Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»
Проректор по учебно-
методической работе
____________Ю.А. Устименко
«23»июня 2022 г.

Рабочая программа дисциплины
Б1.О.32 Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных

Направление подготовки: **01.03.02 Прикладная математика и информатика**
Направленность (профиль): **Математическое и информационное моделирование**
Форма обучения - очная
Курс – 2
Семестр – 3
Всего зачетных единиц – 4, часов – 144

Форма отчетности: экзамен – 3 семестр

Программу разработал:
доктор физико-математических наук, профессор Расулов К.М.

Одобрена на заседании кафедры
«16» июня 2022 г., протокол № 10

Заведующий кафедрой _____________ К.М. Расулов

Смоленск
2022

1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных» относится к обязательной части (Блок 1) и является обязательной дисциплиной ОП. Она изучается в 3 семестре и выступает основной для изучения таких дисциплин, как «Функциональный анализ», «Комплексный анализ», «Дифференциальные уравнения», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Численные методы», а также необходима для успешного освоения дисциплин профессионального цикла, прохождения вычислительных и производственных практик, предусмотренных ОП.

Для успешного освоения данной дисциплины необходимы компетенции студентов, сформированные при изучении курса «Математический анализ».

Освоения дисциплины преследует следующие цели:

- овладение основными понятиями дифференциального и интегрального исчислений функций нескольких переменных;
- овладение логическими основами курса, необходимыми для решения теоретических и практических задач;
- приобретение навыков использования аппарата дифференциального и интегрального исчислений функций нескольких переменных при решении геометрических и физических задач;
- формирование навыков самостоятельной работы, необходимых для использования знаний при изучении специальных дисциплин и дальнейшей практической деятельности;
- развитие математической интуиции, воспитание математической культуры.

В процессе освоения дисциплины решаются такие задачи, как:

- познавательная – глубокое освоение математических понятий, изучаемых в указанном разделе высшей математики, что совершенно необходимо для изучения всех других дисциплин профессионального цикла;
- воспитательная – привитие и развитие культуры мышления, способности логически верно выстраивать устную и письменную речь, понимать необходимость доказательств, как в математике, так и в реальных жизненных ситуациях при общении с коллегами и при работе в ученическом и производственном коллективах;
- развивающая – усвоение определенного количества информации по данной дисциплине, накопленной человечеством в процессе развития математики; привитие способности понимания значения дифференциального и интегрального исчислений функций нескольких переменных в других разделах математики и возможности применения полученных знаний в своей будущей профессиональной деятельности.

Изучение курса основано на традиционных методах высшей школы, тесной взаимосвязи со смежными курсами, а также на использовании современной учебной, методической литературы, информационных и образовательных технологий.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
ОПК-1. Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	**Знать**: основные законы естественнонаучных дисциплин, базовый аппарат математики, необходимые для осуществления профессиональной деятельности; **Уметь**: применять знания в области естественнонаучных и математических дисциплин для проведения теоретических и экспериментальных исследований в профессиональной деятельности; **Владеть**: методами дифференциального и интегрального исчисления функций нескольких переменных и моделирования, навыками в области естественнонаучного и общеинженерного знания, позволяющими осуществлять исследования в профессиональной деятельности.

ОПК-3. Способен применять и модифицировать математические модели для решения задач в области профессиональной деятельности	**Знать**: базовые методы анализа, модификации и применения математических моделей, современные информационные методы в решении прикладных задач; **Уметь**: применять аппарат математического моделирования для решения прикладных задач; **Владеть:** навыками работы с инструментальными средствами математического моделирования предметной области, прикладных и информационных процессов.

3. Содержание дисциплины

1. Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность. Понятие n-мерного координатного и n-мерного евклидова пространства. Множества точек n-мерного евклидова пространства. Последовательности точек в евклидовом пространстве и их предел. Понятие функции нескольких переменных. Предел функции нескольких переменных. Непрерывность и равномерная непрерывность функции нескольких переменных.

2. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных. Частные производные функции нескольких переменных. Дифференцируемость функции нескольких переменных. Касательная плоскость и нормаль. Дифференцирование сложной функции. Понятие скалярного поля, производная по направлению, градиент. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора для функции нескольких переменных. Понятие неявной функции одной и нескольких переменных. Теоремы о существовании и дифференцируемости неявных функций. Локальный и условный экстремумы функций нескольких переменных. Наибольшее и наименьшее значения функции нескольких переменных в замкнутой ограниченной области.

3. Интегральное исчисление функций нескольких переменных. Определение и существование двойного интеграла, его свойства и методы вычисления. Тройной интеграл: понятие, свойства, вычисление. Геометрические и физические приложения кратных интегралов. Определение криволинейных интегралов первого и второго родов, их существование и сведение к определенным интегралам. Формула Грина. Определения поверхностных интегралов первого и второго родов, их существование и вычисление. Формулы Стокса и Остроградского-Гаусса.

4. Основные операции теории поля. Понятия скалярного и векторного поля. Градиент. Дивергенция и ротор векторного поля.

4. Тематический план

№ п/п	Темы	Всего часов	Формы занятий		
			лекции	практи-ческие занятия	самосто-ятельная работа
1	Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность	24	8	8	8
2	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	30	10	10	10
3	Интегральное исчисление функций нескольких переменных	53	18	16	19
4	Контрольная работа	6		2	4
5	Скалярные и векторные поля. Основные операции теории поля	4			4
Экзамен		27			27
	ИТОГО	144	36	36	45+27

5. Виды учебной деятельности

Занятия лекционного типа

Лекция 1 «Понятие n-мерного координатного и n-мерного евклидова пространства. Последовательности точек в евклидовом пространстве и их предел»: определения n-мерного координатного и n-мерного евклидова пространства; понятие открытого, замкнутого шара и сферы; понятие параллелепипеда; предельные, внутренние, внешние и граничные точки множества; понятие открытого, замкнутого, ограниченного множества; область; понятие последовательности точек в евклидовом пространстве; сходимость последовательности точек и её связь с покоординатной сходимостью.

Лекция 2 «Понятие функции нескольких переменных. График и линии уровня функций двух переменных»: понятие последовательности точек в евклидовом пространстве; сходимость последовательности точек и её связь с покоординатной сходимостью; понятие функции нескольких переменных, её область определения и область значений; график и линии уровня функции двух переменных; понятие сложной функции.

Лекция 3 «Предел и непрерывность функции нескольких переменных»: понятие предела (определения по Коши и по Гейне); его свойства; повторные пределы; понятие непрерывности функций нескольких переменных; непрерывность сложной функции.

Лекция 4 «Основные свойства непрерывных функций. Понятие равномерной непрерывности функций нескольких переменных»: свойства функций, непрерывных в точке; свойства функций, непрерывных в замкнутых ограниченных областях; равномерная непрерывность.

Лекции 5-7 «Частные производные и дифференцируемость функций нескольких переменных»: понятие частных производных; дифференцируемость функций нескольких переменных; их геометрический смысл; применение дифференциала в приближённых вычислениях; дифференцирование сложной функции; понятие скалярного поля, производная по направлению, градиент; частные производные и дифференциалы высших порядков.

Лекция 8 «Формула Тейлора для функций нескольких переменных. Неявное задание функций. Дифференцирование неявной функции»: формула Тейлора для функций нескольких переменных; понятие неявной функции одной и двух переменных; достаточные условия существования и дифференцируемости неявных функций.

Лекция 9. «Экстремумы функций нескольких переменных. Наибольшие и наименьшие значения функций нескольких переменных»: локальные и условные экстремумы функций двух переменных; необходимые и достаточные условия экстремума; наибольшее и наименьшее значения функций нескольких переменных.

Лекции 10-12 «Двойные и тройные интегралы и их приложения»: понятие двойного интеграла и его основные свойства; вычисление двойных интегралов сведением к повторным и формула замены переменных в двойном интеграле; понятие тройных интегралов; геометрические и физические приложения двойных и тройных интегралов.

Лекции 13-15 «Криволинейные интегралы и их приложения»: понятие криволинейных интегралов первого и второго рода; способы вычисления криволинейных интегралов; криволинейный интеграл второго рода по замкнутому контуру и формула Грина; условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования; приложения криволинейных интегралов.

Лекция 16-17 «Поверхностные интегралы и способы их вычисления»: определения поверхностных интегралов первого и второго рода; условия существования и способы вычисления поверхностных интегралов первого и второго рода.

Лекция 18 «Формулы Стокса и Остроградского-Гаусса»: вывод формул Стокса и Остроградского-Гаусса; примеры их применения.

