалы для параметра биномиального распределения. Доверительные интервалы для параметров нормального распределения. Доверительный интервал для квантилей.

**12. Проверка гипотез о параметрах нормального распределения.** Проверка однородности двух нормальных выборок. Критерий Фишера равенства дисперсий. Критерий Стьюдента равенства средних значений. Однофакторная статистическая модель. Дисперсионный анализ выборок из нормального распределения. Множественное сравнение средних значений нормальных выборок.

**13. Статистические задачи для схемы Бернулли.** Свойства частоты как оценки параметра схемы Бернулли. Критерии проверки гипотез о значении параметра схемы Бернулли. Непараметрический критерий знаков для одной и двух выборок.

**14. Критерий «хи-квадрат».** Критерий «хи-квадрат» для гипотезы о полиномиальном распределении. Теорема об асимптотическом хи-квадрат распределении статистики Пирсона. Критерий «хи-квадрат» для проверки гипотезы о произвольном распределении.

**15. Линейная регрессия.** Метод наименьших квадратов для оценки коэффициентов линейной регрессии. Доверительный эллипсоид и проверка гипотез о коэффициентах регрессии в нормальной статистической модели.

**16. Проверка статистических гипотез.** Общие понятия. Простые и сложные гипотезы. Статистический критерий, критическая область. Вероятность ошибок I и II рода. Размер и мощность критерия, функция мощности критерия. Теорема Неймана-Пирсона. Критерий отношения правдоподобия как наиболее мощный критерий для проверки двух простых гипотез. Понятие равномерно наиболее мощного критерия. Равномерно наиболее мощный критерий для семейства распределений с монотонным отношением правдоподобия.

## **Занятия семинарского типа – практические занятия**

### 5 семестр

#### **Практическое занятие № 1. События**

##### Теоретические вопросы:

1. Случайные события, их классификация.

2. Действия над событиями.

3. Алгебра событий. (Теоретико-множественная трактовка).

*Задания для аудиторной и самостоятельной работы:* модуль 1 из [1] дополнительной литературы.

#### **Практическое занятие № 2. Вероятностное пространство**

##### Теоретические вопросы:

1. Свойства вероятности.

2. Конечное вероятностное пространство.

3. Классическое определение вероятности.

4. Ограниченность классического определения вероятности.

*Задания для аудиторной и самостоятельной работы:* модуль 1 из [1] дополнительной литературы.

#### **Практическое занятие № 3. Основные теоремы теории вероятностей.**

##### Теоретические вопросы:

1. Условные вероятности. Вероятность произведения событий. Независимость событий.

2. Вероятность суммы событий.

3. Формула полной вероятности.

4. Формула Байеса (теорема гипотез).

*Задания для аудиторной и самостоятельной работы:* модуль 2-3 из [1] дополнительной литературы.

#### **Практическое занятие № 4. Последовательность независимых испытаний.**

##### Теоретические вопросы:

1. Независимые испытания. Схема Бернулли.

2. Формула Бернулли.

3. Предельные теоремы в схеме Бернулли: локальная предельная теорема, интегральная предельная теорема, теорема Пуассона.



4. Полиномиальная схема.

*Задания для аудиторной и самостоятельной работы:* модуль 4 из [1] дополнительной литературы.

#### **Практическое занятие № 5. Случайные величины.**

##### Теоретические вопросы:

1. Понятие случайной величины.

2. Закон распределения случайной величины.

3. Закон распределения дискретной случайной величины.

4. Многоугольник распределения.

5. Функция распределения и ее свойства. Функция распределения дискретной случайной величины. Плотность распределения и ее свойства.

*Задания для аудиторной и самостоятельной работы:* модуль 5 из [1] дополнительной литературы.

#### **Практическое занятие № 6. Числовые характеристики случайных величин.**

##### Теоретические вопросы:

1. Математическое ожидание, дисперсия, начальные и центральные моменты.

2. Статистическое истолкование математического ожидания. Механическая интерпретация математического ожидания и дисперсии.

