Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»
Проректор по учебно-
методической работе
____________ Ю.А. Устименко
«8» сентября 2021 г.

Рабочая программа дисциплины
Б1.О.23 Комплексный анализ

Направление подготовки: **01.03.02 Прикладная математика и информатика**
Направленность (профиль): **Математическое и информационное моделирование**
Форма обучения – очная
Курс – 3
Семестр – 6
Всего зачетных единиц – 4, часов – 144
Форма отчетности: экзамен – 6 семестр

Программу разработал
доктор физико-математических наук, профессор Расулов К.М.

Одобрена на заседании кафедры
«01» сентября 2021 г., протокол № 1

Заведующий кафедрой _____________ К.М. Расулов

Смоленск
2021

1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Комплексный анализ» относится к обязательной части (Блок 1) и является обязательной дисциплиной ОП. Она изучается в 6 семестре и является вспомогательной для изучения ряда дисциплин учебного плана («Численные методы», «Краевые задачи комплексного анализа», «Основы криптографии», «Параллельное программирование» и др.), а также необходима для успешного прохождения производственных практик, предусмотренных ОП.

В настоящее время математические методы исследования проникают во все области человеческой деятельности. Это повышает интерес к математике со стороны смежных наук, использующих различный объем математических знаний. Кроме того, развитие информационных технологий и систем компьютерной математики, которые применяются для решения многих прикладных задач, требует алгоритмической четкости при изучении математических дисциплин. Поэтому курс комплексного анализа занимает важное место в ОП направления подготовки «Прикладная математика и информатика».

Для успешного освоения данной дисциплины необходимы компетенции студентов, сформированные при изучении курсов «Алгебра и геометрия», «Математический анализ», «Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных», «Дифференциальные уравнения».

Освоения дисциплины преследует следующие цели:
- овладение основными понятиями комплексного анализа;
- овладение логическими основами курса, необходимыми для решения теоретических и практических задач;
- приобретение навыков использования аппарата комплексного анализа при решении алгебраических, геометрических и физических задач;
- формирование навыков самостоятельной работы, необходимых для использования знаний при изучении специальных дисциплин и дальнейшей практической деятельности;
- развитие математической интуиции, воспитание математической культуры.

В процессе освоения дисциплины решаются такие задачи, как:
- познавательная – глубокое освоение математических понятий, изучаемых в комплексном анализе, что совершенно необходимо для изучения многих других дисциплин профессионального цикла;
- воспитательная – привитие и развитие культуры мышления, способности логически верно выстраивать устную и письменную речь, понимать необходимость доказательств, как в математике, так и в реальных жизненных ситуациях при общении с коллегами и при работе в ученическом и производственном коллективах;
- развивающая – усвоение определенного количества информации по данной дисциплине, накопленной человечеством в процессе развития математики; привитие способности понимания значения комплексного анализа в других разделах математики и возможности применения полученных знаний в своей будущей профессиональной деятельности.

Изучение курса основано на традиционных методах высшей школы, тесной взаимосвязи со смежными курсами, а также на использовании современной учебной, методической литературы, информационных и образовательных технологий.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	**Знать**: основные законы естественнонаучных дисциплин, базовый аппарат математики, необходимые для осуществления профессиональной деятельности; **Уметь**: применять знания в области естественнонаучных и математических

	дисциплин для проведения теоретических и экспериментальных исследований в профессиональной деятельности; **Владеть**: методами комплексного анализа и моделирования, навыками в области естественнонаучного и общеинженерного знания, позволяющими осуществлять исследования в профессиональной деятельности.
ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	**Знать**: базовые методы комплексного анализа, модификации и применения математических моделей, современные информационные методы в решении прикладных задач; **Уметь**: применять аппарат комплексного анализа для построения математических моделей при решении прикладных задач; **Владеть:** навыками работы с инструментальными средствами математического моделирования предметной области, прикладных и информационных процессов.

3. Содержание дисциплины

Раздел 1. Комплексные числа и действия над ними. Последовательности и ряды комплексных чисел. Комплексные числа и арифметические действия над ними. Изображение комплексных чисел на плоскости. Тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа. Понятие расширенной комплексной плоскости. Последовательности и ряды комплексных чисел. Кривые и области на расширенной комплексной плоскости.

Раздел 2. Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность функций комплексного переменного. Определение функции комплексного переменного и ее геометрическое истолкование. Предел и непрерывность функции комплексного переменного в точке.

Раздел 3. Дифференцирование функций комплексного переменного и понятие аналитической функции. Дифференцируемость по комплексному переменному, условия Коши-Римана. Понятие аналитической функции комплексного переменного. Геометрический смысл аргумента и модуля производной. Понятие конформного отображения.

Раздел 4. Основные элементарные функции в комплексной области. Линейная функция. Дробно-линейная функция. Экспонента. Логарифмическая функция. Степенная функция. Тригонометрические функции комплексного переменного. Гармонические функции и их связь с аналитическими функциями комплексного переменного.

Раздел 5. Интегралы от функций комплексного переменного. Определение интеграла от функции комплексного переменного и его свойства. Вычисление интегралов. Интегральная теорема Коши для простого и составного контуров. Неопределенный интеграл и первообразная. Интегральная формула Коши. Принцип максимума модуля аналитической функции. Теорема Лиувилля.

Раздел 6. Функциональные ряды в комплексной области. Свойства равномерно сходящихся рядов функций комплексного переменного. Степенные ряды в комплексной области. Ряд Тейлора функции комплексного переменного. Нули аналитической функции и внутренняя теорема единственности. Ряды Лорана. Изолированные особые точки аналитических функций комплексного переменного.

Раздел 7. Теория вычетов и некоторые ее приложения. Вычеты аналитических функций в изолированных особых точках и основная теорема о вычетах. Понятие о логарифмическом вычете и принцип аргумента. Теорема Руше и основная теорема высшей алгебры.

4. Тематический план

№ п/п	Темы	Всего часов	Формы занятий		
			Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа
1.	Комплексные числа и действия над ними. Понятие расширенной комплексной плоскости. Кривые и области на комплексной плоскости.	16	6	4	6
2.	Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность функций комплексного переменного.	8	2	2	4
3.	Дифференцирование функций комплексного переменного и понятие аналитической функции.	16	4	4	8
4.	Основные элементарные функции в комплексной области.	16	4	4	8
5.	Интегралы от функций комплексного переменного.	20	6	6	8
6.	Функциональные ряды в комплексной области.	22	6	8	8
7.	Теория вычетов и ее приложения.	14	4	2	8
8	Контрольная работа	5		2	3
9	Экзамен	27			27
	ВСЕГО:	144	32	32	53+27

5. Виды учебной деятельности

Лекции

1-3. **Комплексные числа и действия над ними.** Комплексные числа (определение; основные алгебраические операции над комплексными числами в алгебраической форме, тригонометрическая и показательная формы записи комплексного числа, операции возведения в степень и извлечения корня). Понятие расширенной комплексной плоскости и стереографической проекции, сфера Римана. Последовательности и ряды комплексных чисел. Кривые и области на комплексной плоскости.

4. **Функции комплексного переменного. Предел и непрерывность функций комплексного переменного.** Определение функции комплексного переменного и понятие отображения. Примеры простейших однозначных и многозначных функций комплексного

переменного. Понятие точки ветвления многозначной функции. Предел и непрерывность однозначной функции комплексного переменного в точке.

5-6. **Дифференцирование функций комплексного переменного.** Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Понятие аналитической (голоморфной) функции комплексного переменного. Геометрический смысл аргумента и модуля производной. Понятие конформного отображения и основная задача теории конформных отображений.

7-8. **Основные элементарные функции в комплексной области.** Линейная функция. Дробно-линейная функция. Экспонента. Логарифмическая функция. Тригонометрические функции комплексного переменного и формулы Эйлера. Степенная функция.

