

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра прикладной математики и информатики

«Утверждаю»
Проректор по учебно-методической
работе
_____ Устименко Ю.А.
«23» июня 2022 г.

**Рабочая программа дисциплины
Б1.О.23 Методы оптимизации**

Направление подготовки: **01.03.02 Прикладная математика и информатика**
Направленность (профиль): **Математическое и информационное моделирование**
Форма обучения: очная
Курс – 3
Семестр – 6
Всего зачетных единиц – 3, часов – 108

Форма отчетности: зачет – 6 семестр

Программу разработал
доцент Усачев В.И.

Одобрена на заседании кафедры
16 июня 2022 г., протокол № 10

Заведующий кафедрой _____ С.В. Козлов

Смоленск
2022

1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Методы оптимизации» относится к обязательной части основной образовательной программы по направлению подготовки 01.03.02 «Прикладная математика и информатика».

Требования к входным знаниям, умениям и компетенциям студента формируются на основе изучения дисциплин «Алгебра и геометрия», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Функциональный анализ».

Дисциплина «Методы оптимизации» является предшествующей для дисциплины «Численные методы».

В настоящее время математические методы исследования проникают во все области человеческой деятельности. Это повышает интерес к математике со стороны смежных наук, использующих различный объем математических знаний. Кроме того, развитие информационных технологий и систем компьютерной математики, которые применяются для решения многих математических задач, требует алгоритмической четкости при изучении математических дисциплин.

Поэтому курс «Методы оптимизации» занимает важное место в предметной подготовке по основной образовательной программе направления подготовки «прикладная математика и информатика».

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	Знать: основные законы естественнонаучных дисциплин, базовый аппарат математики, необходимые для осуществления профессиональной деятельности; Уметь: применять знания в области естественнонаучных и математических дисциплин для проведения теоретических и экспериментальных исследований в профессиональной деятельности; Владеть: методами математического анализа и моделирования, навыками в области естественнонаучного и общеинженерного знания, позволяющими осуществлять исследования в профессиональной деятельности.
ОПК-2. Способен использовать и адаптировать существующие математические методы и системы программирования для разработки и реализации алгоритмов решения прикладных задач	Знать: основные математические принципы и методики создания алгоритмов и программ для решения прикладных задач, основные среды для разработки программного обеспечения; Уметь: использовать и адаптировать математические методы для разработки алгоритмов решения прикладных задач, внедрять и адаптировать прикладное программное обеспечение; Владеть: аппаратом математики, современными языками программирования и методиками разработки и внедрения прикладного программного обеспечения.
ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	Знать: базовые методы анализа, модификации и применения математических моделей, современные информационные методы в решении прикладных задач; Уметь: применять аппарат математического моделирования для решения прикладных задач; Владеть: навыками работы с инструментальными средствами математического моделирования предметной области, прикладных и информационных процессов.

3. Содержание дисциплины

1. Элементы выпуклого анализа. Евклидово пространство. Выпуклые множества. Проекция точки на множество. Теоремы отделимости. Выпуклые и вогнутые функции. Дифференцируемость по направлению. Непрерывность. Выпуклые дифференцируемые функции. Множества с вогнутыми ограничениями. Некоторые экстремальные свойства функций на выпуклых множествах. Сильная выпуклость функций.

2. Математическое программирование. Основы выпуклого программирования. Теория линейного программирования. Численные методы математического программирования.

3. Элементы вариационного исчисления. Функционал. Дифференцируемость функционала. Экстремумы функционалов. Простейшая задача вариационного исчисления. Экстремумы функционалов от вектор-функций. Экстремумы функционалов, содержащих производные высших порядков. Экстремумы функционалов, зависящих от функции двух переменных.

4. Оптимальное управление. Постановка задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина.

4. Тематический план

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий		
			лекции	лабораторные занятия	самостоятельная работа
1	Элементы выпуклого анализа.	31	6	10	15
2	Математическое программирование	26	4	7	15
3	Элементы вариационного исчисления.	28	4	9	15
4	Оптимальное управление.	23	2	6	15
ИТОГО		108	16	32	60

5. Виды образовательной деятельности

Занятия лекционного типа

Лекция №1. Евклидово пространство. Выпуклые множества. Проекция точки на множество.

