«

-

))

23 2022)

Рабочая программа дисциплины
Б1.О.32 Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных

5**01.03.02 Прикладная математика и информатика**
5**Математическое и информационное моделирование**

-

2

3

/ 144

5 3

:

-))

16 2022) 10

))

2022

1. Место дисциплины в структуре ОП

,

) .

,

)

)

5

-

;

-

;

-

;

-

6

-

.

5

-

;

-

;

-

6

)

)

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

ОПК-1. ,	**Знать**5 6 **Уметь**5 6 **Владеть**5)

ОПК-3.	**Знать**5 6 **Уметь**5 6 **Владеть:**)

3. Содержание дисциплины

1. Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность. n- n-) n-)))))

2. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.)))))))) . .)

3. Интегральное исчисление функций нескольких переменных. . 5 .))) , . -)

4. Основные операции теории поля.)))

4. Тематический план

*					
				-	-
1	.	24	8	8	8
2		30	10	10	10
3		53	18	16	19
4		6		2	4
5	)	4			4
		27			27
		144	36	36	45+27

5. Виды учебной деятельности

Занятия лекционного типа

Лекция 1 «Понятие n**-мерного координатного и** n**-мерного евклидова пространства. Последовательности точек в евклидовом пространстве и их предел»**:

n- n- 6

6 6

6

6 ; 6

.

Лекция 2 «Понятие функции нескольких переменных. График и линии уровня функций двух переменных»5

6

6

6 6

)

Лекция 3 «Предел и непрерывность функции нескольких переменных»5

6 6 ;

; .

Лекция 4 «Основные свойства непрерывных функций. Понятие равномерной непрерывности функций нескольких переменных»:

6 6

)

Лекции 5-7 «Частные производные и дифференцируемость функций нескольких переменных»5 6

6 6

6 6

6

.

Лекция 8 «Формула Тейлора для функций нескольких переменных. Неявное задание функций. Дифференцирование неявной функции»:

; 6

.

Лекция 9. «Экстремумы функций нескольких переменных. Наибольшие и наименьшие значения функций нескольких переменных»:

6 6

.

Лекции 10-12 «Двойные и тройные интегралы и их приложения»:

6

;

;)

Лекции 13-15 «Криволинейные интегралы и их приложения»:

;

;

6

6 .

Лекция 16-17 «Поверхностные интегралы и способы их вычисления»:

6

.

Лекция 18 «Формулы Стокса и Остроградского-Гаусса»:

- 6)

Занятия семинарского типа (практические занятия)

Практическое занятие №1. «Понятие *n*-мерного евклидова пространства. Открытые и замкнутые множества. Предел последовательности точек»

I)

1. 5 *n*- 6 *n*-)

2. 5 *n*- $K(M_0; r)$; *n*- $S(M_0, r)$?

3. E $\boldsymbol{R}^2$. E)

4. E $\boldsymbol{R}^2$:

5. $\boldsymbol{R}^2$.

6. $\boldsymbol{R}^2$:

7. $M_n(x_n, y_n)$ $\boldsymbol{R}^2$.

II)

1.1. $a_1, a_2, ..., a_n$ $b_1, b_2, ..., b_n$) -

$$5 \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} .$$

1.2. M_1, M_2, M_3 $\boldsymbol{R}^n$ $5 \ (M_1, M_2) \} \ (M_1, M_3) \ (M_3, M_2)$.

1.3. $S(M_0, r)$)

1.4. $M_0(x_0, y_0)$ E $\boldsymbol{R}^2_{xy}$ $\{M_n(x_n, y_n)\}$ $M_0(x_0, y_0)$, E $M_n(x_n, y_n)$ $M_0(x_0, y_0)$ n $\boldsymbol{N}$.

1.5. $\{M_n\}$ E $\boldsymbol{R}^2$ M_0 M_0 E.

1.6. $\Sigma \ \{(x, y) \ \boldsymbol{R}^2_{xy} \,|\, x^2 \ y^2 \} \ 1 \ x \ [0, 1]\}$:

1.7. $M_n \ tg\frac{1}{n}, \ (1 \ \frac{1}{n})^n$.

III)

1.8. $\{M_n\}$ E $\boldsymbol{R}^2$ M_n M_0 n M_0 E.