9-11. **Интегралы от функций комплексного переменного.** Гладкие и кусочно-гладкие кривые на комплексной плоскости. Понятие интеграла от функции комплексного переменного и его основные свойства. Интегральная теорема Коши и ее следствия. Понятие первообразной. Формула Ньютона-Лейбница. Интегральная формула Коши и понятие интеграла типа Коши. Теорема Лиувилля. Принцип максимума модуля аналитической функции.

12-14. **Функциональные ряды в комплексной области.** Функциональные ряды функций комплексного переменного. Равномерная сходимость функциональных рядов (признаки Коши, Вейерштрасса). Степенные ряды. Теорема Абеля и радиус сходимости степенного ряда. Ряд Тейлора. Нули аналитической функции и внутренняя теорема единственности для аналитических функций. Определение и область сходимости ряда Лорана. Разложение аналитической функции в ряд Лорана. Изолированные особые точки однозначного характера.

15-16. **Теория вычетов и некоторые ее приложения.** Определение и формулы вычисления вычета аналитической функции в изолированных особых точках. Основная теорема теории вычетов. Понятие логарифмического вычета и принцип аргумента. Теорема Руше и основная теорема высшей алгебры.

Практические занятия

Занятие №1. Комплексные числа и действия над ними

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Что называется комплексным числом?
2. Какие геометрические интерпретации комплексных чисел Вам известны?
3. Что такое действительная и мнимая части комплексного числа? Приведите примеры.
4. Сформулируйте определение модуля и аргумента комплексного числа $z = a + bi$? Приведите примеры.
5. Что называется главным значением аргумента комплексного числа?
6. Как задаются всевозможные значения аргумента комплексного числа? Приведите примеры.
7. Какими свойствами обладает модуль комплексного числа?
8. Какие числа называются сопряженными?
9. Как определяется сумма, разность, произведение и частное комплексных чисел? Приведите примеры.
10. Каков геометрический смысл операций сложения и умножения комплексных чисел? Приведите примеры.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Пусть $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - i$. Найдите и изобразите числа на комплексной плоскости: $z_3 = z_1 + z_2$, $z_4 = z_1 \cdot z_3$, $z_5 = \dfrac{z_2}{z_4}$, $z_6 = z_4 - z_5$.

2. Найдите модуль и аргумент числа z, если:

а) $z=3$; б) $z=-2$; в) $z=3i$; г) $z=-2i$;

д) $z=1-i$; е) $z=-1+\sqrt{3}i$; ж) $z=-\sqrt{3}-i$; з) $z=\sin\alpha+i\cos\alpha$.

3. Докажите, что $|z_1-z_2|$ есть расстояние между точками z_1 и z_2 на комплексной плоскости.

4. Докажите равенства:

а) $z\cdot\bar{z}=|z|^2$; б) $|z|=|\bar{z}|$; в) $Arg(z_1\cdot z_2)=Arg\,z_1+Arg\,z_2$.

5. Решите уравнение и изобразите его корни на комплексной плоскости:

а) $z^2+25=0$; б) $z^2+4z+13=0$; в) $z^2-2i=0$.

Задание для самостоятельной работы

1. Пусть $z_1=i$, $z_2=1-2i$. Найдите числа: $z_3=z_1-z_2$, $z_4=z_2\cdot z_3$, $z_5=\dfrac{z_2}{z_4}$.
2. Найдите модуль и аргумент комплексного числа z, если:

   а) $z=-1+i$; б) $z=\sqrt{3}-i$; в) $z=\sin\alpha-i\cos\alpha$.
3. Выясните, для любого ли $z\in C$ верно равенство:

   а) $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}z$; б) $z^2=\bar{z}^2$; в) $Arg(z^2)=2Arg z$.
4. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющее условию:

   а) $|z-i|=|2-i|$;б) $|iz-1|=|z-1|$; в) $Arg(iz+1)=\dfrac{\pi}{2}$.

Занятие №2. Комплексная плоскость и числовая сфера Римана

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Каков геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел?
2. Напишите уравнение замкнутого круга в комплексной форме.
3. Какова связь между комплексным числом $z=x+iy$ и его образом на числовой сфере Римана?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, заданное неравенством:

а) $|z+1+2i|>2$; б) $-\dfrac{\pi}{4}<Arg(z-1)<\dfrac{\pi}{3}$; в) $|z+\bar{z}|<4$;

г) $\operatorname{Re}z^2<2$; д) $\left|\dfrac{z-1}{z+i}\right|<2$; е) $\arg z<0$.

2. Изобразите на комплексной плоскости линию L, которая определяется уравнение $z(t)=x(t)+i\cdot y(t)$, если:

а) $z(t)=2-3it$, $t\in R$;

б) $z(t)=2t+1+(t-2)i$, $t\in[-1;2]$;

в) $z(t)=a\sin t+ib\cos t$, $0<t<\pi$.

3. Напишите уравнение линии L в комплексной параметрической форме, если:

а) L – парабола с фокусом $z=i$ и директрисой $\operatorname{Im}z=-1$;

б) L – верхняя дуга единичной окружности ;

в) L – отрезок прямой, соединяющей точки $-1+i$ и $2-3i$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее расстояния от точки $z=0$ до точек линии, определенной уравнением $\left|z+\frac{1}{z}\right|=a$, $a>0$.
5. Каковы на числовой сфере образы точек 1, -1, i, $1-i$?
6. Изобразите на числовой сфере образ множества точек, определенного соотношением:

а) $\arg z=\frac{\pi}{4}$; б) $\operatorname{Im} z>0$; в) $|z|<1$.

Задание для самостоятельной работы

1. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, заданное неравенством:

а) $|z+1|>|iz-2|$; б) $\arg(-i)<Arg(z-i)<\arg(i-1)$;

в) $|z-\bar{z}|\geq 1$; г) $\operatorname{Re}(z\cdot\bar{z})<2$.

2. Изобразите на комплексной плоскости линию L, которая определяется уравнением $z(t)=x(t)+i\cdot y(t)$, если:

а) $z(t)=3t+4it$, $t\in R$;

б) $z(t)=2t+1+(t+1)^2 i$, $t\in[-1;2]$;

в) $z(t)=e^t+ie^{-t}$, $-1<t<1$.

3. Напишите уравнение линии L в комплексной параметрической форме, если:

а) L – эллипс с фокусами $z=i$, $z=-2i$ и и большой полуосью $a=4$;

б) L – правая ветвь гиперболы $xy=1$;

в) L – отрезок прямой, соединяющей точки $1+2i$ и $3-4i$.

4. Найдите наибольшее и наименьшее расстояния от точки $z=0$ до точек линии, определенной уравнением $|z-3+4i|=1$.

Занятие №3. Понятие предела в комплексном анализе

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Сформулируйте определение предела последовательности комплексных чисел. Приведите примеры.
2. Какими свойствами обладает предел последовательности?
3. Сформулируйте определение ряда с комплексными членами. Приведите примеры.
4. Какой ряд называется сходящимся? Приведите примеры.
5. Какими свойствами обладают ряды с комплексными членами.
6. Дайте определение функции комплексного переменного. Каков геометрический смысл функции комплексного переменного?
7. Сформулируйте определение предела функции $w=f(z)$ в точке z_0. Приведите примеры.
8. Перечислите основные свойства функций непрерывных в точке.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Пользуясь определением, докажите, что последовательность $z_n=\frac{n-1+(2n+3)i}{n}$ сходится к точке $a=1+2i$.
2. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=0$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|=0$.
3. Вычислите предел последовательности z_n, если:

а) $z_n = \dfrac{n^2+1+in}{1+in^2}$; б) $z_n = \left(\dfrac{2+3i}{5}\right)^n$.