Занятия семинарского типа (практические занятия)

Практическое занятие №1. «Понятие *n*-мерного евклидова пространства. Открытые и замкнутые множества. Предел последовательности точек»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Дайте определения: а) n-мерного координатного пространства; б) n-мерного евклидова пространства.
2. Что представляет собой граница: а) n-мерного открытого шара $K(M_0; r)$;

б) n-мерной сферы $S(M_0, r)$?

3. Дайте определение предельной точки множества E в $\boldsymbol{R}^2$. Докажите, что любая внутренняя точка множества E является предельной точкой этого множества.
4. Может ли граничная точка множества $E \subset \boldsymbol{R}^2$ не быть предельной точкой этого множества ?
5. Дайте определение непрерывной кривой в $\boldsymbol{R}^2$.
6. Какое подмножество точек пространства $\boldsymbol{R}^2$ называют областью (замкнутой областью)?
7. Дайте определение предела последовательности точек $M_n(x_n, y_n)$ из $\boldsymbol{R}^2$.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

1.1. Пусть даны две конечные последовательности положительных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ и $b_1, b_2, ..., b_n$. Докажите, что справедливо следующее неравенство Коши-Буняковского: $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$.

1.2. Докажите, что для любых точек M_1, M_2, M_3 пространства $\boldsymbol{R}^{\text{n}}$ справедливо неравенство треугольника: $\rho(M_1, M_2) \le \rho(M_1, M_3) + \rho(M_3, M_2)$.

1.3. Докажите, что сфера $S(M_0, r)$ является замкнутым множеством.

1.4. Докажите, что если $M_0(x_0, y_0)$ – предельная точка множества $E \subset \boldsymbol{R}^2_{xy}$, то существует последовательность $\{M_n(x_n, y_n)\}$, сходящаяся к $M_0(x_0, y_0)$, каждая точка которой принадлежит множеству E и $M_n(x_n, y_n) \ne M_0(x_0, y_0)$ для всех $n \in \boldsymbol{N}$.

1.5. Докажите, что если последовательность $\{M_n\}$ граничных точек множества $E \subset \boldsymbol{R}^2$ сходится к точке M_0, то M_0 – также граничная точка множества E.

1.6. Будет ли множество $\Omega = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2_{xy} \,|\, x^2 + y^2 \le 1 \wedge x \notin [0, 1]\}$ открытой областью (замкнутой областью)?

1.7. Найдите предел последовательности точек $\left\{M_n\left(tg\frac{1}{n},\ (1+\frac{1}{n})^n\right)\right\}$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1.8. Докажите, что если все точки последовательности $\{M_n\}$ принадлежат замкнутому множеству $E \subset \boldsymbol{R}^2$ и $M_n \to M_0$ при $n \to \infty$, то $M_0 \in E$.

1.9. Докажите утверждение: для того, чтобы множество E было замкнутым, необходимо и достаточно, чтобы оно содержало все свои граничные точки.

1.10. Будет ли множество точек $M(x, y)$ из $\boldsymbol{R}^2_{xy}$ таких, что $\cos(x^2 + y^2) \ge 0$, областью (связным множеством)?

1.11. Найдите предел последовательности точек $\left\{M_n\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}, \frac{n+1}{5n}\right)\right\}$.

1.12. Докажите, что последовательность точек $\{Q_n(\cos n, 5)\}$ не имеет предела.

Практическое занятие №2. «Понятие функции нескольких переменных. График и линии уровня функции двух переменных»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Дайте определение функции n действительных переменных. Что называется: а) областью определения функции; б) множеством значений функций; в) естественной областью определения функции, заданной аналитическим выражением?
2. Когда функция считается заданной?
3. Какими способами можно задавать функцию нескольких переменных?
4. Что называется графиком функции двух переменных $Z = f(x, y)$?
5. Дайте определение линии уровня функции $Z = f(x, y)$.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

Найдите естественную область определения функции, заданной аналитически, сделайте соответствующий чертеж в каждом из заданий 2.1- 2.4:

2.1. $Z = \dfrac{1}{x+y}$; 2.2. $Z = \sqrt{1 - \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4}}$; 2.3. $Z = \sqrt{-x} + \sqrt{y}$;

2.4. $U = \arcsin\dfrac{x}{a} + \arcsin\dfrac{y}{b} + \arcsin\dfrac{z}{c}$.

2.5. Подберите аналитическое выражение, областью определения которого было бы следующее множество: плоскость $\boldsymbol{R}^2_{xy}$ без окружности $\Gamma = \left\{(x, y) \in R^2 \middle| \ x^2 + y^2 = 25 \right\}$.

2.6. Выразите объем конуса как функцию его высоты и образующей. Найдите область определения этой функции.

2.7. Опишите поверхности, являющиеся графиками заданных функций:
$a)$ $Z = x + y - 1$; $b)$ $Z = xy$.

2.8. Найдите семейство линий уровня (с шагом $h = 1$ масш. ед.) для каждой из заданных функций и начертите их графики: $a)$ $Z = x + y$; $б)$ $Z = \dfrac{1}{2x^2 + 3y^2}$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

2.9. Найдите область определения функций, сделайте соответствующие чертежи в заданиях: a) $Z = \dfrac{x}{y}$; b) $Z = \arccos\dfrac{x^2 + y^2}{9}$.

2.10. Подберите аналитическое выражение, областью определения которого было бы следующее множество: $D = \left\{(x, y) \in R^2 \middle| x^2 + y^2 \le 100 , \quad x > 0 \right\}$.

2.11. Выразите объем прямоугольного параллелепипеда, вписанного в шар радиуса R, как функцию двух его измерений x и y. Найдите область определения этой функции.

2.12. Объясните, какой поверхностью является график функции $Z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

2.13. Найдите семейство линий уровня (с шагом $h = 1$ масш. ед.) для каждой из заданных функций и начертите их графики: $a)$ $Z = 2x + y$; $б)$ $Z = \sqrt{x / y}$.

Практическое занятие №3. «Предел и непрерывность функции нескольких переменных»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Сформулируйте определения предела функции $Z = f(M)$ в точке M_0 на языке "ε-δ" и на языке "последовательностей". Что означает эквивалентность этих определений ?
2. Может ли быть так, что $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = b,$ $\lim\limits_{M \to M_0} g(M) = c,$ где b и c – числа, но равенство $\lim\limits_{M \to M_0}\left[f(M) + g(M)\right] = b + c$ либо не выполняется, либо утрачивает смысл ?

3. Дайте определение предела функции $Z = f(M)$ при $M \to \infty$. Приведите пример непостоянной функции $f(M)$, у которой $\lim\limits_{M\to\infty} f(M) = 1$.

4. Дайте определение непрерывности функции $Z = f(M)$ в точке M_0.

5. Что такое полное приращение функции $Z = f(M)$ в точке M_0?

Как записать условие непрерывности функции в точке M_0, используя ее приращение в этой точке ?

6. Дайте определение непрерывности функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по переменной x (по переменной y).

7. Какие точки называются точками разрыва функции $Z = f(M)$? Приведите примеры точек разрыва функций двух переменных и трех переменных.

8. Сформулируйте теоремы об арифметических действиях над непрерывными функциями.

9. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

3.1. Вычислите $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} f(x, y)$, где $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{\sqrt{1+x^2 y} - 1}, & \text{если } x^2 y \neq 0, \\ 2, & \text{если } x^2 y = 0. \end{cases}$

3.2. Вычислите $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sin(x^4 y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$. 3.3. Вычислите $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{e^{-\frac{1}{x^4+y^4}}}{x^4 + y^4}$.

3.4. Вычислите $\lim\limits_{\substack{x\to \infty\\ y\to \infty}} \dfrac{(x+y)^2}{(x^2 + y^4)^2}$.

3.5. Вычислите $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}} f(x, y)$, где $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2xy - 3y^2}{x^3 - y^3}, & \text{если } x \neq y, \\ \dfrac{4}{3}, & \text{если } x = y. \end{cases}$

3.6. Исследуйте функцию на непрерывность и определите ее точки разрыва:

$a)$ $Z = \dfrac{x-y}{x+y}$; $b)$ $Z = \ln(9 - x^2 - y^2)$; $c)$ $W = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - z^2}$.

3.7. Следующую функцию Z доопределите в точках, где она не определена, так, чтобы новая функция оказалась непрерывной в этих точках, если

$Z = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$.

3.8. Докажите, что если функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$, то она непрерывна в этой точке и по каждой из переменных x, y в отдельности.

3.9. Исследуйте функцию $h(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } xy \neq 0, \\ 1, & \text{если } xy = 0, \end{cases}$ на непрерывность по отдельным переменным и по совокупности переменных в точках $O(0,0)$ и $A(1,1)$. Постройте график данной функции.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

3.10. Вычислите $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\sqrt{1+x^2y^2}-1}{x^2+y^2}$.