1.9. 5 E)

1.10. $M(x, y)$ $\boldsymbol{R}^2_{xy}$ $\cos(x^2 \ y^2) \ 0$, :

1.11. $M_n \ \frac{n^2 \,) \, 1}{n^2 \ 1}, \frac{n \ 1}{5n}$.

1.12. $Q_n \ \cos n, 5 \ \psi$)

Практическое занятие №2. «Понятие функции нескольких переменных. График и линии уровня функции двух переменных»

I)

1. n) 5
6 6
:

2. :

3. :

4. $Z \quad f(x, y)$?

5. $Z \quad f(x, y)$.

II)

с), - 2.4:

2.1. $Z \quad \frac{1}{x \quad y}$; 2.2. $Z \quad \sqrt{1) \frac{x^2}{9}) \frac{y^2}{4}}$; 2.3. $Z \quad \sqrt{) x} \quad \sqrt{y}$;

2.4. $U \quad \arcsin\frac{x}{a} \quad \arcsin\frac{y}{b} \quad \arcsin\frac{z}{c}$.

2.5.
5 $\boldsymbol{R}^2_{xy}$ $\Gamma \quad (x, y) \quad R^2 \big| \, x^2 \quad y^2 \quad 25 \, \}$.

2.6.)
)

2.7. 5
$a) \; Z \quad x \quad y) \, 1$; $b) \; Z \quad xy$.

2.8. $h \quad 1$))
5$a) \; Z \quad x \quad y$; $б) \; Z \quad \frac{1}{2x^2 \quad 3y^2}$.

III)

2.9. с
5a) $Z \quad \frac{x}{y}$; b) $Z \quad \arccos\frac{x^2 \quad y^2}{9}$.

2.10.
5 $D \quad (x, y) \quad R^2 \big| x^2 \quad y^2 \, \} \, 100 \, , \quad x \quad 0 \, \}$.

), ,) R,
$x \quad y)$
)

2.12. $Z \quad \sqrt{x^2 \quad y^2}$.

2.13. $h \quad 1$))
5$a) \; Z \quad 2x \quad y$; $б) \; Z \quad \sqrt{x / y}$.

Практическое занятие №3. «Предел и непрерывность функции нескольких переменных»

I)

,) $Z \quad f(M)$ M_0 -
) :

) $\lim\limits_{M \quad M_0} f(M) \quad b, \; \lim\limits_{M \quad M_0} g(M) \quad c, \quad b \quad c$

$\lim\limits_{M \quad M_0} \Omega f(M) \quad g(M) \quad b \quad c$:

.) Z $f(M)$ M)

$f(M)$ $\lim\limits_{M} f(M)$ 1.

/) Z $f(M)$ M_0.

0) Z $f(M)$ M_0?

M_0

:

III)

.),) $\lim\limits_{\substack{x\ \ 0\\ y\ \ 0}} \dfrac{\sqrt{1\quad x^2y^2\ )\ 1}}{x^2\quad y^2}$.

3), ,) $\lim\limits_{\substack{x\ \ 0\\ y\ \ 0}} \dfrac{(x^2\quad y^2)x^2y^2}{1)\ \cos(x^2\quad y^2)}$.

.),) $\lim\limits_{\substack{x\\ y}} \quad x^2\quad y^2\quad \sin\dfrac{1}{x^2\quad y^2}$.

.), .) $f(x,y)\quad \begin{matrix} \dfrac{x^3\quad y^3}{x^4\quad y^2}, & (x;y)\quad (0;0), \\ 0, & (x;y)\quad (0;0), \end{matrix}$

$O(0,0)$.

3.14. 5

$a)\ Z\quad \dfrac{2x)\ 3}{x^2\quad y^2\ )\ 4}$; $b)\ W\quad \dfrac{1}{x^2\quad y^2\quad z^2\ )\ 16}$.

.), 0)

5

$Z\quad \dfrac{x^4\quad y^4\quad x^3y^3}{x^4\quad y^4}$.

.), 1) $f(x,y)\quad \begin{matrix} \dfrac{\cos(x\ )\ y)\ )\ \cos(x\quad y)}{2xy}, & xy\quad 0, \\ 1, & xy\quad 0, \end{matrix}$

$O(0,0)\quad A(1,0)$.