4. Исследуйте ряд на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{i^n}{i+n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3i)^n}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{(1+i)^n}$.

5. Найдите предел функции $w = f(z)$ в точке z_0, если:

а) $w = \dfrac{\operatorname{Re} z^2}{z}$, $z_0 = 0$; б) $w = \dfrac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}$, $z_0 = 1+i$.

6. Докажите, что функция $f(z) = z^2 + \bar{z} \cdot (z+1)$ непрерывна в каждой точке комплексной плоскости.

Задание для самостоятельной работы

1. Сформулируйте, если это возможно, определения утверждениям:

а) $\lim\limits_{z\to a} f(z) = b$; б) $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$; в) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = b$;

г) $\lim\limits_{z\to+\infty} f(z) = b$; д) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$; е) $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$.

2. Пользуясь определением, докажите, что последовательность $z_n = \dfrac{n^2-1+(n^2+1)i}{n^2+in-1}$ сходится к точке $a = 1+i$.

3. Вычислите предел последовательности z_n, если:

а) $z_n = \left(1+\dfrac{i}{n}\right)^n$; б) $z_n = \arg\left(-1+\dfrac{i^n}{n}\right)$.

4. Исследуйте ряд на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(3i)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(in)^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2i)^n}{n!}$.

5. Определите, в каких точках данная функция не имеет предела:

а) $w = \dfrac{\bar{z}}{z}$; б) $w = \dfrac{|z+i|^2}{z+i}$; в) $w = i\arg(z-1)$.

6. Можно ли доопределить функцию $w = f(z)$ в точке z_0 так, чтобы она стала в ней непрерывной, если:

а) $w = \dfrac{\operatorname{Re} z^2}{z}$, $z_0 = 0$; б) $w = \dfrac{(z-1)\cdot \operatorname{Im}(z-1)}{|z-1|}$, $z_0 = 1$.

Занятие №4. Производная функции. Условия Коши-Римана

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Сформулируйте определение производной функции $w = f(z)$ в точке z_0. Приведите примеры.
2. Перечислите основные свойства функций, дифференцируемых в точке.
3. Сформулируйте теорему Коши-Римана. Приведите примеры.
4. Каким образом записываются условия Коши-Римана с использованием дифференциальных операторов?

5. Какая функция называется аналитической в точке? Приведите примеры.
6. Является ли функция $f(z)=z^2+(z-1)\cdot\bar{z}$ аналитической в комплексной плоскости?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Пользуясь определением, найдите производную функции $w=f(z)$ в точке z_0, если:

а) $f(z)=z^3-3z^2+1,\ z_0=1-i$; б) $f(z)=\dfrac{z+i}{z-i},\ z_0=-i$.

2. Определите, в каких точках имеет производную данная функция:

а) $w=(\bar{z}-z)^2$; б) $w=\overline{z+\mathrm{Re}z}$; в) $w=(z+i)^3-2\bar{z}$;

г) $w=|z-i|^2+(z-i)^2$; д) $w=iz^2-3z$; е) $w=\mathrm{Im}z+i\,\mathrm{Re}z$.

3. Докажите, что функция $w=\bar{z}$ нигде не дифференцируема.
4. Найдите значения параметров a, b и c, при которых функция $w=ax+by+i(cx+y)$ будет аналитической на всей комплексной плоскости.
5. Найдите аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,u)$ по ее действительной части $u(x,y)=x^2-y^2+5x+y-\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

Задание для самостоятельной работы

1. Пользуясь определением, найдите производную функции $w=f(z)$ в точке z_0, если:

а) $f(z)=z^2+2z,\ z_0=3+2i$; б) $f(z)=\dfrac{z+1}{z-1},\ z_0=-1$.

2. Докажите, что функция $w=|z-a|^2$ дифференцируема в точке a.
3. Определите, в каких точках имеет производную данная функция:

а) $w=(\mathrm{Re}z+i\,\mathrm{Im}\bar{z})^2$; б) $w=\mathrm{Im}(z+\mathrm{Re}z)$; в) $w=z^3-2|z-1|^2$;

г) $w=\overline{z-i}+(z-i)^2$; д) $w=z^2+2iz$; е) $w=\mathrm{Re}^2 z-i\,\mathrm{Im}^2 z$.

4. Найдите аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,u)$ по ее мнимой части $v(x,y)=\ln(x^2+y^2)+x-2y$.
5.

Занятие №5. Геометрический смысл производной функции комплексного переменного

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. В чем состоит геометрический смысл модуля и аргумента производной функции $w=f(z)$ в точке z_0?
2. Какое отображение называется конформным? Приведите примеры.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Для отображения $w=f(z)$ найдите коэффициент деформации и угол поворота в точке z_0, если:

а) $f(z)=z^3-3z^2+1,\ z_0=1-i$; б) $f(z)=\dfrac{z+i}{z-i},\ z_0=-i$.

2. Найдите угол между образами кривых $\gamma_1:|z-1|=2$ и $\gamma_2:|z+1|=2$ при отображении $w=iz^2+z-1$.

3. Определите, в каких точках плоскости коэффициент деформации отображения $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ равен 1.
4. Определите, в каких точках плоскости угол поворота отображения $w=\dfrac{iz+1}{iz-1}$ равен нулю.
5. Найдите образы прямых $\mathrm{Re}\,z=a$ и $\mathrm{Im}\,z=b$ $(a,b\in R)$ при отображении $w=z^2$.

Задание для самостоятельной работы

1. Для отображения $w=f(z)$ найдите коэффициент деформации и угол поворота в точке z_0, если:

   а) $f(z)=(z-3)^2$, $z_0=2+i$; б) $f(z)=\dfrac{iz+1}{z-1}$, $z_0=-1$.
2. Найдите угол между образами кривых $\gamma_1:|z-1|=|z+1|$ и $\gamma_2:|z+i|=|z-i|$ при отображении $w=iz^{2014}+2013z-1$.
3. Определите, какая часть плоскости сжимается при отображении $w=\dfrac{z}{z-i}$.
4. Определите, в каких точках плоскости угол поворота отображения $w=3z^2-6z+11$ равен $\dfrac{\pi}{2}$.
5. Выясните, во что функция $w=\dfrac{1}{z}$ переводит полярную сетку $|z|=R$, $\arg z=\alpha$ $(R>0,\ 0\le\alpha<2\pi)$.

Занятие №6. Основные элементарные функции комплексного переменного

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Сформулируйте определение показательной функции комплексного переменного $w=e^z$.
2. Перечислите основные свойства показательной функции комплексного переменного.
3. Что называется показательной формой комплексного числа. Приведите примеры.
4. Сформулируйте определение логарифмической функции комплексного переменного $w=Lnz$.
5. Перечислите основные свойства функции $w=Lnz$. Приведите примеры.
6. Что называется главным логарифмом комплексного числа z?
7. Сформулируйте определение основных тригонометрических функций комплексного переменного.
8. Перечислите основные свойства тригонометрических функций.
9. Какова связь между тригонометрическими и гиперболическими функциями?
10. Как определяется степенная функция комплексного переменного?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите модуль и аргумент комплексного числа z, если:

   а) $z=e^{1+i}$; б) $z=-2e^{4i}$;в) $w=ie^{-\pi i}$.
2. Запишите комплексное число z в показательной форме, если:

   а) $z=1-i$; б) $z=\sqrt{3}+i$; в) $z=-1-\sqrt{3}i$.
3. Изобразите на комплексной плоскости значения $Ln(1-i)$.

4. Пользуясь определением, докажите равенство:

а) $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2}$; б) $\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2$.

5. Выясните, во что функция $w=e^z$ преобразует прямоугольную сетку $\operatorname{Re}z=a$, $\operatorname{Im}z=b$ ($a,b\in R$).