3.11. Вычислите $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(x^2+y^2)x^2y^2}{1-\cos(x^2+y^2)}$.

3.12. Вычислите $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \left(\left(x^2+y^2\right) \sin\dfrac{1}{x^2+y^2} \right)$.

3.13. Докажите, что функция $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^4+y^2}, \text{ если } (x;y)\neq(0;0), \\ 0, \text{ если } (x;y)=(0;0), \end{cases}$

не имеет предела в точке $O(0,0)$.

3.14. Исследуйте функцию на непрерывность и определите ее точки разрыва:

$a)$ $Z=\dfrac{2x-3}{x^2+y^2-4}$; $b)$ $W=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2-16}$.

3.15. Следующую функцию доопределите в точках, где она не определена, так, чтобы новая функция оказалась непрерывной в этих точках:

$Z=\dfrac{x^4+y^4+x^3y^3}{x^4+y^4}$.

3.16. Исследуйте функцию $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2xy}, & \text{если } xy\neq 0, \\ 1, & \text{если } xy=0, \end{cases}$

на непрерывность по отдельным переменным и по совокупности переменных в точках $O(0,0)$ и $A(1,0)$.

3.17. Исследуйте функцию $g(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4}, & \text{если } x^4+y^4\neq 0, \\ 0, & \text{если } x^4+y^4=0, \end{cases}$

на непрерывность по отдельным переменным и по совокупности переменных в точках $O(0,0)$ и $B(1,2)$.

Практическое занятие №4. «Основные свойства непрерывных функций. Понятие равномерной непрерывности функций нескольких переменных»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Сформулируйте свойство о сохранении знака непрерывной функции.

2. Дайте определение непрерывной на данном множестве D функции. Является ли функция $U(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\sin(x+y)}{x+y}, & \text{если } x+y\neq 0, \\ 1, & \text{если } x+y=0, \end{cases}$

   непрерывной на всей плоскости $\boldsymbol{R}^2_{xy}$?

3. Сформулируйте свойство о промежуточном значении непрерывной функции.

4. Дайте определение ограниченной на данном множестве D функции.

Является ли функция $V(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(x+y)}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0,\end{cases}$ ограниченной в круге $K=\left\{(x,y)\in R^2 \middle| x^2+y^2\leq 1\right\}$?

5. Сформулируйте определение неограниченной на данном множестве D функции. Приведите пример функции двух переменных, неограниченной в круге $K=\left\{(x,y)\in R^2 \middle| x^2+y^2\leq 1\right\}$.

6. Дайте определение равномерной непрерывности функции $Z=f(x,y)$ на множестве $E\subset \boldsymbol{R}^2_{xy}$. Является ли функция $U=x^2+y^2$ равномерно непрерывной на $\boldsymbol{R}^2_{xy}$?

7. Сформулируйте основные свойства функций, непрерывных на замкнутых и ограниченных множествах.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

4.1. Докажите ограниченность функции $f(x,y)=\dfrac{x^6+y^6}{x^2+y^2}$ на множестве $\Omega=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2_{xy} \,|\, 0<x^2+y^2\leq 9\}$. Найдите $\sup\limits_{\Omega}\{f(x,y)\}$ и $\inf\limits_{\Omega}\{f(x,y)\}$.

Установите, достигает ли функция своих точных граней?

4.2. Верно ли утверждение: «В некоторой ε-окрестности $K(M_0,\varepsilon)$ точки $M_0\left(\dfrac{\pi}{3},-\dfrac{\pi}{3}\right)$ функция $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin x+\sin y}{x+y}, & \text{если } x+y\neq 0,\\ \dfrac{1}{2}, & \text{если } x+y=0,\end{cases}$ принимает лишь положительные значения». Ответ обоснуйте.

4.3. Верно, ли что функция $g(x,y)=\sin(\dfrac{\pi}{2}-x^2-y^2)$ в некоторой окрестности точки $O(0,0)$ принимает только положительные значения ?

4.4. Функция двух переменных $f(x,y)=x^2+y^2$ задана на множестве $T=\left\{(x,y)\in R^2 \middle| 1\leq x<4,\ 2\leq y<6\right\}$. Достигает ли она наименьшего и наиболь шего значений на этом множестве ?

4.5. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $Z=\left(x^2+y^2\right)e^{xy}$ на множестве $Q=\{(x,y)\in R^2 \,|\, 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$. Принимает ли она значение, равное $e\sqrt{e}$?

4.6. Является ли функция $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ равномерно непрерывной в ее естественной области определения ?

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

4.7. Докажите ограниченность функции $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ на множестве $\Omega=\boldsymbol{R}^2_{xy}\setminus\{O(0,0)\}$. Найдите $\sup\limits_{\Omega}\{f(x,y)\}$ и $\inf\limits_{\Omega}\{f(x,y)\}$. Установите, достигает ли функция своих точных граней?

4.8. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $U=\sqrt{16-x^2-y^2-z^2}$. Принимает ли она значение, равное 3 ?

4.9. Непрерывна ли функция $Z=\begin{cases}0, \text{ если } x\neq y,\\ x, \text{ если } x=y,\end{cases}$ в точке $O(0,0)$? В каких точках она разрывна?

4.10. Функция $f(x,y)$ непрерывна на всей плоскости. Будет ли она равномерно непрерывна на всей плоскости ?

4.11. Верно ли, что функция $g(x,y)=\cos(\pi-x^2-y^2)$ в некоторой окрестности точки $O(0,0)$ принимает только отрицательные значения ?

4.12. Пользуясь определением равномерной непрерывности, докажите равномерную непрерывность функции $U(x,y)=x^2+y^2$ в круге $\overline{K}=\{(x,y)\in \boldsymbol{R}^2_{xy}\,\big|\,x^2+y^2\leq 1\}$.

Практическое занятие №5. «Частные производные и дифференцируемость функций нескольких переменных»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Дайте определение частной производной функции $V=f(x_1,...,x_n)$ по аргументу x_n во внутренней точке области определения функции. Каков физический смысл частной производной?
2. Пользуясь определением, найдите $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$, если $U=xy^2$.
3. Дайте определение дифференцируемости функции $Z=f(x,y)$ в данной точке $M_0(x_0,y_0)$.
4. Приведите конкретный пример, показывающий, что непрерывная в данной точке $M_1(x_1,y_1)$ функция $Z=f(x,y)$ не обязательно является дифференцируемой в этой точке.
5. Что называется дифференциалом функции $Z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$? От каких аргументов он зависит ?
6. В чем состоит геометрический смысл дифференциала?
7. Напишите уравнение касательной плоскости к графику функции $Z=f(x,y)$ в точке $P_0(x_0,y_0,Z_0)$.
8. Сформулируйте необходимые условия дифференцируемости функции $Z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

5.1. Найдите все частные производные и полные дифференциалы первого порядка от заданных ниже функций:

$$a)\ Z=x^2y-xy^2+3;\ b)\ Z=(x^2+y^2)^3;\ c)\ Z=\frac{x}{y}e^{xy};\ d)\ Z=\rho\cos\varphi.$$

5.2. Покажите, что функция $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{если } x^2+y^2\neq 0;\\ 0, \qquad \text{если } x=0,\ y=0,\end{cases}$

непрерывна в точке $O(0,0)$ и имеет в этой точке обе частные производные $f'_x(0,0)$, $f'_y(0,0)$, однако не является в ней дифференцируемой.

5.3. Докажите, что если $\frac{\partial f}{\partial y}\equiv 0$ в некоторой области $D\subset R^2$, то функция $f(x,y)$ не зависит от y (т.е. $f(x,y_1)=f(x,y_2)$ для всех точек $M(x,y_1)$ и $N(x,y_2)$ из области

D). Докажите, что если $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$ в области $D \subset R^2$, то функция $f(x, y)$ постоянна в этой области.

5.4. Составьте уравнение касательной плоскости к графику функции $Z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ в точке $P_0(0, 0, 1)$.

5.5. Составьте уравнение касательной плоскости к графику функции $Z = x + y^2$ в точке $P_0(0, 1, 1)$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

5.6. Найдите все частные производные и полные дифференциалы первого порядка от следующих функций:

$a)$ $Z = xy - \frac{y}{x}$; $b)$ $H = \ln(x^2 + y)$; $c)$ $U = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

5.7. Докажите, что функция $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, \quad \text{если } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$

непрерывна в точке $O(0, 0)$ и имеет в этой точке обе частные производные $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$, однако не является в ней дифференцируемой.