.), 2) $g(x,y)\quad \begin{matrix} \dfrac{x^2y^2}{x^4\quad y^4}, & x^4\quad y^4\quad 0, \\ 0, & x^4\quad y^4\quad 0, \end{matrix}$

$O(0,0)\quad B(1,2)$.

Практическое занятие №4. «Основные свойства непрерывных функций. Понятие равномерной непрерывности функций нескольких переменных»

I)

1.)

2. D)

$U(x,y)\quad \begin{matrix} \dfrac{\sin(x\quad y)}{x\quad y}, & x\quad y\quad 0, \\ 1, & x\quad y\quad 0, \end{matrix}$

$\boldsymbol{R}^2_{xy}$?

3.)

4. D)

$$V(x,y) \quad \begin{cases} \dfrac{\sin(x \quad y)}{x}, & x \quad 0, \\ 0, & x \quad 0, \end{cases}$$

$K \quad x, y \quad R^2 \big| x^2 \quad y^2 \} 1 \big|$?

5. D)

$K \quad x, y \quad R^2 \big| x^2 \quad y^2 \} 1 \big|$.

6. $Z \quad f(x,y)$

$E \quad \boldsymbol{R}^2_{xy}$. $U \quad x^2 \quad y^2$ $\boldsymbol{R}^2_{xy}$?

7.

)

II)

/),) $f(x,y) \quad \dfrac{x^6 \quad y^6}{x^2 \quad y^2}$

$\Sigma \quad \{(x,y) \quad \boldsymbol{R}^2_{xy} \big| 0 \quad x^2 \quad y^2 \} 9\}$) $\sup\limits_{\Sigma}\{f(x,y)\}$ $\inf\limits_{\Sigma}\{f(x,y)\}$.

:

/)) 5 - $K(M_0, \ )$

$M_0 \quad \dfrac{}{3},) \dfrac{}{3}$ $\quad f(x,y) \quad \begin{cases} \dfrac{\sin x \quad \sin y}{x \quad y}, & x \quad y \quad 0, \\ \dfrac{1}{2}, & x \quad y \quad 0, \end{cases}$

))

/).) $g(x,y) \quad \sin(\dfrac{}{2}) \ x^2 \ ) \ y^2)$

$O(0,0)$:

/)/) $f(x,y) \quad x^2 \quad y^2$

$T \quad (x,y) \quad R^2 \big| 1 \} \ x \quad 4, \ 2 \} \ y \quad 6 \big|$)

:

/)0) $Z \quad x^2 \quad y^2 \ e^{xy}$

$Q \quad \{(x,y) \quad R^2 \big| 1 \} \ x^2 \quad y^2 \} 4\}$) $e\sqrt{e}$?

/)1) $f(x,y) \quad \sqrt{4) \ x^2 \ ) \ y^2}$ ee

:

III)

/)2) $f(x,y) \quad \dfrac{x^2 \ ) \ y^2}{x^2 \quad y^2}$ Σ

$\boldsymbol{R}^2_{xy} \setminus \{O(0,0)\}$) $\sup\limits_{\Sigma}\{f(x,y)\}$ $\inf\limits_{\Sigma}\{f(x,y)\}$)

:

/)3) $U = \sqrt{16) \ x^2 \ ) \ y^2 \ ) \ z^2}$.

. :

/)4) $Z \begin{cases} 0, & x \quad y, \\ x, & x \quad y, \end{cases}$ $O(0,0)$?

?

/),) $f(x,y)$)

:

/), ,) $g(x,y) \quad \cos(\;) \; x^2 \;) \; y^2)$

$O(0,0)$:

/),)

$U(x,y) \quad x^2 \quad y^2$ $\bar{K} \quad \{(x,y) \quad \boldsymbol{R}^2_{xy} \,|x^2 \quad y^2 \;\} \; 1\}$.

Практическое занятие №5. «Частные производные и дифференцируемость функций нескольких переменных»

I)

1. $V \quad f(x_1, ..., x_n)$ x_n)

:

2. $\dfrac{U}{x}$ $\dfrac{U}{y}$ $U \quad xy^2$.