Задание для самостоятельной работы

1. Найдите модуль и аргумент комплексного числа z, если:

а) $z=-e^{1-i}$; б) $z=-2ie^{i}$; в) $w=ie^{\frac{\pi}{2}i}$.

2. Запишите комплексное число z в показательной форме, если:

а) $z=2\sqrt{3}-2i$; б) $z=\sqrt{3}$; в) $z=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

3. Изобразите на комплексной плоскости значения $Ln(e)$.

4. Пользуясь определением, докажите равенство:

а) $Ln(z_1\cdot z_2)=Lnz_1+Lnz_2$; б) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+z\right)=\sin z$.

5. Выясните, верно ли равенство:

а) $\ln z^2=2\ln z$; б) $\cos iz=chz$; в) $ch^2z-sh^2z=1$.

6. Выясните, во что функция $w=\ln z$ преобразует полярную сетку $|z|=R$, $\arg z=\alpha$ ($R>0,\ 0\le\alpha<2\pi$).

Занятие №7. Гармонические функции двух действительных переменных и их связь с аналитическими функциями комплексного переменного.

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Дайте определение гармонической функции двух действительных переменных в точке $M_0(x_0,y_0)$. Приведите примеры.

2. Когда функция $U(x,y)$ называется гармонической на множестве D? Приведите примеры гармонических функций в единичном круге

3. Верно ли утверждение: *если функция* $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ *является аналитической в точке* $z_0=x_0+iy_0$, *то функции* $U(x,y),V(x,y)$ *являются гармоническими в точке* $M_0(x_0,y_0)$?

4. Всякая ли гармоническая в области D функция $U(x,y)$ является действительной (мнимой) частью аналитической в области D функции $f(z)$?

5. Задана гармоническая в односвязной области G функция $U(x,y)$. По какой формуле можно найти аналитическую в G функцию $f(z)$, для которой $\operatorname{Re}f(z)=U(x,y)$ ($\operatorname{Im}f(z)=U(x,y)$)?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Проверьте, является ли следующие функции гармоническими в своей естественной области определения:

а) $U(x,y)=arctg\dfrac{y}{x}$; б) $\varphi(x,y)=\ln(x^2+y^2)$; в) $V(x,y)=x^3+y^3$.

2. Существует ли аналитическая функция $f(z)$, у которой:

а) $\operatorname{Re}f(z)=x^2-y^2$; б) $\operatorname{Im}f(z)=xy^2$; в) $\operatorname{Re}f(z)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$?

3. Найдите аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,u)$ по ее действительной части $u(x,y)=x^2-y^2+5x+y-\frac{y}{x^2+y^2}$.

4. Найдите аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,u)$ по ее мнимой части $v(x,y)=e^{-2y}\cos 2x$.

5. Найдите аналитическую функцию $f(z)$ такую, что $\operatorname{Re} f(z)=x^2-y^2+x$ и $f(0)=i$.

Задание для самостоятельной работы

1. Проверьте, является ли следующие функции гармоническими в своей естественной области определения:

   а) $U(x,y)=e^x\sin y$; б) $\varphi(x,y)=x^3-3xy^2$; в) $V(x,y)=x^4+y^4+1$.

2. Существует ли аналитическая функция $f(z)$, у которой:

   а) $\operatorname{Re} f(z)=x^2+y^2$; б) $\operatorname{Im} f(z)=3xy^2-x^3$; в) $\operatorname{Re} f(z)=\frac{x^2-x+y^2}{x^2+y^2}$?

3. Найдите аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,u)$ по ее действительной части $u(x,y)=e^y\cos x$.

4. Найдите аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ по ее мнимой части $v(x,y)=\ln(x^2+y^2)+x-2y$.

5. Найдите аналитическую функцию $f(z)$ такую, что $\operatorname{Re} f(z)=3x^2y-y^3$ и $f(0)=0$.

Занятие №8. Понятие интеграла от функции комплексного переменного

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Сформулируйте определение производной комплекснозначной функции действительного переменного. Приведите примеры.
2. Что называется интегральной суммой для функции $f(z)$ по кривой L?
3. Сформулируйте определение интеграла от функции $f(z)$ комплексного переменного по кривой L. Приведите примеры.
4. Перечислите основные свойства интеграла от функции комплексного переменного.
5. Какая связь между $\int\limits_L f(z)dz$ и криволинейными интегралами от функций $\operatorname{Re} f(z)=u(x,y)$ и $\operatorname{Im} f(z)=v(x,y)$?
6. Сформулируйте теорему о существовании интеграла от функции комплексного переменного по заданной кривой.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите производную функции комплекснозначной функции $f(t)$ действительного переменного t, если:

   а) $f(t)=(t+i)^3$; б) $f(t)=\frac{t+i}{t-i}$; в) $f(t)=e^{it}$.

2. Вычислите:

а) $\int\limits_{-1}^{1}(t+i)^2\,dt$; б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{t+i}$; в) $\int\limits_{0}^{2\pi}e^{it}\,dt$.

3. Составьте интегральную сумму для функции $f(z)=z^2$ по отрезку $[-4;4i]$, соответствующую разбиению отрезка на четыре равные части и выбору левых концов частичных дуг в качестве промежуточных точек.

4. Вычислите интеграл от функции $f(z)$ по кривой L, если:

а) $f(z)=\operatorname{Re} z$, $L=[-1-i;1+i]$; б) $f(z)=\bar{z}$, $L=[1;i]$;

в) $f(z)=(z+i)^2$, $L=\{z \mid z=e^{it}, 0\le t\le \pi\}$; г) $f(z)=|z|$, $L:|z|=1$;

д) $f(z)=z+(z+1)\bar{z}$, L – треугольник с вершинами 1, $1+i$, i.

Задание для самостоятельной работы

1. Найдите производную функции комплекснозначной функции $f(t)$ действительного переменного t, если:

а) $f(t)=t^2+t+i(t^2-1)$; б) $f(t)=\frac{t^2+1}{t^2+i}$; в) $f(t)=\cos t+i\sin t$.

2. Вычислите:

а) $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\sin(t+i)\,dt$; б) $\int\limits_{0}^{1}\frac{dt}{t^2+i}$; в) $\int\limits_{0}^{\pi}e^{-2it}\,dt$.

3. Составьте интегральную сумму для функции $f(z)=z+2i$ по отрезку $[2i;2]$, соответствующую разбиению отрезка на четыре равные части и выбору середин частичных дуг в качестве промежуточных точек.

4. Вычислите интеграл от функции $f(z)$ по кривой L, если:

а) $f(z)=\operatorname{Im} z$, $L=[-i;1+i]$;

б) $f(z)=\bar{z}^2$, $L=[1+i;0]$;

в) $f(z)=z\cdot\bar{z}-1$, $L=\{z \mid z=e^{it}, 0\le t\le 2\pi\}$;

г) $f(z)=\operatorname{Im}^2 z-i\operatorname{Re}^2 z$, $L:|z|=1$;

д) $f(z)=\frac{z+\bar{z}}{2}$, L – квадрат с вершинами 1, i, -1, $-i$.

Занятие №9. Теорема Коши. Интегральная формула Коши

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Сформулируйте интегральную теорему Коши и следствия из нее. Приведите примеры.
2. Дайте определение первообразной для функции $f(z)$ в области D. Приведите примеры.
3. Сформулируйте теорему о формуле Ньютона-Лейбница для аналитической функции $f(z)$.
4. В чем состоит интегральная формула Коши для функции $f(z)$?
5. Как применяются интегральная теорема и интегральная формула Коши к вычислению интегралов?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Вычислите интеграл от функции $f(z)$ по линии L, если:

а) $f(z)=(iz+1)^2$, $L=[-1+i;2i]$;

б) $f(z)=e^{iz}$, $L=[0;\pi]$;

в) $f(z)=z\cdot\cos z$, $L=\left\{z \,\middle|\, z=t+it^2, 0\le t\le 1\right\}$;

г) $f(z)=z^2\cdot e^{-iz}$, $L=\{z \,|\, |z|=2\}$;

д) $f(z)=\dfrac{z^3}{z-2}$, $L=\{z \,|\, |z|=1\}$;

е) $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z+2)}$, $L=\left\{z \,\middle|\, z=e^{it}, 0\le t\le 2\pi\right\}$;

ж) $f(z)=\dfrac{z}{z^2-4z+3}$, $L=\{z \,|\, |z-1|=1\}$;

з) $f(z)=\dfrac{1}{z(z^2+1)}$, $L=\{z \,|\, |\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|=2\}$.