5.8. Найдите значение $\frac{\partial f}{\partial y}$ в точке $M(1, 2)$, если

$f(x, y) = x^{x^y} + (\ln x) \cdot \{\mathrm{arctg}^4[\mathrm{arctg}(\sin xy)] - \ln^3(x + y)\}$.

5.9. Составьте уравнение касательной плоскости к графику функции $Z = x^2 + y^2$ в точке $Q_0(1,\ 2,\ 5)$.

Практическое занятие №6. «Достаточные условия дифференцируемости функций нескольких переменных. Применение дифференциала к приближенным вычислениям»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Сформулируйте теоремы о необходимом условии дифференцируемости функции $Z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
2. Сформулируйте и докажите теорему о достаточном условии дифференцируемости функции $Z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
3. Докажите, что любой многочлен $P(x, y)$ от двух переменных x и y является дифференцируемой функцией на $\boldsymbol{R}^2_{xy}$.
4. Дана функция $U(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } xy = 0, \\ 1, \text{ если } xy \neq 0. \end{cases}$

Является ли эта функция дифференцируемой в точке $O(0; 0)$?

5. Какая формула позволяет применить дифференциал функции к приближенным вычислениям?

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

6.1. Покажите, что функция $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, \quad \text{если } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$

имеет частные производные $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ в некоторой окрестности точки $O(0,0)$ и дифференцируема в самой точке $O(0,0)$, но указанные частные производные не являются непрерывными в точке $O(0,0)$.

6.2. Докажите, что функция $Z = x^y y^x$ удовлетворяет соотношению
$$x\frac{\partial Z}{\partial x} + y\frac{\partial Z}{\partial y} = (x + y + \ln Z)\cdot Z.$$

6.3. Объем усеченного конуса $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$ (h – высота, R и r – радиусы оснований) меняется с изменением радиуса R. Определите (приближенно !) возникающее при этом изменение объема $V(R)$:
a) в общем виде; *b*) при R = 10 *см* , r = 4 *см,* h = 5 *см* , ΔR = 0,1 *см.*

6.4. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислите: а) $\sin 59^0 tg 46^0$; b) $2{,}003^2 \cdot 3{,}998^3 \cdot 1{,}002^2$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

6.5. Докажите, что функция
$$Z = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, \ \textit{если}\ x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, \quad \textit{если}\ x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$
имеет в точке $O(0,0)$ обе частные производные, но не дифференцируема в этой точке.

6.6. Докажите, что функция $Z = \dfrac{x-y}{z-t} + \dfrac{t-x}{y-z}$ удовлетворяет соотношению
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0 .$$

6.7. Найдите скорость изменения значений функции $Z = x^3 + y^2$ в точке $M(1;1)$ в зависимости от изменения каждой из переменных x и y.

6.8. В треугольнике измерены стороны a = (31,4 $\pm$0,15) *см* , b = (26,2$\pm$0,1) *см,* c = (42,3$\pm$0,3) *см.* Найдите углы и площадь треугольника и оцените абсо лютную погрешность найденных величин.

6.9. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислите $\sqrt{1{,}98^2 + 1{,}01^2}$.

Практическое занятие №7. «Дифференцирование сложной функции. Частные производные и дифференциалы высших порядков»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Сформулируйте теоремы о дифференцируемости сложных функций двух переменных и напишите формулу для вычисления частных производных сложной функции.
2. Что понимается под инвариантностью формы первого дифференциала ?
3. Дайте определение производной от функции $f(M)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ по направлению *l*.
4. Как можно вычислить $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l}$, если известно, что данная функция дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$?
5. Что называется градиентом функции $Z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$?
6. Чему равно максимальное значение $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial l}$?

7. Дайте определение частной производной второго порядка функции $Z = f(x, y)$ по аргументам x и y в точке $M(x, y)$.
8. Сформулируйте теоремы о равенстве смешанных частных производных второго порядка функции $Z = f(x, y)$. Пользуясь этими теоремами, обоснуйте равенство смешанных частных производных второго порядка функции $U = [\sin(x+y)]^{\cos xy}$ в любой точке $M(x, y)$, в которой $\sin(x+y) > 0$ (не вычисляя самих производных).
9. Дайте определение n-кратной дифференцируемости функции $U = f(x_1, ..., x_n)$ в данной точке.
10. Дайте определение дифференциала второго порядка функции $Z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
11. Напишите операторную (символическую) формулу для дифференциала второго порядка функции $Z = f(x, y)$.
12. Напишите формулу для вычисления дифференциала $n-го$ порядка функции $Z = f(x, y)$.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

7.1. $Z = x^2 + xy + y^2$, где $x = \sin t$, $y = \cos t$. Найдите $\frac{dZ}{dt}$ и dZ.

7.2. $Z = x^2 y - xy^2$, где $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Найдите $\frac{\partial Z}{\partial \rho}$, $\frac{\partial Z}{\partial \varphi}$ и dZ.

7.3. Найдите полный дифференциал функции $Z = xy \cdot arctg\,(xy)$, где $x = t^2 + 1$, $y = t^3$, пользуясь свойством инвариантности его формы.

7.4. Найдите производную функции $g(x, y) = 5xy^3 - x^2$ в точке $M_0(1,1)$ по направлению вектора $\vec{b} = 3\vec{i} + 15\vec{j}$.

7.5. Найдите все частные производные и полные дифференциалы первого и второго порядков от заданной функции $Z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$.

7.6. Проверьте, что для функции $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy\,(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = y = 0, \end{cases}$

имеем $f''_{xy}(0;0) \neq f''_{yx}(0;0)$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

7.7. $Z = \cos(2x + 4x^2 - y)$, где $x = \frac{1}{t}, y = \frac{\sqrt{t}}{\ln t}$. Найдите $\frac{dZ}{dt}$ и dZ.

7.8. $Z = e^{xy}\ln(x + y)$, где $x = t^3$, $y = 1 - t^3$. Найдите $\frac{dZ}{dt}$ и dZ.

7.9. Найдите полный дифференциал функции $Z = x^y + y^x$, где $x = U^2 + V^2$, $y = U^2 - V^2$, пользуясь свойством инвариантности его формы.

7.10. Найдите производную функции $h(x, y) = 3xy^4 - x^2 y$ в точке $M_0(1, -1)$ по направлению вектора $\vec{b} = 5\vec{i} + 11\vec{j}$.

7.11. Найдите все частные производные и полные дифференциалы первого и второго порядков от заданной функции $Z = \ln tg\,\frac{y}{x}$.

7.12. $f(x, y) = y\sqrt[3]{x}$. Найдите $f'_x(1;1)$, $f'_y(1;1)$, $f''_{xx}(1;1)$, $df(1;\,1)$.

Практическое занятие №8. «Формула Тейлора для функции двух переменных. Понятие неявной функции. Дифференцирование неявных функций»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Сформулируйте теорему о формуле Тейлора и запишите эту формулу для функции $Z = f(x, y)$ с центром разложения в точке $M_0(x_0, y_0)$.
2. Какой многочлен называется *многочленом Тейлора* n *-й степени для функции* $f(x, y)$ *в окрестности точки* $M_0(x_0, y_0)$?
3. Каково основное назначение формулы Тейлора для функции $f(x, y)$ в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$?
4. Какая функция называется неявной ? Приведите пример уравнения вида $F(x, y) = 0$, определяющего неявную функцию, и пример уравнения такого же вида, не определяющего функции.
5. Сформулируйте теорему о существовании дифференцируемой неявной функции, определяемой уравнением $F(x, y) = 0$ (и уравнением $F(x, y, z) = 0$).
6. Вычислите производные $f'(0)$ и $f''(0)$ неявной функции $y = f(x)$, определяемой уравнением $x^2 + y^2 - 1 = 0$ и удовлетворяющей условию $f(0) = 1$, в предположении ее дифференцируемости в некоторой окрестности точки $x = 0$.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

8.1. Разложите функцию $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$ по формуле Тейлора с центром разложения в точке $M_0(0,1)$ до членов второго порядка включительно.

8.2. Из уравнения $y^4 - 4x^2y^2 + \sin x = 0$ выразите y как функцию от x.

8.3. Определяет ли уравнение $F(x, y) = 0$ неявную функцию $y = f(x)$ в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, если:
$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$, $x_0 = a\sqrt[3]{4}$, $y_0 = a\sqrt[3]{2}$, $a > 0$?

8.4. Найдите первые и вторые производные неявной функции вида $y = f(x)$, заданной уравнением $xe^{2y} - y\ln x - 8 = 0$.