3. Теоремы о математическом ожидании и дисперсии.

*Задания для аудиторной и самостоятельной работы:* модуль 5 из [1] дополнительной литературы.

#### **Практическое занятие № 7. Основные законы распределения дискретных случайных величин.**

##### Теоретические вопросы:

1. Биномиальный закон.

2. Геометрический закон.

3. Закон Пуассона

4. Гипергеометрический закон.

*Задания для аудиторной и самостоятельной работы:* модуль 5 из [1] дополнительной литературы.

#### **Практическое занятие № 8. Основные законы распределения непрерывных случайных величин.**

##### Теоретические вопросы:

1. Показательное распределение.

2. Нормальное распределение.

3. Равномерное распределение.

4. Гамма-распределение.

*Задания для аудиторной и самостоятельной работы:* модуль 5 из [1] дополнительной литературы.

#### **Практическое занятие № 9. Системы случайных величин.**

##### Теоретические вопросы:

1. Понятие о системе случайных величин и законе ее распределения. Функция распределения двумерной случайной величины и ее свойства. Плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины и ее свойства.

2. Зависимость и независимость двух случайных величин. Условные законы распределения.

*Задания для аудиторной и самостоятельной работы:* модуль 6 из [1] дополнительной литературы.

**Практическое занятие № 10. Числовые характеристики двумерной случайной величины.**

Теоретические вопросы:

1. Математическое ожидание и дисперсия. Корреляционный момент, коэффициент корреляции.
2. Двумерное нормальное распределение.
3. Условное математическое ожидание и условное распределение относительно  $\square$ -алгебры.
4. Свойства условных математических ожиданий.
5. Аналог формулы полной вероятности для условных математических ожиданий.
6. Условная плотность распределения. Формула Байеса для плотностей.

*Задания для аудиторной и самостоятельной работы:* модуль 6 из [1] дополнительной литературы.

**Практическое занятие № 11. Функции случайных величин.**

Теоретические вопросы:

1. Функция одного случайного аргумента.
2. Функции двух случайных аргументов.
3. Распределение функций нормальных случайных величин.

*Задания для аудиторной и самостоятельной работы:* модуль 6 из [1] дополнительной литературы.

**Практическое занятие № 12. Производящие функции.**

Теоретические вопросы:

1. Целочисленные случайные величины и их производящие функции.
2. Факториальные моменты.

*Задания для аудиторной и самостоятельной работы:* модуль 6 из [1] дополнительной литературы.

**Практическое занятие № 13-14. Характеристические функции.**

Теоретические вопросы:

1. Определение и простейшие свойства характеристических функций.
2. Формулы обращения для характеристических функций.
3. Теорема о непрерывном соответствии между множеством характеристических функций и множеством функций распределения.

*Задания для аудиторной и самостоятельной работы:* модуль 6 из [1] дополнительной литературы.

**Практическое занятие № 15. Закон больших чисел.**

Теоретические вопросы:

1. Массовые явления и закон больших чисел.
2. Неравенство Чебышева.
3. Закон больших чисел в форме Чебышева.
4. Теорема Бернулли.
5. Различные виды сходимости случайных величин.
6. Усиленный закон больших чисел.

*Задания для аудиторной и самостоятельной работы:* модуль 7 из [1] дополнительной литературы.

**Практическое занятие № 16-17. Центральная предельная теорема.**

Теоретические вопросы:

1. Центральная предельная теорема для одинаково распределенных независимых слагаемых.
2. Теорема Ляпунова.
3. Применение центральной предельной теоремы.

*Задания для аудиторной и самостоятельной работы:* модуль 7 из [1] дополнительной литературы.

6 семестр

**Практическое занятие № 1,2,3. Выборки и их характеристики.**

Теоретические вопросы:

1. Основные задачи математической статистики. Статистическая структура.
2. Выборочный метод. Репрезентативность выборки.
3. Статистика. Порядковые статистики.
4. Выборочные моменты и выборочная функция распределения. Их свойства.
5. Полигон и гистограмма.