2. В зависимости от значений параметра a ($a>0$) вычислите $\int\limits_L \dfrac{dz}{z^2+9}$, $L{:}\,|z-i|=a$.

3. Какое число различных значений может принимать интеграл $\int\limits_L \dfrac{dz}{\prod\limits_{k=1}^{n}(z-z_k)}$, если контур L не проходит ни через одну точку z_k, $k=\overline{1,n}$?

Задание для самостоятельной работы

1. Вычислите интеграл от функции $f(z)$ по линии L, если:

а) $f(z)=(2iz-1)^3$, $L=[i;1+2i]$;

б) $f(z)=e^{-2iz}$, $L=\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$;

в) $f(z)=z\cdot\sin z$, $L=\{z \,|\, z=t+\pi i\sin t, 0\le t\le\pi\}$;

г) $f(z)=z\cdot e^z$, $L=\{z \,|\, |z|=1\}$;

д) $f(z)=\dfrac{z^2+i}{z+2i}$, $L=\{z \,|\, |z|=1\}$;

е) $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-2i)(z+2)}$, $L=\left\{z \,\middle|\, z=e^{it}, 0\le t\le 2\pi\right\}$;

ж) $f(z)=\dfrac{z}{z^2-5iz-6}$, $L=\{z \,|\, |z-2i|=2\}$;

з) $f(z)=\dfrac{z^2-iz}{z(z^2-1)}$, L – треугольник с вершинами 2, $-2+2i$, $-2-2i$.

2. В зависимости от значений параметра a ($a>0$) вычислите $\int\limits_L \frac{dz}{z^2+a^2}$, $L{:}|z|=a+1$.

Занятие №10. Интеграл типа Коши и производные высших порядков аналитических функций

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Дайте определение интеграла типа Коши с непрерывной плотностью по конечной кусочно-гладкой кривой.
2. Сформулируйте теорему о дифференцируемости интеграла типа Коши.
3. Почему интегральная формула Коши является частным случаем интеграла типа Коши?
4. Верно ли утверждение: *если* $f(z)$ *- аналитическая функция в некоторой области* D, *то* $f'(z)$ *также является аналитической в этой области*? Ответ обоснуйте.
5. По какой формуле можно вычислять производные высших порядков аналитической в области D функции $f(z)$?
6. Напишите формулу среднего значения аналитических функций.
7. Напишите неравенства Коши для аналитической функции.
8. В чем состоит суть теоремы Лиувилля для аналитических функций?
9. Сформулируйте и докажите теорему Морера.
10. Сформулируйте и докажите теорему о стирании особенностей для аналитических функций.
11. В чем состоит суть теоремы о максимуме модуля аналитической функции?
12. Дайте определение функций, удовлетворяющих условию Гельдера на множестве L. Приведите пример непрерывной на некотором множестве G функции, не удовлетворяющей на этом множестве условию Гельдера.
13. Как определяется сингулярный интеграл Коши?
14. Докажите справедливость утверждения: *если функция* $f(z)$ *является аналитической в односвязной области* D, *то для любой замкнутой простой кусочно-гладкой кривой* $\gamma\subset D$ *имеет место формула*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma \frac{f(t)dt}{t-z}=\begin{cases} f(z), & \text{если } z\in G^+,\\ \frac{1}{2}f(z), & \text{если } z\in\gamma,\\ 0, & \text{если } z\in D\setminus(G^+\cup\gamma),\end{cases}$$

где G^+ *- конечная область, ограниченная кривой* γ.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Пользуясь формулой для производных высших порядков, вычислите следующие интегралы:

   а) $\oint\limits_L \frac{\cos z}{z^2}dz$, где $L=\{z:\ |z|=1\}$;

   б) $\oint\limits_L \frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^3}dz$, где $L=\{z:\ |z-i|=4\}$.

2. Найдите первообразные функций, где a и b - отличные от нуля константы:

   а) e^{az};

   б) $\sin az$;

в) $e^{az}\cos bz$.

3. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в кольце $r<|z-a|<R$. Докажите, что интеграл $\int\limits_{|z-a|=\rho} f(z)dz$, где $r<\rho<R$, не зависит от числа ρ.

Задание для самостоятельной работы

1. Пользуясь формулой для производных высших порядков, вычислите следующие интегралы:

а) $\oint\limits_L \frac{\cos z}{(z-i)^3}dz$, где $L=\{z:\ |z-i|=1\}$;

б) $\oint\limits_L \frac{e^z}{(z-1)^3}dz$, где $L=\{z: |z-1|=1\}$.

2. Найдите первообразные следующих функций, где a - отличная от нуля константа: а) $\cos az$; б) ze^{az}; в) $z\cos az$.

3. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в кольце $r<|z-a|<R$. Докажите, что интеграл $\int\limits_{|\varsigma-a|=\rho} \frac{f(\varsigma)}{\varsigma-a}d\varsigma$, где $r<\rho<R$, не зависит от ρ.

Занятие №11. Степенные ряды

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Сформулируйте определение степенного ряда. Приведите примеры.
2. Что называется кругом сходимости степенного ряда?
3. Перечислите основные свойства степенных рядов.
4. Сформулируйте теорему о разложимости аналитической функции в степенной ряд.
5. Запишите неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда аналитической функции.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите круг сходимости степенного ряда, если:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1+i}{3+4i}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2iz-3)^n}{(1+i)^n}$.

2. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\frac{z}{z^2+4}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z+1-i)^n$ и его коэффициенты c_0 и c_1.

3. Приведите пример степенного ряда, круг сходимости которого $|z-i|<2$. Что можно сказать о сходимости этого ряда в точках $z=1$ и $z=-3-i$?

4. Известно, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z+i)^n$ сходится в точке $z_1=1-2i$ и расходится в точке $z_2=-3-5i$. Что можно сказать о сходимости этого ряда в точках $z_3=0$, $z_4=-1$, $z_5=-2+i$, $z_6=-4+6i$?

5. Вычислите интеграл от функции $f(z)$ по линии L, если:

а) $f(z)=\dfrac{z+2i}{(z^2+1)(z+1)^2}$, $L:|z-1|=1$; б) $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-i)^3}$, $L:|z-2|=10$.

Задание для самостоятельной работы

1. Найдите круг сходимости степенного ряда, если:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{z+i}{1+i}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n z^n}{n}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(iz-5)^n}{(3+4i)^n}$.

2. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\dfrac{1}{z^2+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z+2+i)^n$ и его коэффициенты c_0 и c_1.

3. Приведите пример степенного ряда, круг сходимости которого $|z+i|<5$. Что можно сказать о сходимости этого ряда в точках $z=1$ и $z=-3+10i$?

4. Известно, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-i)^n$ сходится в точке $z_1=2+i$ и расходится в точке $z_2=-3-i$. Что можно сказать о сходимости этого ряда в точках $z_3=0$, $z_4=3i$, $z_5=-2+i$, $z_6=-1+6i$?