8.5. Найдите частные производные и полный дифференциал неявной функций $z(x, y)$, заданной уравнением $z^3 + 3x^2z = 2xy$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

8.6. Напишите формулу Тейлора для $Z = x^2 \ln y$ в окрестности точки $M_0(1,1)$ при $n = 2$.

8.7. Из уравнения $e^{x^2+y^3} - x^6 - 5 = 0$ выразите y как функцию от x.

8.8. Определяет ли уравнение $F(x, y) = 0$ неявную функцию $y = f(x)$ в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, если : $F(x, y) = x(x^2 + y^2) - a(x^2 - y^2)$, $x_0 = y_0 = 0$, $a > 0$.

8.9. Найдите первые и вторые производные неявной функции вида $y = f(x)$, заданной уравнением $e^y + ax^2e^{-y} - 2bx = 0$, где $a = const > 0$ и $b = const > 0$.

8.10. Найдите частные производные и полный дифференциал неявной функции $z(x, y)$, заданной уравнением $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0$.

Практическое занятие №9. «Экстремумы функций нескольких переменных. Наибольшие и наименьшие значения функции»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Дайте определение локального максимума (минимума) функции $Z = f(M)$.

2. Сформулируйте и докажите теорему о необходимом условии экстремума функции $Z = f(M)$. Приведите пример функции $Z = f(M)$, удовлетворяющей в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$ условиям $Z'_x(M_0) = 0$ и $Z'_y(M_0) = 0$, но не имеющей в $M_0(x_0, y_0)$ локального экстремума.
3. Какие точки называются критическими точками функции $Z = f(x, y)$? Приведите пример функции $Z = f(x, y)$, имеющей в некоторой точке $M_0(x_0, y_0)$ локальный экстремум и такой, что $Z'_x(M_0) = 0$, а Z'_y в точке M_0 не существует.
4. Сформулируйте достаточные условия максимума (минимума) и достаточные условия отсутствия экстремума функции $Z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.
5. Дайте определение условного максимума (минимума) функции $Z = f(x, y)$ при условии связи $\varphi(x, y) = 0$.
6. В чем состоит суть метода неопределенных множителей Лагранжа при отыскании точек (локального) условного экстремума функций?
7. Сформулируйте правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $Z = f(x, y)$ в замкнутой ограниченной области $D \subset \boldsymbol{R}^2$.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

9.1. Исследуйте на экстремум заданные функции двух переменных:

a) $Z = xy(1 - x - y)$; b) $Z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$, где $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$, $0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}$.

9.2. Исследуйте функцию $Z = xy$ на условный экстремум при условии связи $x^2 + y^2 = 1$.

9.3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $Z(x, y)$, заданной в указанной области:

a) $Z = x - 2y - 3$ в области $D = \{(x, y) \in R^2 \,|\, 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le x + y \le 1\}$;

b) $Z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ в круге $x^2 + y^2 \le 1$.

9.4. Найдите наименьшее расстояние между параболой $y = x^2$ и прямой $x - y - 2 = 0$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

9.5. Исследуйте на экстремум заданные функции двух переменных:

a) $Z = 3x^2 y - x^3 - y^4$; b) $Z = xy\ln(x^2 + y^2)$.

9.6. Исследуйте функцию $Z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ на условный экстремум, если x и y связаны следующей зависимостью: $x + y = 2a$, где $a > 0$.

9.7. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $Z = x^2 + 3y^2 - x + 18y - 4$, заданной на множестве $D = \left\{(x, y) \in R^2 \,\middle|\, 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\right\}$.

9.8. В данный прямой круговой конус вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

Практическое занятие №10. «Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Определение и основные свойства двойного интеграла»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Дайте определение квадрируемой плоской фигуры.
2. Что такое интегральная сумма для $Z = f(x, y)$ в области D?
3. Что называется диаметром ограниченного множества точек из $\boldsymbol{R}^2$? Чему равен диаметр квадрата со стороной 1?
4. Дайте определение предела интегральных сумм и определение двойного интеграла.

5. Докажите, что если функция $Z = f(x, y)$ не ограничена в области D, то она не интегрируема в этой области. В чем состоит геометрический смысл двойного интеграла ?
6. Сформулируйте необходимые и достаточные условия интегрируемости функции в замкнутой ограниченной квадрируемой области.
7. Сформулируйте основные свойства двойного интеграла.
8. Каково правило вычисления двойного интеграла сведением к повторным?
9. Сведите двойной интеграл $\iint\limits_G f(x, y)dxdy$ к повторному двумя способами, если $G = \{(x, y) \in R^2 \big| (x-1)^2 + (y-2)^2 \le 25\}$.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

10.1. Запишите двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по указанной области G в виде повторных интегралов двумя способами, если область G находится в первой четверти и ограничена линиями $x = 0$, $y = 0$, $x^2 + y^2 = r^2$.

10.2. Переменните порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x, y)\ dy$.

10.3. При неаккуратном стирании с доски на ней осталось от решенной задачи только $\int\limits_0^1 \int\limits_{2x}^{3x}$. По какой переменной вычислялся внутренний интеграл ? Восстановите область интегрирования G.

10.4. Вычислите данные повторные и двойные интегралы:

a) $\int\limits_3^4 dx \int\limits_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$; b) $\iint\limits_G e^{\frac{x}{y}} dxdy$, где область G ограничена линиями $x = y^2$, $x = 0$, $y = 1$; c) $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{a\sin\varphi}^{a} rdr$.

10.5. Найдите среднее значение функции $f(x, y) = \sin^2 x \cdot \sin^2 y$ в квадрате $D = \{(x, y) \in \boldsymbol{R}^2 \big| \ 0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \pi\ \}$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

10.6. Запишите двойной интеграл от $f(x, y)$ по указанной области G в виде повторных интегралов двумя способами, если область G ограничена линиями $y = x^3$, $x + y = 10$, $x - y = 4$, $y = 0$.

10.7. Переменните порядок интегрирования в повторном интеграле $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x, y)dx$.

10.8. После стирания с доски осталась нестертой часть прежней записи: $\int\limits_{-y}^{\sqrt{y}}$. Какой это интеграл: внутренний или внешний ? По какой переменной он берется ? Что можно сказать об области интегрирования G ?

10.9. Вычислите повторные и двойные интегралы:

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2} dy$;

b) $\iint\limits_G \cos(x + y)dxdy$, где область G ограничена прямыми $x = 0$, $y = \pi$, $y = x$.

Практическое занятие №11. «Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Какой определитель называется определителем Якоби функций $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$?

2. Изобразите на плоскости OXY образ прямоугольника

$\Pi = \{(\varphi, \rho) | \, 0 \le \rho \le 1, \;\; 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ при отображении $\begin{cases} x = \rho \cos\varphi, \\ y = \rho \sin\varphi. \end{cases}$

Является ли это отображение взаимно однозначным?

3. Сформулируйте теорему о замене переменных в двойном интеграле.

4. Какова формула преобразования двойного интеграла с помощью полярных координат?

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

11.1. Перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования:

a) $\iint\limits_G f(x, y)dxdy$, где область G является общей частью двух кругов $x^2 + y^2 \le ax$ и $x^2 + y^2 \le by$;

b) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x f(\sqrt{x^2 + y^2})dy$.

11.2. Произведите замену переменных $u = x + y$, $v = x - y$ в повторном интеграле $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x, y)dy$ и расставьте пределы интегрирования.

11.3. Вычислите $\iint\limits_G ydxdy$с помощью перехода к полярным координатам, если G – ерхний полукруг радиуса a с центром в точке (a; 0).

11.4. Вычислите $\iint\limits_G dxdy$с помощью замены переменных $u = xy$, $v = \dfrac{y^2}{x}$, если область G ограничена параболами $y^2 = 2x$, $y^2 = 3x$ и гиперболами $xy = 1$, $xy = 2$.

11.5. Найдите площадь плоской фигуры, ограниченной эллипсом $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

11.6. Преобразуйте интегралы, перейдя к полярным координатам и расставив пределы интегрирования:

a) $\iint\limits_G f(x, y)dxdy$, где область G – круг $x^2 + y^2 \le ax$; b) $\int\limits_0^R dx \int\limits_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} f(x, y)dy$.

11.7. Вычислите $\iint\limits_G (x^2 + y^2)dxdy$с помощью перехода к полярным координатам, где G – круг $x^2 + (y+2)^2 \le 4$.

11.8. Вычислите $\iint\limits_G (x^2 + y^2)dxdy$, где G – область, ограниченная окружностями $x^2 + y^2 + 2x - 1 = 0$ и $x^2 + y^2 + 2x = 0$, с помощью следующей замены переменных: $x + 1 = \rho \, \cos\varphi, \; y = \rho \sin\varphi.$

11.9. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми $xy = 4$, $x + y - 5 = 0$.