3. $Z \quad f(x,y)$ $M_0(x_0, y_0)$.

4. $M_1(x_1, y_1)$ $Z \quad f(x,y)$.

5. $Z \quad f(x,y)$ $M_0(x_0, y_0)$? :

6. :

7. $Z \quad f(x,y)$ $P_0(x_0, y_0, Z_0)$.

8. $Z \quad f(x,y)$ $M_0(x_0, y_0)$.

II)

5.1.

5

$a)\; Z \quad x^2 y \;) \; xy^2 \quad 3; \;\; b)\; Z \quad (x^2 \quad y^2)^3; \;\; c)\; Z \quad \dfrac{x}{y} e^{xy}; \;\; d)\; Z \quad \cos \quad .$

5.2. $f(x,y) \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 \quad y^2}}, & \mathrm{x}^2 \quad y^2 \quad 0; \\ 0, & x \quad 0, y \quad 0, \end{cases}$

$O(0,0)$ $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$)

5.3. $\dfrac{f}{y} \partial \, 0$ $D \quad R^2$ $f(x,y)$

$y \quad) \;) \; f(x, y_1) \quad f(x, y_2)$ $M(x, y_1) \quad N(x, y_2)$

D) $\frac{f}{x} \quad \frac{f}{y} \partial 0$ $D \quad R^2$ $f(x, y)$

)

5.4. $Z \quad \sqrt{1) \; x^2 \;) \; y^2}$

$P_0(0,0,1)$.

5.5. $Z \quad x \quad y^2$

$P_0(0,1,1)$.

III)

0)1)

5

$a) \; Z \quad xy) \; \frac{y}{x}; \; b) \; H \quad \ln(x^2 \quad y); \; c) \; U \quad \sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2}$.

0)2)

$O(0,0)$ $f_x(0,0)$,

$f_y(0,0)$)

0)3) $\frac{f}{y}$ $M(1, 2)$

$f(x, y) \quad x^{x^y} \quad (\ln x) \; \{\mathrm{arctg}^4[\mathrm{arctg}(\sin xy)]) \; \ln^3(x \quad y)\}$.

0)4) $Z \quad x^2 \quad y^2$

$Q_0(1, \; 2, \; 5)$.

Практическое занятие №6. «Достаточные условия дифференцируемости функций нескольких переменных. Применение дифференциала к приближенным вычислениям»

I)

1.

$Z \quad f(x, y)$ $M_0(x_0, y_0)$.

2.

$Z \quad f(x, y)$ $M_0(x_0, y_0)$.

3. $P(x, y)$ x y

$\boldsymbol{R}^2_{xy}$.

4. $U(x, y) =$ $\begin{matrix} 0, & xy & , \\ 1\,, & xy &) \end{matrix}$

$O(0;0)$?

5.

?

II)

1),) $f(x, y)$ $\begin{matrix} (x^2 \quad y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2 \quad y^2}}, & x^2 \quad y^2 \quad 0, \\ 0, & x^2 \quad y^2 \quad 0, \end{matrix}$

$f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ $O(0,0)$

$O(0,0)$

$O(0,0)$.

1)) $Z \quad x^y y^x$

$$x\frac{Z}{x} \quad y\frac{Z}{y} \quad (x \quad y \quad \ln Z) \; Z.$$

1).) $V \quad \frac{1}{3} \; h(R^2 \quad r^2 \quad Rr) \; (h \qquad R \quad r$

$R)$

$V(R)$:

a $6b$ R = 10 *см* , r = 4 *см*, h = 5 *см* , R = 0,1 *см*.

1)/) 5 a)

$\sin 59^0 tg 46^0$; b) $2{,}003^2 \quad 3{,}998^3 \quad 1{,}002^2$.

III)

1)0)

$$Z \quad \begin{matrix} \frac{x^3 \quad y^3}{x^2 \quad y^2}, \; \text{если } x^2 \quad y^2 \quad 0, \\ 0, \quad \text{если } x^2 \quad y^2 \quad 0, \end{matrix}$$

$O(0,0)$)

1)1) $Z \quad \frac{x)\; y}{z)\; t} \quad \frac{t)\; x}{y)\; z}$

$$\frac{u}{x} \quad \frac{u}{y} \quad \frac{u}{z} \quad \frac{u}{t} \quad 0.$$

1)2) $Z = x^3 + y^2$ $M(1; 1)$

$x \quad y$.