*Задания для аудиторной и самостоятельной работы:* модуль 8 из [1] дополнительной литературы.

**Практическое занятие № 4,5,6. Оценки неизвестных параметров.**

Теоретические вопросы:

1. Точечная оценка.
2. Неравенство Рао-Крамера.
3. Метод моментов.
4. Свойства оценок, полученных методом моментов.
5. Метод максимального правдоподобия.
6. Доверительные интервалы.

*Задания для аудиторной и самостоятельной работы:* модуль 9 из [1] дополнительной литературы.

**Практическое занятие № 7,8,9. Точечные оценки: метод наименьших квадратов.**

Теоретические вопросы:

1. Нормальное уравнение.
2. Теорема Гаусса–Маркова.
3. Линейная модель регрессии.
4. Нормальное распределение ошибок.

*Задания для аудиторной и самостоятельной работы:* модуль 10 из [1] дополнительной литературы.

**Практическое занятие № 10,11,12. Проверка статистических гипотез.**

Теоретические вопросы:

1. Понятие статистической гипотезы.
2. Нулевая и конкурирующая гипотезы.
3. Уровень значимости и мощность критерия.
4. Оптимальный критерий Неймана–Пирсона.
5. Критерии согласия Колмогорова.

6. Критерий хи-квадрат Пирсона.

Задания для аудиторной и самостоятельной работы: модуль 11 из [1] дополнительной литературы.

### **Практическое занятие № 13,14,15,16. Статистические критерии.**

#### Теоретические вопросы:

1. Критерий хи-квадрат Пирсона.

2. Критерии согласия Колмогорова.

3. Критерии согласия Колмогорова–Смирнова.

Задания для аудиторной и самостоятельной работы: модуль 11 из [1] дополнительной литературы.

#### **Самостоятельная работа**

Задания для самостоятельной работы приводятся в планах практических занятий.

### **6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)**

#### **6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации**

Текущая аттестация осуществляется на каждом практическом занятии в процессе фронтального опроса, выполнения заданий для аудиторной работы, в процессе проверки домашней самостоятельной работы. Проведение текущего контроля осуществляется также посредством проведения аудиторных контрольных работ и разноуровневых самостоятельных работ.

#### **Оценочные средства**

**I. Контрольные вопросы для проверки теоретической подготовки к практическому занятию.**

Перечень вопросов приводится в планах практических занятий.

#### **Критерии оценивания ответа на теоретический вопрос**

**"Отлично"** выставляется студенту, который демонстрирует при ответе всестороннее, систематическое и глубокое знание учебно-программного материала, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой. Свободно ориентируется в основной и дополнительной литературе, рекомендованной программой, а также показывает усвоение взаимосвязи основных понятий дисциплины и их значений для приобретаемой профессии, проявляет творческие способности в понимании, изложении и использовании учебно-программного материала.

**"Хорошо"** выставляется студенту, который демонстрирует при ответе хорошее знание учебно-программного материала, успешно выполнил предусмотренные задания, усвоил основную литературу, рекомендованную в программе. Показывает систематический характер знаний по дисциплине и способен к их самостоятельному пополнению и обновлению в ходе дальнейшей учебной работы и профессиональной деятельности.

**"Удовлетворительно"** выставляется студенту, обнаружившему знание основного учебного материала в объеме, необходимом для дальнейшей учёбы и предстоящей работы по профессии, справляющимся с выполнением заданий, предусмотренных программой, знакомый с основной литературой, рекомендованной программой, допустившим погрешности в ответе, но обладающим необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя.

**"Неудовлетворительно"** выставляется студенту, обнаружившему пробелы в знаниях основного учебно-программного материала, допустившему принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий, не ознакомившемуся с основной литературой, предусмотренной программой, и не овладевшему базовыми

знаниями, предусмотренными по данной дисциплине и определёнными предметными умениями.

## II. Задания для самостоятельной работы.

Перечень практических заданий для самостоятельной работы приводится в планах практических занятий.