Лекция №2. Теоремы отделимости. Выпуклые и вогнутые функции. Дифференцируемость по направлению. Непрерывность.

Лекция №3. Выпуклые дифференцируемые функции. Множества с вогнутыми ограничениями. Некоторые экстремальные свойства функций на выпуклых множествах. Сильная выпуклость функций.

Лекция №4. Основы выпуклого программирования. Теорема Куна-Таккера.

Лекция №5. Основная задача линейного программирования. Теоремы линейного программирования. Численные методы математического программирования.

Лекция №6. Функционал. Дифференцируемость функционала. Экстремумы функционалов.

Лекция №7. Простейшая задача вариационного исчисления. Экстремумы функционалов от вектор-функций. Экстремумы функционалов, содержащих производные высших порядков. Экстремумы функционалов, зависящих от функции двух переменных.

Лекция №8. Фазовые параметры и управление. Математическая постановка задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина.

Занятия семинарского типа - лабораторные занятия

Лабораторная работа №1. *Нахождение точек локального экстремума функции двух переменных.*

Цель работы: научиться находить точки локального экстремума функции двух переменных.

Задание: $F=x^4+x^4-x^2-2x^2$.

Лабораторная работа №2. *Нахождение оптимальных точек функции двух переменных.*

Цель работы: научиться находить оптимальные точки функции двух переменных.

Задание: $F=x^4+x^4-x^2-2x^2$, $x \geq 0$, $x^2+x^2 \leq 1/2$.

Лабораторная работа №3. *Нахождение точек локального экстремума функции трёх переменных.*

Цель работы: научиться находить точки локального экстремума функции трёх переменных.

Задание: $F=-x^2-x^2-x^3-x+x_2+2x_2$.

Лабораторная работа №4. *Основные определения для задачи оптимизации.*

Цель работы: на практике изучить основные определения для задачи оптимизации.

Задание: $F=x^2+x^2$, $x^2-x+3=0$. Составить обобщённую функцию Лагранжа, составить классическую функцию Лагранжа, найти градиент обобщённой функции Лагранжа, найти градиент классической функции Лагранжа, найти второй дифференциал обобщённой функции Лагранжа, найти второй дифференциал классической функции Лагранжа, найти первый дифференциал ограничения.

Лабораторная работа №5. *Условный экстремум при ограничениях типа равенств.*

Цель работы: научиться находить условный экстремум при ограничениях типа равенств.

Задание: $F=x^2+x^2$, $x_2+x_1-3=0$.

Лабораторная работа №6. *Условный экстремум при ограничениях типа равенств (часть 2).*

Задание: $F=x_1+x_2$, $x_1^2+x_2^2-2=0$.

Лабораторная работа №7. *Условный экстремум при ограничениях типа неравенств.*

Цель работы: научиться находить условный экстремум при ограничениях типа неравенств.

Задание: $F=x^2+x^2$, $x_1+x_2 < 0$.

Лабораторная работа №8. *Условный экстремум при ограничениях типа неравенств (часть 2).*

Задание: $F=x^2+(x-2)^2$, $x^2+x^2-1 < 0$, $x_1 > 9$, $x_2 > 0$.

Лабораторная работа №9. *Условный экстремум при смешанных ограничениях.*

Цель работы: научиться находить условный экстремум при смешанных ограничениях.

Задание: $F=x^2+x^2$, $x_1-1=0$, $x_1+x_2-2 < 0$.

Лабораторная работа №10. *Условный экстремум при смешанных ограничениях (часть 2).*

Задание: $F=-x_1-x_2-x_3$, $x_1^2+x_2^2+x_3^2-3/4=0$, $x_1^2+x_2^2-x_3 < 0$, $x_3-2 < 0$.

Лабораторная работа №11. Основная задача линейного программирования.

Цель работы: научиться решать основную задачу линейного программирования графическим и аналитическим методами.

Задание: $F=260x_1+300x_2$, $-1200+16x_1+12x_2<0$, $-39+0.2x_1-0.4x_2<0$, $-600+6x_1+5x_2<0$, $-300+3x_1+4x_2<0$, $x_1>0$, $x_2>0$.

Лабораторная работа №12. Основная задача линейного программирования (часть 2).

Задание: $F=-x_1+x_2$, $-x_1+x_2-2<0$, $2-x_1-2x_2<0$, $x_1-2x_2-4<0$, $x_1>0$, $x_2>0$.