1)3) a = (31,4 0,15) *см* , b = (26,2 0,1) *см*, c = (42,3 0,3) *см.*

)

1)4)

$\sqrt{1{,}98^2 \quad 1{,}01^2}$.

Практическое занятие №7. «Дифференцирование сложной функции. Частные производные и дифференциалы высших порядков»

I)

1.

)

2. :

3. $f(M)$ $M_0(x_0, y_0)$

l.

4. $\frac{f(M_0)}{l}$

$M_0(x_0, y_0)$?

5. $Z \quad f(x, y)$ $M_0(x_0, y_0)$?

6. $\frac{f(M_0)}{l}$?

7. $Z \quad f(x,y)$

$x \quad y \quad M(x,y)$.

8.

$Z \quad f(x,y))$

$U \quad [\sin(x \quad y)]^{\cos xy}$

$M(x,y)$, $\sin(x \quad y) \quad 0$.

9. n- $U \quad f(x_1,...,x_n)$

)

10. $Z \quad f(x,y)$

$M_0(x_0,y_0)$.

11.

$Z \quad f(x,y)$.

12. n) *го*

$Z \quad f(x,y)$.

II)

7.1. $Z \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x \quad \sin t,\ y \quad \cos t$) $\frac{dZ}{dt}$ dZ.

7.2. $Z \quad x^2 y$) $xy^2 \quad x \quad \cos \quad ,\ y \quad \sin$) $\frac{Z}{\quad}, \frac{Z}{\quad}$ dZ.

2).) $Z \quad xy \ \ arctg\,(xy)$, $x \quad t^2 \quad 1,\ y \quad t^3$,

)

2)/) $g(x,y) \quad 5xy^3$) x^2 M_0 , ,

$b \quad 3i \quad 15j$.

7.5.

$$Z \quad \ln\sqrt{x^2 \quad y^2}.$$

2)1) $f(x,y) \quad \frac{xy\,(x^2\ )\ y^2)}{x^2 \quad y^2}, \quad x^2 \quad y^2 \quad 0,$

$0, \quad x \quad y \quad 0,$

$f_{xy}(0;0) \quad f_{yx}(0;0)$.

III)

7.7. $Z \quad \cos(2x \quad 4x^2$) $y)$ $x \quad \frac{1}{t}, y \quad \frac{\sqrt{t}}{\ln t}$. $\frac{dZ}{dt}$ dZ.

7.8. $Z \quad e^{xy}\ln(x \quad y)$, $x \quad t^3,\ y \quad 1$) t^3. $\frac{dZ}{dt}$ dZ.

2)4) $Z \quad x^y \quad y^x$, $x \quad U^2 \quad V^2,\ y \quad U^2$) V^2,

.

2),) $h(x,y) \quad 3xy^4$) $x^2 y$ $M_0(1,$) $1)$

$b \quad 5i \quad 11j$.

2), ,)

$$Z = \ln tg\,\frac{y}{x}.$$

7.12. $f(x,y) \quad y\sqrt[3]{x}$. $f_x(1;1),\ f_y(1;1),\ f_{xx}(1;1),\ df(1;1)$.

Практическое занятие №8. «Формула Тейлора для функции двух переменных. Понятие неявной функции. Дифференцирование неявных функций»

)

1.
$Z \quad f(x,y)$ $M_0(x_0,y_0)$.

2. *многочленом Тейлора* n*-й степени для функции* $f(x,y)$ *в окрестности точки* $M_0(x_0,y_0)$?

3. $f(x,y)$
$M_0(x_0,y_0)$?

4. : $F(x,y) \quad 0$,

)

5.
$F(x,y) \quad 0$ $F(x,y,z) \quad 0$).

6. $f(0)$ $f(0)$ $y \quad f(x)$
$x^2 \quad y^2) 1 \quad 0$ $f(0) \quad 1$
$x = 0$.

II)

3),) $f(x,y) \quad e^{\frac{x}{y}}$
$M_0(0,1)$)

3)) $y^4) 4x^2y^2 \quad \sin x \quad 0$ y x.