Практическое занятие №12. «Геометрические и механические приложения двойного интеграла. Понятие о тройном интеграле»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Какие геометрические и механические приложения двойного интеграла Вы знаете?
2. Что называется телом в $\boldsymbol{R}^3$?
3. Какая область в $\boldsymbol{R}^3$ называется кубируемой ?
4. Дайте определение тройного интеграла от функции $U = f(x, y, z)$ по области $D \subset \boldsymbol{R}^3$.
5. В чем состоит способ вычисления $\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dx\;dy\;dz$?

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

12.1. Преобразуйте, расставив пределы интегрирования в соответствии со следующей последовательностью интегрирования: 1) *x, y, z*; 2) *y, x, z*; 3) *z, x, y*, интегралы:

a) $\iiint\limits_D f(x, y, z)\,dxdydz$, где область *D* ограничена поверхностью $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

b) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} f(x, y, z)dz$.

12.2. Замените тройной интеграл $\int\limits_0^x dt\int\limits_0^t du\int\limits_0^u f(v)dv$ однократным, изменив порядок интегрирования.

12.3. Вычислите следующие тройные интегралы в указанных областях:

a) $\iiint\limits_D (x + y + z)dxdydz$, область *D* задана неравенствами $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$, $0 \le z \le c$;

b) $\iiint\limits_D xy^2z^3dxdydz$, где *D* ограничена поверхностями $Z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$.

12.4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболами $y^2 = 4 - x$ и $2y^2 = x + 8$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

12.5. Преобразуйте, расставив пределы интегрирования в соответствии со следующей последовательностью интегрирования: 1) *x, y, z* ; 2) *y, x, z* ; 3) *z, x, y*, интегралы:

a) $\iiint\limits_D f(x, y, z)\,dxdydz$, где область *D* находится в первой четверти и ограничена поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, $z = 1$.

b) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{x^2+y^2} f(x, y, z)dz$.

12.6. Вычислите данные тройные интегралы в указанных областях:

a) $\iiint\limits_D \rho\sin\theta\;\; d\rho\;\; d\varphi\, d\theta$, если область *D* задана неравенствами

$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le \rho \le 2$, $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$;

b) $\iiint\limits_D x\;dx\;dy\;dz$, если *D* ограничена плоскостями $x= 0$, $y=0$, $z = 0$, $y = h$, $x + y =a$.

12.7. Вычислите объем цилиндрических клиньев, вырезаемых из цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ плоскостями $z = y$ и $z = 2y$.

Практическое занятие №13. «Криволинейный интеграл по координатам (второго рода). Формула Грина»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Какая кривая называется спрямляемой?
2. Что называется интегральными суммами для криволинейного интеграла по координатам?
3. Зависит ли криволинейный интеграл второго рода от направления обхода кривой?
4. Сформулируйте основные свойства криволинейного интеграла второго рода.
5. Сформулируйте теорему о существовании криволинейного интеграла второго рода и сведении его к определенному интегралу.
6. Дайте определение односвязной области? Приведите примеры односвязных и неодносвязных областей.
7. Какая область называется правильной относительно координатных осей?
8. Какой вид имеет формула Грина?
9. Напишите формулу для вычисления площади плоской квадрируемой области с помощью криволинейного интеграла второго рода.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

13.1. Вычислите данные криволинейные интегралы второго рода:

a) $\int\limits_L xdy$, где L – отрезок прямой $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ от точки $(a;0)$ до точки $(0;b)$;

b) $\int\limits_L (x^2+y^2)dy$, где L – контур прямоугольника , образованного прямыми $x=1$, $x=3$, $y=1$, $y=5$, причем контур L обходится в положительном направлении (т.е. против движения часовой стрелки);

c) $\int\limits_L ydx+xdy$, где L – первая четверть окружности $x=r\cos t$, $y=r\sin t$, обход которой осуществляется в положительном направлении.

13.2. Преобразуйте с помощью формулы Грина данный криволинейный интеграл к двойному интегралу: $\int\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dx+y[xy+\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})]dy$.

13.3. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_L (x+y)^2dx-(x^2+y^2)dy$ с помощью формулы Грина. Проверьте результат непосредственным вычислением этого криволинейного интеграла, зная, что L – контур треугольника с вершинами $A(1,1)$, $B(3,2)$, $C(2,5)$ обходится в положительном направлении.

13.4. Вычислите с помощью криволинейного интеграла площадь плоской фигуры, ограниченной кардиоидой

$x=a(2\cos t-\cos 2t),\quad y=a(2\sin t-\sin 2t),\ 0\le t\le 2\pi$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

13.5. Вычислите криволинейные интегралы второго рода:

а) $\int\limits_L (x^2-y^2)dx$, где L – дуга параболы $y=x^2$ от точки $(0;0)$ до точки $(2;4)$;

б) $\int\limits_L (2a-y)dx+xdy$, где L – арка циклоиды:

$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le 2\pi$.

13.6. Вычислите с помощью криволинейного интеграла площадь плоской фигуры, ограниченной петлей декартова листа: $x^3+y^3=3axy\quad (a>0)$. *Указание*: *положить* $y=tx$.

13.7. Вычислите криволинейный интеграл второго рода, применив формулу Грина: $\oint_L xy^2dx - x^2dy$, где L – окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

Практическое занятие №14. «Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Восстановление функции по ее полному дифференциалу»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Когда интеграл $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ называется независимым от пути интегрирования в области D ?
2. Сформулируйте необходимые и достаточные условия независимости криволинейного интеграла $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ от пути интегрирования.
3. При каких условиях выражение $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $F(x, y)$?
4. Как можно восстановить функцию $F(x, y)$ в области D по ее полному дифференциалу ?

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

14.1. Вычислите данный интеграл, предварительно убедившись, что он не зависит от пути интегрирования:

a) $\int_{(-1;2)}^{(2;3)} xdy + ydx$; b) $\int_{(0;1)}^{(1;2)} \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy$.

14.2. Проверьте, является ли данное выражение полным дифференциалом некоторой функции двух переменных, и, если да, то найдите эту функцию:

a) $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$;

b) $\left(\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dx + 2xydy$.

14.3. Силовое поле образовано силой $F(x, y)$, численно равной расстоянию от точки ее приложения до начала координат и направленной от точки приложения в начало координат. Найдите работу силы поля, затраченную на перемещение материальной точки единичной массы по дуге параболы $y^2 = 8x$ от точки (2;4) до точки $(4;\ 4\sqrt{2})$.

14.4. Поле образовано силой, имеющей постоянный модуль F и направление, совпадающее с направлением положительной полуоси OX. Найдите работу силы поля, затраченную на передвижение материальной точки единичной массы по ходу часовой стрелки вдоль четверти окружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащей в первом квадранте.

14.5. Поле образовано силой F, проекции которой на координатные оси равны $F_x = xy + \frac{y^2 \sin x}{2}$ и $F_y = \frac{x^2 - 2y\cos x}{2}$. Докажите, что работа при перемещении материальной точки в этом поле из одной точки плоскости в другую не зависит от пути перемещения.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

14.6. Вычислите интеграл $\int_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$, предварительно убе-дившись, что он не зависит от пути интегрирования.

14.7. Проверьте, является ли данное выражение полным дифференциалом некоторой функции двух переменных, и, если да, найдите эту функцию: $\dfrac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2}dx + \dfrac{e^y}{1+x^2}dy$.

14.8. Проекции силы F на координатные оси равны $F_x = 2xy$, $F_y = x^2$. Покажите, что силовое поле потенциальное, и вычислите работу поля при перемещении точечной массы, равной единице, из точки (1; 0) в точку (0; 3).

Практическое занятие №15. «Криволинейный интеграл по длине дуги (первого рода) и некоторые его приложения»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. В чем состоит суть метода решения задачи о массе материальной кривой ?
2. Дайте определение криволинейного интеграла первого рода.
3. Зависит ли значение криволинейного интеграла первого рода от направления обхода кривой?
4. Дайте геометрическое истолкование криволинейного интеграла первого рода.
5. В чем состоит основной способ вычисления криволинейного интеграла первого рода?
6. Напишите аналог формулы (16.11) в случае, когда кривая L задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, где $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2$, и $r(\varphi)$ имеет непрерывную производную на $[\varphi_1, \varphi_2]$.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

15.1. Вычислите криволинейные интегралы первого рода:

a) $\int\limits_L y^2 dl$, где L – арка циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1-\cos t), \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$;

b) $\int\limits_L y dl$, где L – дуга параболы $y^2 = 2px$ от $O(0,0)$ до $B(2, 2\sqrt{p})$.