Лабораторная работа №13. Симплекс-метод.

Цель работы: разобраться с симплекс-методом и научиться применять его на практике.

Задание: $F=260x_1+300x_2$, $-1200+16x_1+12x_2<0$, $-39+0.2x_1-0.4x_2<0$, $-600+6x_1+5x_2<0$, $-300+3x_1+4x_2<0$, $x_1>0$, $x_2>0$.

Лабораторная работа №14. Симплекс-метод (часть 2).

Задание: $F=-x_1+x_2$, $-x_1+x_2-2<0$, $2-x_1-2x_2<0$, $x_1-2x_2-4<0$, $x_1>0$, $x_2>0$.

Лабораторная работа №15. Метод градиентного спуска.

Цель работы: изучить метод градиентного спуска и научиться применять его на практике.

Задание: $F=2x_1^2+x_1x_2+x_2^2$.

Лабораторная работа №16. Метод покоординатного спуска.

Цель работы: изучить метод покоординатного спуска и научиться применять его на практике.

Задание: $F=3x_1^2-2x_1x_2+x_2^2$

Самостоятельная работа

Текущая самостоятельная работа студента направлена на углубление и закрепление знаний студентов и развитие практических умений. Она заключается в работе с лекционными материалами, поиске и обзоре литературы и электронных источников, информации по заданным темам курса, опережающей самостоятельной работе, в изучении тем, вынесенных на самостоятельную проработку, подготовке к лабораторным занятиям.

При изучении всех тем студентам предлагаются на самостоятельную проработку свойства и методы используемых объектов.

Методические рекомендации по решению задач по основным темам курса предлагаются на лабораторных занятиях и содержатся в учебно-методических разработках для студента.

Вопросы для самостоятельного изучения:

1. Элементы выпуклого анализа. Примеры Евклидовых пространств. Примеры выпуклых множеств. Проекция точки на множество. Примеры выпуклых и вогнутых функций. Дифференцируемость по направлению. Непрерывность. Выпуклые дифференцируемые функции. Множества с вогнутыми ограничениями.

2. Математическое программирование. Функция Лагранжа. Условия оптимальности. Задача с линейными ограничениями. Двойственность в теории линейного программирования.

3. Элементы вариационного исчисления. Задачи на экстремумы функционалов от вектор-функций, экстремумы функционалов, содержащих производные высших порядков, экстремумы функционалов, зависящих от функции двух переменных.

4. Оптимальное управление. Постановка задачи оптимального управления. Применение принципа максимума Понтрягина.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

1. Лабораторные работы

Образец лабораторной работы

Цель работы: научиться решать основную задачу линейного программирования графическим и аналитическим методами.

Задание: $F=260x_1+300x_2$, $-1200+16x_1+12x_2<0$, $-39+0.2x_1-0.4x_2<0$, $-600+6x_1+5x_2<0$, $-300+3x_1+4x_2<0$, $x_1>0$, $x_2>0$.

Критерии оценивания выполнения лабораторных работ

Нормы оценивания каждой лабораторной работы:

№п/п	Структурная часть работы	Количество баллов (*)
1	Ответ на теоретические вопросы по теме лабораторной работы	1 балл
2	Демонстрация выполнения конкретного задания, предложенного для самостоятельного решения к лабораторной работе	2 балла

(*) с возможностью градации до 0,25 балла.

Шкала оценивания. Оценка «зачтено» за лабораторную работу выставляется, если набрано не менее 2 баллов, в противном случае за работу выставляется «не зачтено».

2. Контрольная работа

Образец контрольной работы

Задача 1. Исследовать функционал $\Phi(y) \rightarrow \text{extr}$,

$$\Phi(y) = \int_1^e (xy' - 2y') dx$$

где

при условиях $y(1)=1$, $y(e)=2$.

$$\Phi(x) = \int_0^1 x^2 (x')^2 dt$$

Задача 2. Найти экстремаль функционала

при условиях $x(0)=1$, $x(1)=\sqrt{2}$.

Задача 3. Решить задачу Пуассона $\Phi(y) \rightarrow \text{extr}$,

$$\Phi(y) = \int_0^{\pi/2} (y''^2 - y^2 + x^2) dx$$

где

при условиях $y(0) = 1$; $y'(0) = 0$; $y(\pi/2) = 0$; $y'(\pi/2) = -1$.