3).) $F(x,y) \quad 0$ $y \quad f(x)$
$M_0(x_0,y_0)$ 5
$F(x,y) \quad x^3 \quad y^3) 3axy, \ x_0 \quad a\sqrt[3]{4}, \ y_0 \quad a\sqrt[3]{2}, \ a \quad 0$?

3)') $y \quad f(x)$
$xe^{2y}) y\ln x) 8 \quad 0$.

3)0) $z(x,y)$,
$z^3 \quad 3x^2z \quad 2xy$.

III)

3)1) $Z \quad x^2\ln y$ $M_0(1,1)$ $n \quad 2$.

3)2) $e^{x^2 \quad y^3}) x^6) 5 \quad 0$ y x.

3)3) $F(x,y) \quad 0$ $y \quad f(x)$
$M_0(x_0,y_0)$ 5 $F(x,y) \quad x(x^2 \quad y^2)) a(x^2) y^2), \ x_0 \quad y_0 \quad 0, \ a \quad 0$.

3)4) $y \quad f(x)$
$e^y \quad ax^2e^{) y}) 2bx \quad 0$ $a \quad const \quad 0$ $b \quad const \quad 0$.

8.10. $z(x,y)$,
$x^2) 2y^2 \quad z^2) 4x \quad 2z) 5 \quad 0$.

Практическое занятие №9. «Экстремумы функций нескольких переменных. Наибольшие и наименьшие значения функции»

I)

1. $Z \quad f(M)$.

2.

$Z \quad f(M))$ $Z \quad f(M)$

$M_0(x_0, y_0)$ $Z_x(M_0) = 0$ $Z_y(M_0) = 0$ $M_0(x_0, y_0)$

)

3. $Z \quad f(x, y)$?

$Z \quad f(x, y)$ $M_0(x_0, y_0)$

$Z_x(M_0) = 0,$ Z_y M_0)

4.

$Z \quad f(x, y)$ $M_0(x_0, y_0)$.

5. $Z \quad f(x, y)$

$(x, y) \quad 0$.

6.

:

7.

$Z \quad f(x, y)$ $D \quad \boldsymbol{R}^2$.

II)

4),) 5

a) $Z \quad xy(1)\ x)\ y)$; b) $Z \quad \sin x \quad \sin y \quad \sin(x \quad y)$ $0 \} \ x \} \ \frac{}{2},\ 0 \} \ y \} \ \frac{}{2}$.

4)) $Z \quad xy$ $x^2 \quad y^2 \quad 1$.

4).) $Z(x, y)$

5

a) $Z \quad x)\ 2y)\ 3$ $D \quad \{(x, y) \quad R^2 \big| 0 \} \ x \} \ 1,\ 0 \} \ y \} \ 1,\ 0 \} \ x \quad y \} \ 1\}$;

b) $Z \quad \sqrt{1)\ x^2)\ y^2}$ $x^2 + y^2 \} \ 1$.

4)/) $y \quad x^2$ $x)\ y)\ 2 \quad 0$.

III)

4)0) 5

a) $Z \quad 3x^2y)\ x^3)\ y^4$; b) $Z \quad xy\ln(x^2 \quad y^2)$.

4)1) $Z \quad \frac{1}{x} \quad \frac{1}{y}$ $x \quad y$

$5x \quad y \quad 2a$ $a \quad 0$.

4)2) $Z \quad x^2 \quad 3y^2)\ x \quad 18y)\ 4$,

$D \quad (x, y) \quad R^2 \big| 0 \} \ x \} \ 1, 0 \} \ y \} \ 1 \backslash$.

4)3)

)

5. $Z \quad f(x,y)$ D
)
:
6.
)
7.)
8. :
9. $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$

$G \quad \{(x,y) \quad R^2 \,\big|\, (x\,)\,1)^2 \quad (y\,)\,2)^2 \,\}\, 25\}.$

II)

10),) $f(x,y)$ G
G
$x = 0, y = 0, x^2 + y^2 = r^2.$

10)) $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dy\,.$

10).)