5. Вычислите интеграл от функции $f(z)$ по линии L, если:

а) $f(z)=\dfrac{z+i}{z^2+4}$, $L:|z-i|=2$; б) $f(z)=\dfrac{z^4+4z+1}{(z-i)^{2012}}$, $L:|z-i|=1$.

6. В зависимости от значений параметра $a\in C$ вычислите $\int\limits_L \dfrac{z^2+1}{(z-a)^2}dz$, где $L:|z|=1$.

Занятие №12. Разложение аналитических функций в ряд Тейлора. Нули аналитической функции

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Сформулируйте определение ряда Тейлора для функции $f(z)$ с центром в точке a. Приведите примеры.
2. Как находятся коэффициенты ряда Тейлора?
3. Сформулируйте определение нуля аналитической функции $f(z)$. Приведите примеры.
4. Что называется порядком нуля аналитической функции $f(z)$? Приведите примеры.
5. Какие способы определения порядка нулей аналитической функции Вам известны?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z-a$ и найдите круг сходимости, если:

а) $f(z)=e^{iz}$, $a=-1$; б) $f(z)=\sin^2 z$, $a=0$;

в) $f(z)=\dfrac{z}{z^2-4}$, $a=2i$; г) $f(z)=\int\limits_0^z \zeta\sin\zeta^2 d\zeta$, $a=0$.

2. Вычислите интеграл:

а) $\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{e^{iz}}{(z+1)^2}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin^2 z}{z}dz$; в) $\oint\limits_{|z-2i|=1} \frac{z}{(z^2-4)(z-2i)}dz$.

3. Найдите решение дифференциального уравнения $w'' = zw$, удовлетворяющее следующим начальным условиям: $w(0)=1,\ w'(0)=0$.

4. Найдите все нули функции $f(z)$ и укажите их порядки, если:

а) $f(z)=(z^2-9)(z^2+9)$; б) $f(z)=\frac{\sin^3 z}{z}$; в) $f(z)=z^2(1-e^z)(z+1)^2$.

5. Найдите порядок нуля $a=0$ функции $f(z)$, если:

а) $f(z)=z^2\sin z$; б) $f(z)=z\left(e^{-z^2}-1\right)$.

6. Пусть число a является нулем порядка m и n соответственно для аналитических функций $f(z)$ и $\varphi(z)$. Что можно сказать о порядке нуля a для функции:

а) $f(z)+\varphi(z)$; б) $f(z)\cdot\varphi(z)$; в) $f'(z)\cdot\varphi''(z)$.

Задание для самостоятельной работы

1. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z-a$ и найдите круг сходимости, если:

а) $f(z)=ze^{-z}$, $a=-i$; б) $f(z)=ch^2 z$, $a=0$;

в) $f(z)=\frac{z+2}{z^2+4}$, $a=2$; г) $f(z)=\int\limits_0^z \zeta e^{-\zeta^2}d\zeta$, $a=0$.

2. Вычислите интеграл:

а) $\oint\limits_{|z+i|=2} \frac{ze^{-z}}{(z+1)^3}dz$; б) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{ch^2 z}{z^4}dz$; в) $\oint\limits_{|z-2|=1} \frac{z+2}{(z^2+4)(z-2)}dz$.

3. Найдите решение дифференциального уравнения $zw''+(2+z^2)w'+30w=6z^4+58z^3-8z+30$, удовлетворяющее следующим начальным условиям: $w(0)=1,\ w'(0)=0$.

4. Докажите, что коэффициенты c_n разложения

$$\frac{1}{1-z-z^2}=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$$

являются числами Фибоначчи. Найдите круг сходимости данного ряда.

5. Найдите порядок нуля $a=0$ функции $f(z)$, если:

а) $f(z)=z\sin z-z^2$; б) $f(z)=z\left(e^{z^2}-1\right)-z^3$.

6. Пусть число a является нулем порядка m и n соответственно для аналитических функций $f(z)$ и $\varphi(z)$. Что можно сказать о порядке нуля a для функции:

а) $f(z)-\varphi(z)$; б) $f^2(z)\cdot\varphi^3(z)$; в) $c_1\cdot f(z)+c_2\cdot\varphi(z)$, $c_1,c_2\in C$.

Занятие №13. Теорема единственности. Аналитическое продолжение

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Дайте определение предельной точки. Приведите примеры.
2. Сформулируйте теорему единственности.

3. Может ли аналитическая в области D функция $f(z)$ иметь в ней бесконечно много нулей?
4. В каком случае функция $F(z)$ называется аналитическим продолжением функции $f(z)$. Приведите примеры.
5. Сколькими способами можно аналитически продолжить функцию с заданного множества, имеющего предельную точку?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите предельные точки множества E, если:

а) $E=[1-i;-1+i]$; б) $E=\left\{z \,\middle|\, z=1+\frac{i}{n}, n\in N\right\}$.

2. Определите, существует ли функция $f(z)$, аналитическая в единичном круге и удовлетворяющая условиям:

а) $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$, $n\in N$; б) $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+\sin\frac{\pi n}{2}}$, $n\in N$.

3. Используя теорему единственности, докажите равенство $\sin^2 z+\cos^2 z=1$.
4. Объясните, почему не противоречит теореме единственности равенство $\sin z=\cos z$ при $z=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$.
5. Докажите, что функция $F(z)=\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{z-1}\right)^n$ является аналитическим продолжением функции $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$.
6. Функцию $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$ разложили в ряд Тейлора в окрестности точки $z=\frac{1}{2}$. На какую область при этом будет продолжена функция $f(z)$?

Задание для самостоятельной работы

1. Найдите предельные точки множества E, если:

а) $E=\{z \,|\, |z|=1\}$; б) $E=\left\{z \,\middle|\, z=\frac{1}{n}+2i, n\in N\right\}$.

2. Определите, существует ли функция $f(z)$, аналитическая в единичном круге и удовлетворяющая условиям:

а) $f\left(\frac{1}{n}\right)=-f\left(-\frac{1}{n}\right)$, $n\in N$; б) $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2+\cos^2\pi n}$, $n\in N$.

3. Используя теорему единственности, докажите равенство $\sin 2z=2\sin z\cos z$.
4. Объясните, почему не противоречит теореме единственности равенство $\cos z=\cos^2 z$ при $z=2\pi n$, $n\in Z$.

5. Докажите, что функция $F(z)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{4^n}$ является аналитическим продолжением функции . $F(z)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+1)^n}{3^n}$

6. Функцию $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$ разложили в ряд Тейлора в окрестности точки $z=1+i$. На какую область при этом будет продолжена функция $f(z)$?

Занятие №14. Ряд Лорана. Особые точки аналитической функции

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Сформулируйте определение ряда Лорана.
2. Что называется главной (правильной) частью ряда Лорана? Приведите примеры.
3. Что является областью сходимости ряда Лорана?
4. Сформулируйте теорему Лорана.
5. Дайте определение изолированной особой точки функции $f(z)$. Приведите примеры.
6. В каком случае функция $f(z)$ называется правильной в точке z_0? Приведите примеры.
7. Сформулируйте определение полюса функции $f(z)$. Приведите примеры.
8. Что называется кратностью полюса функции $f(z)$?
9. Дайте определение существенно особой точки функции $f(z)$. Приведите примеры.
10. Сформулируйте теорему Сохоцкого-Вейерштрасса.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите область сходимости :

а) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{3^n z^n}{n^2+1}$; б) $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{2^n}$; в) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z^n}{n!}+\frac{n}{z^{n+1}}\right)$.

2. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z-z_0$, если:

а) $f(z)=\frac{z}{(z+i)(z-3)}$, $z_0=0$; б) $f(z)=z^2\sin\frac{1}{z-1}$, $z_0=1$.

3. Определите характер особых точек функции $f(z)$, если:

а) $f(z)=\frac{1}{\sin z}$; б) $f(z)=z^3e^{\frac{1}{z^2}}$; в) $f(z)=\frac{1-\cos 2z}{z^2}$.