15.2. Найдите массу четверти окружности $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t, \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$, если плотность в каждой точке кривой равна квадрату ординаты этой точки.

15.3. Вычислите площадь части боковой поверхности круглого цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ $(x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0)$, срезанного сверху поверхностью $2Rz = xy$.

15.4. С помощью криволинейного интеграла первого рода найдите длину астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le 2\pi$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

15.5. Вычислите криволинейный интеграл первого рода:

$\int\limits_L (3x - 2\sqrt[3]{a^2 y})dl$, где L – часть астроиды $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$.

15.6. Найдите массу дуги кривой $y = e^x$ между точками $A(0,1)$ и $B(2, e^2)$, если плотность в каждой точке кривой пропорциональна квадрату ординаты этой точки, т.е. $\rho(x, y) = ky^2$.

15.7. Найдите площадь боковой поверхности половины эллиптического цилиндра $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, $y \ge 0$, $z \ge 0$, усеченного плоскостью $z = y$.

Практическое занятие №16. «Поверхностные интегралы первого и второго рода и способы их вычисления»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Дайте определение поверхности в трехмерном евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^3$.
2. Каковы основные способы задания поверхностей в $\boldsymbol{R}^3$? Приведите примеры.
3. Сформулируйте определение односторонней поверхности. Приведите примеры.
4. Дайте определение двусторонней поверхности. Приведите примеры.
5. Какая поверхность в $\boldsymbol{R}^3$ называется гладкой (кусочно-гладкой)?
6. Дайте определение площади гладкой поверхности.
7. Напишите формулу для нахождения площади гладкой поверхности, заданной уравнением $z = f(x, y)$.
8. Дайте определение поверхностного интеграла первого рода.
9. Сформулируйте теорему о существовании поверхностного интеграла первого рода.
10. Каковы способы вычисления поверхностного интеграла первого рода?
11. Дайте определение поверхностного интеграла второго рода.
12. Сформулируйте теорему о существовании поверхностного интеграла первого рода.
13. Каковы способы вычисления поверхностного интеграла второго рода?
14. Напишите формулу, устанавливающую связь между поверхностными интегралами первого и второго рода.
15. Перечислите основные свойства поверхностных интегралов.

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

16.1. Вычислите данные поверхностные интегралы первого рода:

a) $\iint\limits_{\Sigma} \dfrac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, где Σ – часть цилиндрической поверхности $x = \cos\varphi$, $y = \sin\varphi, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \;\; 0 \le z \le 1$;

b) $\iint\limits_{\Sigma} z^2 dS$, где Σ – полная поверхность конуса $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2$.

16.2. Вычислите данные поверхностные интегралы второго рода:

a) $\iint\limits_{\Sigma} xdydz + ydzdx + zdxdy$, где Σ – внешняя сторона единичной сферы;

b) $\iint\limits_{\Sigma} (y^2+z^2)dxdy$ где Σ – верхняя сторона поверхности $z = \sqrt{1-x^2}$, отсеченная плоскостями $y = 0$ и $y = 1$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

16.3. Вычислите данные поверхностные интегралы первого рода:

a) $\iint\limits_{\Sigma} \sqrt{1+4x^2+4y^2}\,dS$, где Σ – конечная часть параболоида вращения $z = 1 - x^2 - y^2$, отсеченная плоскостью $z = 0$;

b) $\iint\limits_{\Sigma} (x^2+y^2+3z^2)dS$, где Σ – часть поверхности $z = \sqrt{x^2+y^2}$, отсеченная плоскостями $z = 0$ и $z = 1$.

16.4. Вычислите данные поверхностные интегралы второго рода:

a) $\iint\limits_{\Sigma} xdydz - ydzdx + zdxdy$, где Σ – внешняя сторона части конуса $x^2 + y^2 = z^2$, лежащей выше плоскости $z = 0$ и внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$;

b) $\iint\limits_{\Sigma} ydxdy$, где Σ – верхняя сторона части параболоида $z = x^2 + y^2, \quad 0 \le z \le 2$.

Практическое занятие №17. «Формулы Остроградского-Гаусса и Стокса и некоторые их приложения»

I. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАНИЯ

1. Перечислите основные физические задачи, в которых часто используются поверхностные интегралы первого рода.
2. Почему задача о вычислении потока жидкости через некоторую поверхность приводит к понятию поверхностного интеграла второго рода?
3. Напишите формулу Остроградского-Гаусса.
4. Какие применения формулы Остроградского-Гаусса Вы знаете?
5. Напишите формулу Стокса.
5. Почему формула Стокса является обобщением формулы Грина?
6. Какие применения формулы Стокса Вы знаете?

II. ПРИМЕРЫ И ЗАДАЧИ ДЛЯ АУДИТОРНОЙ РАБОТЫ

17.1. Используя формулу Остроградского-Гаусса вычислите поверхностный интеграл $\iint\limits_{\Sigma} x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy,$ где Σ – внешняя сторона границы единичного куба.

17.2. Используя формулу Стокса вычислите криволинейный интеграл $\oint\limits_{L} x^2y^3dx + dy + zdz,$ где L – окружность $x^2 + y^2 = 1, z = 0,$ а поверхностью Σ служит сторона внешняя сторона полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z > 0$, причем контур L обходится в положительном направлении.

17.3. Найдите координаты центра масс однородной поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = 1,$ $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \ge 0$.

III. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

17.4. Используя формулу Остроградского-Гаусса вычислите поверхностный интеграл $\iint\limits_{\Sigma} x^3dydz + y^3dzdx + z^3dxdy,$ где Σ – внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

17.5. Используя формулу Стокса вычислите криволинейный интеграл $\oint\limits_{L} ydx + zdy + xdz,$ где L – окружность $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0,$ а поверхностью Σ служит часть плоскости $x + y + z = 0$, ограниченная данной окружностью, причем контур L обходится в положительном направлении.

17.6. Найдите площадь поверхности сферы радиуса $R,$ используя поверхностный интеграл первого рода.

Практическое занятие №18. «Контрольная работа»

Образец варианта контрольной работы

18.1. Найдите $\lim\limits_{\substack{x \to +\infty \\ y \to +\infty}} \left((x^2 + y^2)e^{-\sqrt{x^2+y^2}} \right)$.

18. 2. Исследуйте на экстремум функцию $U = x^2 - 2xy + 4y^3$.

18.3. Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D (x+y^2)dxdy$ по области *D*, ограниченной кривыми $y = x$ и $y = x^2$.

18.4. Найдите объем тела *T*, ограниченного поверхностями $z = 0, \quad z = x^2 + y^2, \quad y = x^2, \quad y = 1.$

18.5. Вычислите криволинейный интеграл $\oint\limits_L (x+y)dx - (x-y)dy$, где L – эллипс $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,$ применив формулу Грина.

Самостоятельная работа

Задания для самостоятельной работы приводятся в планах практических занятий.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Текущая аттестация осуществляется на каждом практическом занятии в процессе фронтального опроса, выполнения заданий для аудиторной работы, в процессе проверки домашней самостоятельной работы.

Проведение текущего контроля осуществляется также посредством проведения аудиторных контрольных работ и разноуровневых самостоятельных работ.

Оценочные средства

I. Контрольные вопросы для проверки теоретической подготовки к практическому занятию.

Перечень вопросов приводится в планах практических занятий.

Критерии оценивания ответа на теоретический вопрос

"Отлично" выставляется студенту, который демонстрирует при ответе всестороннее, систематическое и глубокое знание учебно-программного материала, умение свободно выполнять задания, предусмотренные программой. Свободно ориентируется в основной и дополнительной литературе, рекомендованной программой, а также показывает усвоение взаимосвязи основных понятий дисциплины и их значений для приобретаемой профессии, проявляет творческие способности в понимании, изложении и использовании учебно-программного материала.

"Хорошо" выставляется студенту, который демонстрирует при ответе хорошее знание учебно-программного материала, успешно выполнил предусмотренные задания, усвоил основную литературу, рекомендованную в программе. Показывает систематический характер знаний по дисциплине и способен к их самостоятельному пополнению и обновлению в ходе дальнейшей учебной работы и профессиональной деятельности.

"Удовлетворительно" выставляется студенту, обнаружившему знание основного учебного материала в объёме, необходимом для дальнейшей учёбы и предстоящей работы по профессии, справляющимся с выполнением заданий, предусмотренных программой, знакомый с основной литературой, рекомендованной программой, допустившим погрешности в ответе, но обладающим необходимыми знаниями для их устранения под руководством преподавателя.