$\int\limits_0^1 \int\limits_{2x}^{3x}$) :

$G.$

10)) 5

a) $\int\limits_3^4 dx \int\limits_1^2 \frac{dy}{(x \quad y)^2}$; b) $\iint\limits_G e^{\frac{x}{y}} dxdy$ G $x = y^2, x = 0, y = 1$; c)

$\int\limits_0^2 d \int\limits_{a\sin}^{a} rdr\,.$

10)0) $f(x,y) \quad \sin^2 x \;\; \sin^2 y$ $D = \{(x, y)$
$\boldsymbol{R}^2 \quad 0 \,\}\, x \,\} \quad , 0 \,\}\, y \,\} \quad \}.$

III)

10)1) $f(x,y)$ G
G $y = x^3, x + y = 10, x - y = 4, y = 0.$

10.7. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)dx.$

10.8. $5 \int\limits_{)\,y}^{\sqrt{y}} \quad)$

5 : :
G ?

10)4) 5

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1)\,x^2}} \sqrt{1)\;x^2\;)\;y^2}\,dy$;

b) $\iint\limits_G \cos(x \quad y)dxdy$ G $x = 0, y = \quad , y = x.$

Практическое занятие №11. «Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах»

I)

,) $x = \quad (u, v),\ y = \quad (u, v)$?

) OXY

$\Pi \quad (\ , \ ) | 0 \} \quad \} 1, \ 0 \} \quad \} 2$ $\quad$ $x \quad \cos \ ,$ $y \quad \sin \ .$

?

.))

/) :

II)

11),) 5

a) $\iint_G f(x,y)dxdy$ G

$x^2 + y^2 \} ax \quad x^2 + y^2 \} by$;

b) $\int_0^2 dx \int_0^x f(\sqrt{x^2 \quad y^2})dy$.

11)) $u \quad x \quad y, \ v \quad x) \ y$

$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy$)

11).) $\iint_G ydxdy$ G –

a a; 0).

11)) $\iint_G dxdy$ $u \quad xy,\ v \quad \frac{y^2}{x}$ G

$y^2 \quad 2x,\ y^2 \quad 3x$ $xy \quad 1,\ xy \quad 2$.

11)0) $\frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2} \quad 1.$

III)

11)1)

5

a) $\iint_G f(x,y)dxdy$ G – $x^2 + y^2 \} ax$; b) $\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2) x^2}} f(x,y)dy$.

11)2) $\iint_G (x^2 \quad y^2)dxdy$ G –

$x^2 + (y+2)^2 \} 4$.

11)3) $\iint_G (x^2 \quad y^2)dxdy$ G –

$x^2 \quad y^2 \quad 2x) \ 1 \quad 0 \quad x^2 \quad y^2 \quad 2x \quad 0$, 5

$x \quad 1 \quad \cos \ , \ y \quad \sin \ .$

11)4) $xy \quad 4,\ x \quad y) \ 5 \quad 0$.

Практическое занятие №12. «Геометрические и механические приложения двойного интеграла. Понятие о тройном интеграле»

I)

,) :

) $\boldsymbol{R}^3$?

.) $\boldsymbol{R}^3$:

/) U $f(x,y,z)$

D $\boldsymbol{R}^3$.

0) $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$?

II)

12),)

51) x, y, z; 2) y, x, z; 3) z, x, y, 5

a) $\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$ D $\frac{x^2}{a^2}\ \frac{y^2}{b^2}\ \frac{z^2}{c^2}\ \ 1$;

b) $\int_0^1 dx \int_0^{1)x} dy \int_0^{x\ \ y} f(x,y,z)dz$.

12)) $\int_0^x dt \int_0^t du \int_0^u f(v)dv$

)

12).) 5

a) $\iiint_D (x\ \ y\ \ z)dxdydz$ D

$0 \} x \} a, 0 \} y \} b, 0 \} z \} c$;

b) $\iiint_D xy^2z^3dxdydz$ D $Z = xy, y = x, x = 1, z = 0.$

12)/) $y^2\ \ 4)\ x$

$2y^2\ \ x\ \ 8$.

III)

12)0)

5, x, y, z ; 2) y, x, z ; 3) z, x, y, 5

a) $\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$ D

$x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 1.$

b) $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2\ \ y^2} f(x,y,z)dz$.