4. Пусть функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ имеют полюсы в точке z_0 порядка m и n соответственно. Определите характер особенности в точке z_0 функции:

а) $f(z)\cdot\varphi(z)$; б) $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$; в) $f(z)+\varphi(z)$.

5. Вычислите интеграл от функции $f(z)$ по кривой Γ, если:

а) $f(z)=\frac{1}{z^3-z^5}$, $\Gamma:|z-1|=\frac{1}{2}$; б) $f(z)=ze^{\frac{1}{z}}$, $L:|z|=1$.

6. Проверьте справедливость теоремы Сохоцкого-Вейерштрасса для функции $\sin\frac{1}{z}$.

Задание для самостоятельной работы

1. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0, если:

а) $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2-5z+6}$, $z_0=2$; б) $f(z)=\left(z^2-1\right)\cdot e^{\frac{1}{z^2}}$, $z_0=0$.

2. Определите характер особых точек функции $f(z)$, если:

а) $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^3-1}$; б) $f(z)=\dfrac{1-e^{z^2}}{z^4-z^2}$; в) $f(z)=\dfrac{e^{\frac{1}{z^2}}}{1-\cos^2 z}$.

3. Постройте пример функции, имеющей в расширенной комплексной плоскости следующие особенности:
а) ноль второго порядка в бесконечности;
б) ноль первого порядка в точке $z=0$ и простой полюс в бесконечности;
в) полюс третьего порядка в точке $z=i$ с главной частью $\dfrac{c_{-3}}{(z-i)^3}$ и полюс первого порядка в бесконечности.

4. Пусть $f(z)$ однозначная функция, не имеющая в области D других особенностей, кроме полюсов. Докажите, что функция $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ имеет простые полюсы во всех полюсах функции $f(z)$ и в тех точках, в которых $f(z)=0$.

Занятие №15. Вычеты и их приложения

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Дайте определение изолированной особой точки функции $f(z)$. Приведите примеры.
2. Сформулируйте определение вычета функции $f(z)$ в изолированной особой точке.
3. Чему равен вычет функции $f(z)$ в правильной точке z_0?
4. Как найти $\operatorname*{Res}_{z_0} f(z)$, если z_0 является простым полюсом функции $f(z)$?
5. Сформулируйте основную теорему о вычетах.
6. Дайте определение логарифмического вычета функции $f(z)$.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите вычеты функции $f(z)$ во всех ее изолированных особых точках, если:

а) $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2-1}$; б) $f(z)=\dfrac{e^{iz}}{z^2(z-\pi)}$; в) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^4\cos z}$.

2. Вычислите:

а) $\displaystyle\int_L \frac{z+1}{(z-1)(z+5)^2}\,dz$, если $L=\{z\,|\,|z|=3\}$;

б) $\displaystyle\int_L \frac{e^{iz}}{(z+1)(z+2)^2}$, если $L=\{z\,|\,|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|=3\}$;

в) $\int\limits_L \frac{dz}{\sin z}$, если L – единичная окружность.

3. Найдите логарифмический вычет функции $f(z) = \frac{z^{2021}}{z-2022}$ в точке z_0, если:

   а) $z_0 = 0$; б) $z_0 = 2021$; в) $z_0 = 2022$.

4. В зависимости от положительных значений параметра a вычислите $\int\limits_L \frac{dz}{(z-1)(z+i)^2(z+2)^3}$, если $L = \{z \,|\, |z| = a\}$.

Задание для самостоятельной работы

1. Найдите вычеты функции $f(z)$ во всех ее изолированных особых точках, если:

   а) $f(z) = \frac{z+1}{z^2+1}$; б) $f(z) = \frac{\sin \pi z + 1}{z^2(z+1)}$; в) $f(z) = \frac{\cos \pi z}{(z-1)^2 \sin \pi z}$.

2. Вычислите:

   а) $\int\limits_L \frac{z+3}{(z+1)(z-5)^2} dz$, если $L = \{z \,|\, |z+1| = 1\}$;

   б) $\int\limits_L \frac{\cos \pi z}{(z-1)(z-2)^2}$, если $L = \{z \,|\, \mathrm{Re}^2 z + \mathrm{Im}^2 z = 5\}$;

   в) $\int\limits_L \frac{\cos 2z dz}{\sin z}$, если L – единичная окружность.

3. Найдите логарифмический вычет функции $f(z) = \frac{z}{(z-2021)^{2022}}$ в точке z_0, если:

   а) $z_0 = 0$; б) $z_0 = 2021$; в) $z_0 = 2022$.

4. В зависимости от положительных значений параметра a вычислите $\int\limits_L \frac{dz}{(z-a)(z+ai)^2(z+2a)^3}$, если $L = \{z \,|\, |z| = 1\}$.

5. Найдите вычет функции $f(z) = \varphi(z)\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ в точке z_0, если функция $\varphi(z)$ является аналитической в точке z_0 и:

   а) z_0 – правильная точка функции $\psi(z)$;

   б) z_0 – ноль порядка n функции $\psi(z)$;

   в) z_0 – полюс порядка m функции $\psi(z)$.

Практическое занятие №16. «Контрольная работа»

<u>Образец контрольной работы</u>

(во всех заданиях значение параметра k равно номеру студента в учебном журнале)

1. Решите уравнение $z^4 - ki^k = 0$ и изобразите его корни на комплексной плоскости.
2. Найдите аналитическую функцию $f(z)$ такую, что $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + k$ и $f(0) = ik$.
3. Найдите круг сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz-3)^n}{(k+i)^n}$.
4. Вычислите $\int_L \frac{z+1}{(z-1)^k (z+10)} dz$, если $L = \{z : |z| = k\}$.
5. Пользуясь теоремой Руше, найдите число корней уравнения $z^8 - kz^5 + z^2 - 1 = 0$ в области $|z| < k$.

Самостоятельная работа

Задания для самостоятельной работы приводятся в планах практических занятий.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Текущая аттестация осуществляется на каждом практическом занятии в процессе фронтального опроса, выполнения заданий для аудиторной работы, в процессе проверки домашней самостоятельной работы.

Проведение текущего контроля осуществляется также посредством проведения аудиторных контрольных работ и разноуровневых самостоятельных работ.

Оценочные средства

I. Контрольные вопросы для проверки теоретической подготовки к практическому занятию.

Перечень вопросов приводится в планах практических занятий.

Критерии оценивания ответа на теоретический вопрос

"Отлично" выставляется студенту, который демонстрирует при ответе всестороннее, систематическое и глубокое знание учебно-программного материала, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой. Свободно ориентируется в основной и дополнительной литературе, рекомендованной программой, а также показывает усвоение взаимосвязи основных понятий дисциплины и их значений для приобретаемой профессии, проявляет творческие способности в понимании, изложении и использовании учебно-программного материала.

"Хорошо" выставляется студенту, который демонстрирует при ответе хорошее знание учебно-программного материала, успешно выполнил предусмотренные задания, усвоил основную литературу, рекомендованную в программе. Показывает систематический характер знаний по дисциплине и способен к их самостоятельному пополнению и обновлению в ходе дальнейшей учебной работы и профессиональной деятельности.

"Удовлетворительно" выставляется студенту, обнаружившему знание основного учебного материала в объёме, необходимом для дальнейшей учёбы и предстоящей работы по профессии, справляющимся с выполнением заданий, предусмотренных программой, знакомый с основной литературой, рекомендованной программой, допустившим погрешности в ответе, но обладающим необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя.

"Неудовлетворительно" выставляется студенту, обнаружившему пробелы в знаниях основного учебно-программного материала, допустившему принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий, не ознакомившемуся с основной литературой, предусмотренной программой, и не овладевшему базовыми знаниями, предусмотренными по данной дисциплине и определёнными предметными умениями.