### Критерии оценивания выполнения заданий для самостоятельной работы

Показатель	Количество баллов
1) Приведена краткая форма условия задачи	0,5
2) Выполнен рисунок к условию задачи, на котором обозначены все необходимые параметры задачи	0,5
3) Проведен анализ условия задачи, включающий указание основных явлений, о которых идет речь в задаче, а также законов, положенных в основу решения задачи	1
4) Записаны математические уравнения законов, используемых при решении задачи	1
5) Приведено решение математических уравнений и получен численный ответ на вопрос задачи	1
Итоговая (суммарная) оценка	Max - 5

## III. Контрольные работы по дисциплине.

Проведение текущего контроля осуществляется также посредством проведения аудиторных письменных контрольных работ.

### 5 семестр

#### Образец контрольной работы №1

1. Известно, что у пятизначного номера телефона все цифры разные. Какова вероятность при этом условии, что среди них ровно одна четная (ноль считаем четной)?

2. Сколько раз следует произвести трехкратное подбрасывание кубика, чтобы с вероятностью 0,95 хотя бы один раз появилось ровно 2 единицы?

3. Шесть рукописей случайным образом раскладывают по пяти папкам. Какова вероятность того, что некоторая папка останется пустой?

4. В аудитории  $m = 25$  студентов. Найти вероятность того, что хотя бы у двух студентов дни рождения совпадают. При каком числе  $m$  студентов вероятность того же события не меньше чем 0,95? (Полагаем равновозможность рождений в любой день года).

5. В первом ящике находится 10 белых и 15) черных шаров, втором – 18 белых и 16+N черных. Из первого ящика берут наудачу 2 шара и, не выясняя, какого они цвета, кладут во второй ящик. После этого из второго ящика наудачу выбирают 1 шар. Определить вероятности следующих событий:

$A$  – шар, взятый из второго ящика, окажется белым;

$B$  – из первого ящика во второй переложили 1 белый и 1 черный шар, при условии, что из второго ящика взят черный шар.

#### Образец контрольной работы №2

1. Случайная величина  $\xi$  имеет равномерное распределение на отрезке  $[-1,1]$ . Найти плотность распределения  $\eta = -\ln(2 + \xi)$ .

2. Случайная пара  $(\xi, \eta)$  имеет равномерное распределение на множестве  $\{x, y: |x| + |y| < 2\}$ . Найти плотности распределения  $\xi$  и  $\eta$ . Являются ли они зависимыми (ответ обосновать)?

3. Плотность распределения случайной величины  $\xi$  имеет

$$f(x) = \begin{cases} C(1-|x|), & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Найти  $C$ , функцию распределения  $F(x)$  и  $M\xi$ .

4. Всегда ли линейная комбинация нормально распределенных случайных величин распределена нормально?

5. Найти закон распределения, которому соответствуют следующие характеристические функции:  $\cos t$ ,  $\cos^2 t$ .

### Критерии оценивания контрольной работы

#### Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно решена каждая задача	1 балл

(\*) Возможна градация в 0,25 балла.

Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

### 6 семестр

#### Образец контрольной работы №1

1. В случае известного математического ожидания  $a$  при  $\xi \in N(a, \sigma^2)$  методом максимального правдоподобия найти оценку дисперсии и исследовать ее свойства.

2. Доказать несмещенность, состоятельность и асимптотическую нормальность выборочных начальных моментов.

3. Найти методом моментов точечную оценку параметра  $p$  геометрического распределения  $P(\xi = m) = p(1-p)^{m-1}$ , где  $m = 1, 2, 3, \dots$ ;  $p$  — вероятность появления события в одном испытании.

4. Построить асимптотический доверительный интервал для параметра  $\theta$  равномерного распределения на отрезке  $[0, \theta]$  случайной величины  $\xi$ . Точечную оценку параметра  $\theta$  найти методом моментов.