"Неудовлетворительно" выставляется студенту, обнаружившему пробелы в знаниях основного учебно-программного материала, допустившему принципиальные ошибки в выполнении предусмотренных программой заданий, не ознакомившемуся с основной литературой, предусмотренной программой, и не овладевшему базовыми знаниями, предусмотренными по данной дисциплине и определёнными предметными умениями.

II. Задания для самостоятельной работы.

Перечень практических заданий для самостоятельной работы приводится в планах практических занятий.

Критерии оценивания выполнения заданий для самостоятельной работы

Показатель	Количество баллов
1) Приведена краткая форма условия задачи	0,5
2) Выполнен рисунок к условию задачи, на котором обозначены все необходимые физические и геометрические параметры задачи	0,5
3) Проведен анализ условия задачи, включающий указание основных явлений, о которых идет речь в задаче, а также законов, положенных в основу решения задачи	1
4) Записаны математические уравнения законов, используемых при решении задачи	1
5) Приведено решение математических уравнений и получен численный ответ на вопрос задачи	1
Итоговая (суммарная) оценка	Max - 5

III. Контрольные работы по дисциплине.

Проведение текущего контроля осуществляется также посредством проведения аудиторной письменной контрольной работы.

Образец контрольной работы:

1. Найдите и изобразите область определения функции $f(x,y)=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$.

2. Найдите частные производные первого порядка для функции $u=arctg\dfrac{y}{x}$.

3. Исследуйте функцию $z=x^2-2xy+2y^2+2x$ на экстремум.

4. Запишите двойной интеграл $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$ в виде повторного двумя способами, если область G ограничена кривыми $y=0$, $x=\sqrt{y}$, $x+y=6$.

5. Вычислите криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_L 2xydx-x^2dy$, где L - дуга параболы $y=\sqrt{\dfrac{x}{2}}$, $0\le x\le 2$.

Критерии оценивания контрольной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно реализован каждый метод решения	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,5-5
2	Хорошо	3,5-4,5
3	Удовлетворительно	2,5-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 2,5

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация осуществляется посредством проведения экзамена.

Вопросы для подготовки к экзамену и образцы экзаменационных заданий.

Вопросы к экзамену

1. Понятие n-мерного евклидова пространства.
2. Открытые и замкнутые множества евклидова пространства. Понятие области. Примеры.
3. Предел последовательности точек в евклидовом пространстве.
4. Понятие функции нескольких переменных. Примеры
5. Предел функции двух переменных в точке и его свойства.
6. Понятие повторных пределов функции двух переменных. Примеры.
7. Непрерывность функции двух переменных в точке. Точки разрыва.
8. Свойства функций двух переменных, непрерывных в замкнутых ограниченных областях.
9. Равномерная непрерывность функции двух переменных.
10. Частные производные функции двух переменных.
11. Понятие дифференцируемости функции двух переменных в точке. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции в точке.
12. Дифференцирование сложной функции.
13. Понятие полного дифференциала и его применение в приближенных вычислениях. Инвариантность формы полного дифференциала первого порядка.
14. Производная функции по заданному направлению. Градиент.
15. Частные производные высших порядков. Дифференциалы высших порядков. Примеры.
16. Формула Тейлора для функции двух переменных.
17. Понятие локального максимума и минимума функции двух переменных. Необходимое условие экстремума.
18. Достаточные условия существования экстремума функции двух переменных. Примеры.
19. Понятие условного экстремума функции двух переменных. Метод множителей Лагранжа. Пример.
20. Алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значения функции двух переменных. Пример.
21. Понятие неявной функции. Достаточные условия существования дифференцируемой неявной функции. Примеры.
22. Понятие двойного интеграла. Свойства двойного интеграла.
23. Понятие повторного интеграла и его свойства.
24. Вычисление двойного интеграла с помощью повторных.
25. Замена переменных в двойном интеграле. Пример.
26. Понятие тройного интеграла и его вычисление. Пример.
27. Геометрические и физические приложения двойных и тройных интегралов.
28. Понятие криволинейных интегралов первого рода и их вычисление.
29. Понятие криволинейных интегралов второго рода и их основные свойства.
30. Условия существования криволинейного интеграла по координатам и его вычисление.
31. Криволинейный интеграл по замкнутому контуру. Формула Грина.
32. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.
33. Условие полного дифференциала. Восстановление функции по ее полному дифференциалу.
34. Понятие поверхностного интеграла первого рода.
35. Понятие поверхностного интеграла второго рода.

36. Формула Остроградского-Гаусса. Формула Стокса.

Образец письменного экзаменационного задания:

1. Понятие двойного интеграла. Свойства двойного интеграла.
2. Криволинейный интеграл по замкнутому контуру. Формула Грина.
3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x, y) = x^2 - 2y + 3$ на множестве $D = \{(x, y) \in R^2 \mid y - x \le 1, x \le 0, y \ge 0\}$.
4. Вычислите двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2 + y^2 - 1}$, где $D = \{(x, y) \in R^2 \mid 9 \le x^2 + y^2 \le 25\}$.
5. Докажите, что касательные плоскости к поверхности $xyz = a^3$ ($a > 0$) образуют с координатными плоскостями тетраэдр постоянного объема.

Критерии оценивания ответа на экзамене

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Правильный ответ на вопрос	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25, 0,5 и 0,75 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Список основной литературы

1. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 1 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 324 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07067-5. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/452409 (дата обращения: 26.08.2020).
2. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 2 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 315 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07069-9. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/452410 (дата обращения: 26.08.2020).
3. Шипачев, В. С. Высшая математика : учебное пособие для вузов / В. С. Шипачев. — 8-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 447 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-12319-7. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/449732 (дата обращения: 26.08.2020).
4. Шипачев, В. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : учебник и практикум для вузов / В. С. Шипачев. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 212 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04282-5. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/453124 (дата обращения: 26.08.2020).

7.2. Список дополнительной литературы

5. Расулов К.М. Практикум по математическому анализу. Числовые и функциональные ряды: учебное пособие. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных – Смоленск: Изд-во СОИРО, 2014. – 251 с.
6. Болотин И.Б. Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных: планы практических занятий для студентов 2 курса направления подготовки 010400 «Прикладная математика и информатика» / И.Б. Болотин; Смол. гос. ун-т. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2012. – 32 с.
7. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - СПб.: Изд- во «Профессия», 2008. – 416 с.
8. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1-3. - М.: Физматлит, 2006.
9. Зверович Э.И. Вещественный и комплексный анализ. Ч. 1. (Введение в анализ и дифференциальное исчисление). – Минск: Вышэйшая школа, 2006.
10. Зверович Э.И. Вещественный и комплексный анализ. Ч. 2. и Ч. 3. – Минск: Вышэйшая школа, 2008.
11. Зверович Э.И. Вещественный и комплексный анализ. Ч. 4. и Ч. 5. – Минск: Вышэйшая школа, 2008.
12. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. Под ред. В.Ф. Бутузова. - М.: Физматлит, 2002.
13. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. - СПб.: Изд- во «Лань», 2009. – 228 с.
14. Демидович Б.П. Сборник задач по математическому анализу. - М.: АСТ: Астрель, 2009. – 558 с.
15. Уваренков И.М., Маллер М.З. Курс математического анализа. Том I. - М.:Просвещение, 1966.; Том II, М.:Просвещение, 1976.
16. Шагин В. Л., Соколов А.В. Математический анализ. Базовые понятия: учебное пособие для прикладного бакалавриата. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 245 с. [электронный ресурс: https:/ /urait.ru].

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

- Система дистанционного обучения Смоленского государственного университета http://moodle.smolgu.ru
- Электронно-библиотечная система университета http://biblioteka.smolgu.ru
- Национальный открытый университет http://www.intuit.ru
- Образовательный математический сайт http://exponenta.ru
- Общероссийский математический портал http://www.mathnet.ru

8. Материально-техническое обеспечение

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, оснащенная стандартной учебной мебелью, мультимедиапроектором, ноутбуком, колонками и интерактивной доской.

Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенная стандартной учебной мебелью. Доступна электронная библиотека кафедры математического анализа. Используются портреты великих математиков, необходимые чертёжные инструменты.

Помещение для самостоятельной работы – компьютерный класс с доступом к сети «Интернет» и ЭИОС СмолГУ.

9. Программное обеспечение

Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), лицензия 66975477 от 03.06.2016 (бессрочно).

Обучающимся обеспечен доступ к ЭБС «Юрайт», а также доступ в электронную информационно-образовательную среду университета.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 03B6A3C600B7ADA9B742A1E041DE7D81B0
Владелец: Артеменков Михаил Николаевич
Действителен: с 04.10.2021 до 07.10.2022