II. Задания для самостоятельной работы.

Перечень практических заданий для самостоятельной работы приводится в планах практических занятий.

Критерии оценивания выполнения заданий для самостоятельной работы

Показатель	Количество баллов
1) Приведена краткая форма условия задачи	0,5
2) Выполнен рисунок к условию задачи, на котором обозначены все необходимые параметры задачи	0,5
3) Проведен анализ условия задачи, включающий указание основных явлений, о которых идет речь в задаче, а также законов, положенных в основу решения задачи	1
4) Записаны математические уравнения законов, используемых при решении задачи	1
5) Приведено решение математических уравнений и получен численный ответ на вопрос задачи	1
Итоговая (суммарная) оценка	Max - 5

III. Контрольные работы по дисциплине.

Проведение текущего контроля осуществляется также посредством проведения аудиторной письменной контрольной работы.

Образец контрольной работы

(во всех заданиях значение параметра k равно номеру студента в учебном журнале)

1. Решите уравнение $z^4 - ki^k = 0$ и изобразите его корни на комплексной плоскости.

2. Найдите аналитическую функцию $f(z)$ такую, что $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + k$ и $f(0) = ik$.

3. Найдите круг сходимости степенного ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz-3)^n}{(k+i)^n}$.

4. Вычислите $\int_L \frac{z+1}{(z-1)^k (z+10)} dz$, если $L = \{z : |z| = k\}$.

5. Пользуясь теоремой Руше, найдите число корней уравнения $z^8 - kz^5 + z^2 - 1 = 0$ в области $|z| < k$.

Критерии оценивания контрольной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно реализован каждый метод решения	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация осуществляется посредством проведения экзамена в 6 семестре.

Вопросы для подготовки к экзамену и образцы экзаменационных заданий.

Вопросы к экзамену

1. Плоскость комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа. Тригонометрическая форма записи комплексного числа. Показательная форма записи комплексных чисел.
2. Возведение в степень и извлечение корней из комплексных чисел.
3. Понятие о сфере Римана. Предел последовательности комплексных чисел.
4. Числовые ряды с комплексными членами.
5. Комплекснозначные функции действительного переменного. Кривые и области на комплексной плоскости.
6. Понятие функции комплексной переменной. Примеры.
7. Линейная функция. Ее геометрический смысл.
8. Предел и непрерывность функции комплексной переменной. Функция $w = \arg z$.
9. Понятие производной от функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана.
10. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие конформного отображения.
11. Дробно-линейная функция и ее основные свойства.
12. Показательная функция и ее свойства.
13. Логарифмическая функция и ее свойства.
14. Тригонометрические функции и их свойства.
15. Гармонические функции и их связь с аналитическими функциями комплексного переменного.

12. Понятие интеграла от функции комплексной переменной. Вычисление интеграла от функции комплексной переменной.

13.Интегральная теорема Коши.

14.Понятие первообразной. Формула Ньютона-Лейбница.

15. Интегральная формула Коши.

16. Понятие функционального ряда в комплексной плоскости. Равномерная сходимость функционального ряда.

17. Степенные ряды. Круг сходимости степенного ряда. Свойства степенных рядов.

18. Ряд Тейлора.

19. Разложение аналитической функции в степенной ряд.

20. Разложения основных элементарных функций в степенные ряды.

21. Неравенства Коши для модулей коэффициентов ряда Тейлора и теорема Лиувилля.

22. Нули аналитической функции и теорема единственности.

23. Понятие об аналитическом продолжении функции.

24. Ряд Лорана. Теорема Лорана.

25.Устранимые особые точки функции комплексной переменной.

25. Полюсы функции комплексной переменной.

26. Существенно особые точки функции комплексной переменной. Теорема Сохоцкого-Вейерштрасса.

27. Вычет функции. Теорема о вычетах.

28. Понятие логарифмического вычета. Принцип аргумента.

29. Теорема Руше.

30. Основная теорема алгебры.

31. Приложения теории вычетов к вычислению интегралов.

<u>Образец экзаменационного задания</u>

Вариант k
(в практических заданиях значение параметра k равно номеру варианта)

1. Тригонометрические функции и их свойства.
2. Ряд Лорана. Теорема Лорана.
3. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $z = k - i^k k$.
4. Вычислите интеграл $\oint_L \frac{\cos z}{(z-i)^k} dz$, где $L = \{z : |z-i| = 1\}$.
5. Найдите вычеты функции $f(z) = \frac{z+2}{z^2 - k^2}$ во всех ее изолированных особых точках.

<u>Критерии оценивания ответа на экзамене</u>

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Правильный ответ на вопрос	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25, 0,5 и 0,75 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Список основной литературы

1. *Бугров Я. С.* Высшая математика в 3 т. Том 3. В 2 кн. Книга 2. Ряды. Функции комплексного переменного : учебник для вузов / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — 7-е изд., стер. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 219 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-8645-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/452425.

2. *Далингер В. А.* Комплексный анализ : учебное пособие для вузов / В. А. Далингер, С. Д. Симонженков. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 143 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08399-6. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/472770 .

3. *Привалов И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного : учебник для вузов / И. И. Привалов. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 402 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-14313-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/468294.

7.2. Список дополнительной литературы

4. Болотин И.Б., Расулов К.М. Комплексный анализ. *Практические занятия для студентов направления подготовки* 01.03.02 Прикладная математика и информатика. – Смоленск, Изд-во СмолГУ, 2015.

5. Балк М.Б., Петров В.А., Полухин А.А. Задачник-практикум по теории аналитических функций. М., 1976.

6. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. - М.: Наука, 1984.

7. Каменский Г.А. Лекции по теории функций комплексного переменного, операционному исчислению и теории разностных уравнений. - М.: Высшая школа, 2008. – 156 с.

8. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.

9. Леонтьева Т.А. Лекции по теории функций комплексного переменного. - М.: Научный мир, 2004.

10. Леонтьева Т.А., Панферов В.С., Серов В.С. Задачи по теории функций комплексного переменного с решениями. Изд.2. - М.: Мир, 2005.

11. Маркушевич А.И. Краткий курс аналитических функций.– М.: Мир, 2006.– 424 с.

12. Петрушко И.М., Елисеев А.Г., Качалов В.И. и др.; под ред. И.М. Петрушко. Курс высшей математики. Теория функций комплексной переменной: лекции и практикум .– СПб: Лань, 2010. – 363 с.

13. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. – Смоленск: СмолГУ. – 189 с.

14. Сборник задач по теории аналитических функций / под ред. М.А. Евграфова. - М.: Наука. 1974.

15. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. - М.: Физматлит, 2010.

16. Шабунин М.И., Половинкин Е.С., Карлов М.И. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. - М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2010. - 362 с.

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

- Система дистанционного обучения Смоленского государственного университета http://moodle.smolgu.ru
- Электронно-библиотечная система университета http://biblioteka.smolgu.ru
- Национальный открытый университет http://www.intuit.ru
- Образовательный математический сайт http://exponenta.ru
- Общероссийский математический портал http://www.mathnet.ru

8. Материально-техническое обеспечение

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, оснащенная стандартной учебной мебелью, мультимедиапроектором, ноутбуком, колонками и интерактивной доской.

Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенная стандартной учебной мебелью. Доступна электронная библиотека кафедры математического анализа. Используются портреты великих математиков, необходимые чертёжные инструменты.

Помещение для самостоятельной работы – компьютерный класс с доступом к сети «Интернет» и ЭИОС СмолГУ.

9. Программное обеспечение

Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), лицензия 66975477 от 03.06.2016 (бессрочно).

Обучающимся обеспечен доступ к ЭБС «Юрайт», а также доступ в электронную информационно-образовательную среду университета.