5. Производитель автомобильных шин заинтересован в получении оценки средней износоустойчивости шин особой модели. Он провел случайную выборку – 10 шин – и подверг их специальному испытанию. Средняя износоустойчивость, по данным выборки, оказалась равно 22500 миль со стандартным выборочным неисправленным отклонением  $S = 3000$  миль. Найти доверительный интервал с вероятностью 99 % для средней износоустойчивости всего выпуска шин этого типа. Генеральная совокупность распределена нормально.

#### Образец контрольной работы №2

1. Можно ли две независимые нормальные выборки  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $(y_1, y_2, \dots, y_m)$  считать одинаково распределенными, если  $\bar{x} = 2,7$ ;  $S_1^2 = 0,36$ ;  $S_2^2 = 0,64$ ;  $\bar{y} = 3,5$ ;  $n = 10$ ;  $m = 10$ ;  $S_i^2$  — несмещенные оценки дисперсии. Проверить гипотезу на уровне значимости 10 %.

2. За последние 5 лет годовой рост цен акции  $A$  составил в среднем 20% со средним квадратическим отклонением (исправленным) 10 %. Построить доверительный интервал с

вероятностью 95 % для средней цены акции в конце следующего года, если в начале года она была равна 1000 единиц.

3. Найти мощность критерия по результатам одной выборки  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$   $x \in N(a, \sigma^2)$  с известной дисперсией  $\sigma^2$ , построенного для проверки нулевой гипотезы  $H_0: a = a_0$  против альтернативной  $H_1: a = a_1 > a_0$ .

4. Чтобы проверить, оказывает ли влияние на прочность бетона особый способ его приготовления, был сделан небольшой эксперимент. Из данной партии сырья были взяты 6 выборок, причем выборки были сделаны однородными, насколько возможно. Затем 6 выборок были разделены случайным образом на две группы из трех выборок каждая, и из каждой выборки был сделан пробный куб, причем выборки из группы II подверглись особой обработке. После 28-дневной выдержки шести пробных кубов определили их сопротивление на сжатие, получив следующие результаты опыта:

Бетон I	290	311	284
Бетон II	309	318	318

Проверить с помощью критерия Стьюдента гипотезу о том, что бетон обеих групп одинаково прочен.

5. Ниже приводятся ставшие классическими данные Борткевича о числе лиц, убитых ударом копыта в 10 прусских армейских корпусах за 20 лет (1875—1894).

$i$ —число смертей в одном корпусе за год	0	1	2	3	4	
Число случаев, когда произошло $i$ смертей	109	65	22	3	1	Всего 200

Используя критерий  $\chi^2$  проверить гипотезу о том, что число смертей в одном корпусе за год подчиняется распределению Пуассона.

### Критерии оценивания контрольной работы

#### Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно решена каждая задача	1 балл

(\*) Возможна градация в 0,25 балла.

#### Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

## 6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация осуществляется посредством проведения экзамена.

### Вопросы для подготовки к экзамену и образцы экзаменационных заданий.

#### 5 семестр

#### Вопросы к экзамену

1. Вероятностный эксперимент. Случайное событие. Классификация случайных событий. Алгебра событий.

2. Частота событий и ее свойства.
3. Классическое определение вероятности события.
4. Геометрическое определение вероятности события.
5. Статистическое определение вероятности события.
6. Теорема сложения вероятностей для несовместимых событий. Следствия.
7. Понятие условной вероятности.
8. Теорема умножения вероятностей. Следствия.
9. Теорема сложения вероятностей для совместных событий.
10. Формула полной вероятности.
11. Формула Байеса.
12. Повторные испытания по схеме Бернулли.
13. Приближенные формулы для вероятностей  $P_n(m)$ ,  $P_n(m_1, m_2)$ .
14. Определение случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины.
15. Закон распределения для дискретной случайной величины.
16. Закон распределения для непрерывной случайной величины.
17. Плотность распределения вероятностей. Вероятность попадания случайной величины в заданный промежуток.
18. Числовые характеристики для дискретной случайной величины.
19. Числовые характеристики для непрерывной случайной величины.
20. Биномиальное распределение.
21. Распределение Пуассона.
22. Равномерное распределение.
23. Показательное распределение.
24. Нормальное распределение.
25. Правило 3-х сигм.
26. Система случайных величин. Закон распределения системы.
27. Таблица распределения для системы 2-х дискретных случайных величин.
28. Функция распределения  $F(x, y)$  и ее свойства.
29. Плотность распределения  $f(x, y)$  и ее свойства.
30. Числовые характеристики системы случайных величин  $(X, Y)$ .
31. Коэффициент корреляции и его свойства.
32. Закон больших чисел. Теорема Чебышева.
33. Закон больших чисел. Теорема Бернулли.
34. Понятие о центральной предельной теореме теории вероятностей.
35. Теорема Муавра- Лапласа.