Критерии оценивания контрольной работы

Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно реализован каждый метод решения	1 балл
2	Анализ результатов	2 балла

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Вопросы для подготовки к зачёту

1. Выпуклые множества, выпуклые функции (выпуклость и строгой выпуклость).
2. Проекция точки на множество, две леммы о свойствах проекции.
3. Градиент и производная по направлению, ее вычисление в случае дифференцируемости функции.
4. Выпуклые дифференцируемые функции.
5. Свойства градиента, множество направлений строгого локального убывания.
6. Теорема Ферма.
7. Функция Лагранжа для общей задачи математического программирования.
8. Теорема Лагранжа – условия оптимальности в дифференциальной форме для задач с равенствами.
9. Условия Каруша-Куна-Таккера в недифференциальной форме (через принцип минимума).
10. Условия Каруша-Куна-Таккера в терминах седловой точки.
11. Теорема о необходимости и о достаточности условий Каруша-Куна-Таккера в недифференциальной форме записи с использованием принципа минимума.
12. Теорема о необходимости и о достаточности условий Каруша-Куна-Таккера, записанных через седловую точку функции Лагранжа, для выпуклой регулярной задачи.
13. Теорема Каруша-Куна-Таккера в дифференциальной форме (выпуклый и невыпуклый случаи).
14. Геометрическая интерпретация условий оптимальности в дифференциальной форме.
15. Задача вариационного исчисления с закрепленными концами — постановка.
16. Задача вариационного исчисления со свободными концами — постановка.
17. Задача вариационного исчисления со скользящими концами — постановка.
18. Нормы нулевого и первого порядков.
19. Определение сильного и слабого локального экстремумов.
20. Метод вариации Лагранжа.
21. Понятие первой и второй вариации.
22. Классы пробных функций для каждой из простейших задач вариационного исчисления.
23. Определение экстремали функционала.
24. Основная лемма вариационного исчисления.
25. Вид первой вариации функционала для задач с закрепленными концами .
26. Вид первой вариации функционала для задач со свободными концами.
27. Вид первой вариации функционала для задач со скользящими концами.
28. Уравнение Эйлера и его первые интегралы.
29. Необходимые и достаточные условия экстремали в трех простейших задачах вариационного исчисления.
30. Необходимые условия экстремума в трех простейших задачах вариационного исчисления.
31. Естественные граничные условия.

32. Условия трансверсальности.
33. Постановка задачи оптимального управления.
34. Функция Беллмана в задаче оптимального управления.
35. Области управляемости и неуправляемости.
36. Необходимое условие второго порядка для минимума функционала — условие Лежандра.
37. Постановка изопериметрической задачи.
38. Теорема об условиях экстремума в изопериметрической задаче.
39. Вид уравнения Беллмана для задачи оптимального управления.
40. Функция Гамильтона, система для сопряженных переменных.
41. Теорема о принципе максимума Л.С. Понтрягина.
42. Постановка линейной задачи на оптимальное быстродействие.
43. Условие общности положения.
44. Структура оптимального управления в линейной задаче на оптимальное быстродействие.
45. Теорема о необходимых и достаточных условиях оптимальности управления в линейных задачах на оптимальное быстродействие.

Варианты заданий для подготовки к зачёту

1. Дана задача линейного программирования:

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 - x_2$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 6$$

$$2x_1 - x_2 = -3$$

$$x_{1,2} \geq 0$$

Как данная задача выглядит в каноническом виде?

2. По известному оптимальному решению $X=(2,4; 8,6)$ следующей задачи линейного программирования

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 9x_1 + 4x_2 \leq 56 \\ 3x_1 + 5x_2 \geq 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 2}$$

$$F(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \rightarrow \max$$

найти оптимальное решение двойственной задачи.