Образец экзаменационного задания

1. Аксиоматическое определение вероятности. Свойства вероятностей.

2. Нормальное распределение.

3. При автоматическом изготовлении болтов допускается в среднем 3% брака. Какова вероятность того, что среди взятых для контроля 5 болтов: а) не окажется ни одного бракованного; б) окажется один бракованный?

4. Считая, что вес тела с одинаковой вероятностью может быть равен любому целому числу граммов от 1 до 10, определить, при какой из трех систем разновесов: а) 1, 2, 2, 5, 10; б) 1, 2, 3, 4, 10; в) 1, 1, 2, 5, 10 – среднее число необходимых для взвешивания гирь будет наименьшим, если при взвешивании разрешается гири ставить только на одну чашку, а подбор гирь при взвешивании осуществляется так, чтобы использовать наименьшее возможное число гирь.

5. В парламенте имеется доля  $p$  членов партии лейбористов, которые неспособны менять свое мнение ни в одном вопросе, и доля  $1-p$  членов партии консерваторов, которые случайным образом, с вероятностью  $r$ , могут менять свое мнение при последовательных



голосованиях по одному и тому же вопросу. Выбранный наудачу парламентарий дважды проголосовал, не меняя своего мнения. Найдите вероятность того, что и при следующем голосовании он будет придерживаться того же мнения.

### Критерии оценивания ответа на экзамене

Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Теоретический вопрос	1 балл
2	Реализация решения задачи	1 балл

(\*) Возможна градация в 0,25 балла.

Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

### 6 семестр

#### Вопросы к экзамену

1. Основные задачи математической статистики. Генеральная совокупность и выборка.
2. Способы отбора элементов выборки.
3. Статистический ряд.
4. Статистическая функция распределения.
5. Статистическая совокупность. Гистограмма.
6. Количественные характеристики выборки.
7. Точечные оценки неизвестных параметров. Основные требования к ним.
8. Точечные оценки для математического ожидания и дисперсия случайной величины.
9. Получение точечных оценок методом моментов.
10. Получение точечных оценок методом наибольшего правдоподобия.
11. Доверительный интервал и доверительная вероятность.
12. Построение доверительного интервала для математического ожидания.
13. Сглаживание экспериментальной зависимости. Метод наименьших квадратов.
14. Проверка статистических гипотез. Общие понятия.
15. Критерий согласия  $\chi^2$ .
16. Критерий согласия Колмогорова.
17. Критерий знаков.
18. Линейная регрессионная модель.

#### Образец экзаменационного задания

1. Статистическая совокупность. Гистограмма.
2. Критерий знаков.
3. Известно, что число независимых опытов до первого появления события имеет геометрический закон распределения:

$x_i$	1	2	3	...	k	...
$p_i$	$p$	$p$	$q^2p$	...	$q^{k-1}p$	...

где  $p$  – неизвестный параметр, который равен вероятности появления события в одном опыте,  $q = 1 - p$ . Проведено 5 серий опытов до первого появления события. Они дали следующие результаты:  $x_1=10$ ,  $x_2=4$ ,  $x_3=2$ ,  $x_4=11$ ,  $x_5=3$ . Найти оценку наибольшего правдоподобия для  $p$ . Оценить  $p$  по методу моментов.