3. Найти глобальный минимум, обосновав его существование, в задаче:

$$F(x_1, x_2, x_3) = -x_1x_3 + x_2x_3 - x_3^2 + x_3 + x_2^2 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 2x_2 \leq x_1 + 1 \\ x_3 \leq 2x_2 + 1 \\ 2x_2 - x_1 \geq -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

4. Какова траектория световых лучей в атмосфере, где скорость распространения пропорциональна высоте? (Задача Лопиталя о форме световых лучей)

5. Найти экстремум функционала:

$$I[y(x), z(x)] = \int_{x_0}^{x_1} xz^2(2yz + xzy' + 3xyz')dx$$

в классе гладких кривых, проходящих через точки

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \text{ и } M_1(x_1, y_1, z_1).$$

$$\int_0^{\pi/4} (y'^2 - y^2)dx$$

6. Найти экстремали функционала

в классе кусочно-гладких кривых, удовлетворяющих условию $y(0) = 1$.

7. Решить задачу о быстрейшем приведении в начало координат объекта, движение которого описывается уравнением

$$\ddot{x} = u(t), \text{ где } u(t).$$

(Эту задачу можно интерпретировать как задачу о быстрейшем выведении судна на курс.)

Критерии получения зачета

Зачет выставляется по результатам работы студента в течение семестра.

«Зачтено» выставляется студенту если он:

- отвечает на теоретические вопросы, рассмотренные на лекциях и практических занятиях (см. Текущий контроль);
- выполняет практические задания, предложенные на лабораторных занятиях (см. Текущий контроль).
- выполнил контрольную работу на оценку не ниже «удовлетворительно».

«Не зачтено» выставляется студенту при невыполнении хотя бы одного из указанных условий.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Основная литература

1. Гончаров, В. А. Методы оптимизации : учебное пособие для бакалавриата и магистратуры / В. А. Гончаров. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 191 с. — (Серия : Бакалавр и магистр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-3642-1. — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/F7BE687C-8B54-4C87-978B-36D339FFD31C.

2. Методы оптимизации : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / Ф. П. Васильев, М. М. Потапов, Б. А. Будаков, Л. А. Артемьева ; под ред. Ф. П. Васильева. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 375 с. — (Серия : Бакалавр и магистр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-6157-7. — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/CAA9AF22-E3BB-454A-BE5C-BB243EAAE72A.

3. Сухарев, А. Г. Методы оптимизации : учебник и практикум для бакалавриата и магистратуры / А. Г. Сухарев, А. В. Тимохов, В. В. Федоров. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 367 с. — (Серия : Бакалавр и магистр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-3859-3. — Режим доступа : www.biblio-online.ru/book/FBDEF0DD-58E4-4241-BFEC-5A6E28E22FE5.

7.2. Дополнительная литература

1. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979.
2. Васильев Ф. П., Иваницкий А. Ю. Линейное программирование. – М: Факториал, 1998.
3. Васильев Ф. П. Методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1981.
4. Васильев Ф. П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1988.
5. Евтушенко Ю. Г. Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации. – М.: Наука, 1982.
6. Карманов В. Г. Математическое программирование. – М.: Наука, 1986.
7. Мухачёва Э. А., Рубинштейн Г. Ш. Математическое программирование. – Новосибирск: Наука, 1987.
8. Осипов Ю. С., Васильев Ф. П., Потапов М. М. Основы метода динамической регуляризации.- М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999.
9. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1986.

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Электронная библиотека <https://www.biblio-online.ru>
2. <http://www.intuit.ru> – Интернет-Университет Информационных Технологий
3. <http://window.edu.ru> – Каталог образовательных Internet-ресурсов.

8. Материально-техническое обеспечение

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, оснащенная стандартной учебной мебелью, интерактивной доской, мультимедиапроектором, ноутбуком и колонками.

Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации - компьютерная аудитория с выходом в Интернет.

Помещение для самостоятельной работы – компьютерный класс с доступом к сети «Интернет» и ЭИОС СмолГУ.

9. Программное обеспечение

KasperskyEndpointSecurity для бизнеса Стандартный АО «Лаборатория Касперского», лицензия 1FB6-161215-133553-1-6231.

Microsoft Open License, лицензия 49463448 в составе: Microsoft Windows Professional 7 Russian; Microsoft Office 2010 Russian.

PTCMathcad 15.0 (Лицензия 449732)

Установленный дистрибутив языка R или дистрибутив MicrosoftRopen (GPLv2 license).

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 03B6A3C600B7ADA9B742A1E041DE7D81B0
Владелец: Артеменков Михаил Николаевич
Действителен: с 04.10.2021 до 07.10.2022