4. Аналитик фондового рынка оценивает среднюю доходность определенных акций. Случайная выборка 15 дней показала, что средняя (годовая) доходность  $\bar{x} = 10,37\%$  с исправленным средним квадратическим отклонением  $S = 3,5\%$ . Предполагая, что доходность акций подчиняется нормальному закону распределения, постройте 95%-ный доверительный интервал для средней доходности интересующего аналитика вида акций.

5. В следующей таблице представлены данные о числе сделок, заключенных на фондовой бирже за квартал, для 517 инвесторов.

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7
$m_i$	112	168	130	68	32	5	1	1

В первой строке приведены числа сделок, во второй — числа инвесторов, заключивших столько сделок за квартал. Требуется проверить, используя критерий Пирсона, что на уровне значимости  $\alpha = 0,05$  число сделок, заключенных одним инвестором за квартал, распределено по закону Пуассона с параметром  $\lambda = 1,5$ .

### Критерии оценивания ответа на экзамене

Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Теоретический вопрос	1 балл
2	Реализация решения задачи	1 балл

(\*) Возможна градация в 0,25 балла.

Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

## 7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

### 7.1. Основная литература

1. Васильев, А. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник и практикум для вузов / А. А. Васильев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 232 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-09097-0. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/472104>.

2. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник и практикум для вузов / Н. Ш. Кремер. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 538 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10004-4. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/475438>.

### 7.2 Список дополнительной литературы

1. «Практикум по теории вероятностей и математической статистике» (Дидактический материал в электронном виде).

2. Задачи для самостоятельного решения по теории вероятностей и математической статистике (компьютерный вариант).

3. Практикум по ТВ (компьютерный вариант), 184 с.

4. Сборник задач по математической статистике (компьютерный вариант), 145 с.

5. Варианты контрольных работ (компьютерный вариант).

6. Бочаров П. П. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для студентов вузов/ П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. - 2-е изд. - М.: Физматлит, 2005. - 296 с.

7. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей: учебник для студентов математ. спец. ун-тов/ Б. В. Гнеденко; Моск. гос. ун-т им. М. В. Ломоносова. - М.: Едиториал УРСС, 2005. – 448 с.

8. Кибзун А. И. Теория вероятностей и математическая статистика: Базовый курс с примерами и задачами: учеб. пособие для студентов высш. техн. учеб. заведений/ А. И. Кибзун, Е. Р. Горяинова, А. В. Наумов – М.: Физматлит, 2005. – 232 с.

9. Теория вероятностей и математическая статистика в задачах: учеб. пособие для студентов вузов по направлению "Прикладная математика"/ В. А. Ватутин, Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведев, В. П. Чистяков. – М.: Дрофа, 2005. – 320 с.

10. Федоткин М. А. Основы прикладной теории вероятностей и статистики: учебник для студентов вузов по спец. "Приклад. математика и информатика". – М.: Высшая школа, 2006. – 368 с.

### **7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»**

1. Система дистанционного обучения Смоленского государственного университета <http://moodle.smolgu.ru>
2. Электронно-библиотечная система университета <http://biblioteka.smolgu.ru>
3. Национальный открытый университет <http://www.intuit.ru>
4. Образовательный математический сайт <http://exponenta.ru>
5. Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru>
6. Кафедральная электронная библиотека

## **8. Материально-техническое обеспечение**

**Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа**, оснащенная стандартной учебной мебелью, мультимедиапроектором, ноутбуком, колонками и интерактивной доской.

**Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации**, оснащенная стандартной учебной мебелью. Доступна электронная библиотека кафедры математического анализа.

**Помещение для самостоятельной работы** – компьютерный класс с доступом к сети «Интернет» и ЭИОС СмолГУ.

## **9. Программное обеспечение**

Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), лицензия 66975477 от 03.06.2016 (бессрочно).

Обучающимся обеспечен доступ к ЭБС «Юрайт», а также доступ в электронную информационно-образовательную среду университета.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН  
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 03B6A3C600B7ADA9B742A1E041DE7D81B0  
Владелец: Артеменков Михаил Николаевич  
Действителен: с 04.10.2021 до 07.10.2022