12.6. 5

a) $\iiint_D$ sin $d\ \ d\ \ d$ D

$0\}\ \ \}\ \frac{}{2}, 0\}\ \ \}\ 2\ , 0\}\ \ \}\ \frac{}{2}$;

b) $\iiint_D x\,dx\,dy\,dz$ D $x= 0, y=0, z = 0, y = h, x + y =a.$

12)2)

$x^2\ \ y^2\ \ 1$ $z\ \ y\ \ z\ \ 2y$.

Практическое занятие №13. «Криволинейный интеграл по координатам (второго рода). Формула Грина»

I)

1. ?
2. ?
3. ?
4. .
5.)
6. :)
7. ?
8. :
9.)

II)

13),) 5

a) $\int_L xdy$ L $\frac{x}{a} \quad \frac{y}{b} \quad 1$ $(a;0)$ $(0;b)$;

b) $\int_L (x^2 \quad y^2)dy$ L $x \quad 1,\ x \quad 3,$ $y \quad 1,\ y \quad 5$ L)) 6

c) $\int_L ydx \quad xdy$ L $x \quad r\cos t$, ,)

13))

5 .

13).)

)

L ,

,)

13)/)

.

III)

13)0) 5

a) L $y = x^2$;

, L 5

$x \quad a(t \ \sin t), \quad y \quad a(1 \ \cos t), \ 0 \} \ t \} \ 2$.

13)1)

5 $x^3 \quad y^3 \quad 3axy \quad (a \quad 0)$. *Указание*: *положить* $y \quad tx$.

13.12) 5

$\oint\limits_L xy^2dx + x^2dy$, L $x^2 + y^2 = a^2$.

Практическое занятие №14. «Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Восстановление функции по ее полному дифференциалу»

)

1. $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

D ?

2.

$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$)

3. $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$

$F(x, y)$?

4. $F(x, y)$ D :

II)

14.1)

5

a) $\int\limits_{(1;2)}^{(2;3)} xdy + ydx$; b) $\int\limits_{(0;1)}^{(1;2)} \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy$.

14.2.

5

a) $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (x^2 - 2xy - y^2)dy$;

b) $\left(\frac{y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} - \frac{x}{x^2 + y^2}\right)dx + 2xydy$.

14.3. $F(x, y)$

)

$y^2 = 8x$ 6

$(4; 4\sqrt{2})$.

14.4. F

OX.

$x^2 + y^2 = R^2$

)

14.5. F

$F_x = xy + \frac{y^2 \sin x}{2}$ $F_y = \frac{x^2 - 2y\cos x}{2}$)

)

III)

14.1) $\int\limits_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$ -

)

14)2)

5

$$\frac{2x(1)\ e^{y})}{(1 \quad x^2)^2} dx \quad \frac{e^y}{1 \quad x^2} dy .$$

14)3) F $F_x \quad 2xy,\ F_y \quad x^2$)

, 6 6.)

Практическое занятие №15. «Криволинейный интеграл по длине дуги (первого рода) и некоторые его приложения»

I)

1. :
2.)
3.
   :
4.)
5. :
6. ,1), , L
   $r \quad r(\ )$ $_1 \} \quad \} \quad _2$ $r(\ )$
   $[\ _1,\ \ _2]$.

II)

15),) 5

a) $\int_L y^2 dl$ L $\begin{cases} x \quad a(t\ )\ \sin t) \\ y \quad a(1)\ \cos t), \end{cases}$ $0 \} \ t \} \ 2$;

b) $\int_L ydl$ L $y^2 \quad 2px$ $O(0,0)$ $B(2, 2\sqrt{p})$.

15)) $\begin{cases} x \quad a\cos t \\ y \quad a\sin t, \end{cases}$ $0 \} \ t \} \ \frac{}{2}$

)

15).) $x^2 \quad y^2 \quad R^2$

$(x \quad 0,\ y \quad 0,\ z \quad 0)$ $2Rz \quad xy$.

15)/)

$\begin{cases} x \quad a\cos^3 t \\ y \quad a\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \} \ t \} \ 2$.

III)

15)0) 5

$\int_L (3x)\ 2\sqrt[3]{a^2 y})dl$ L $\begin{cases} x \quad a\cos^3 t \\ y \quad a\sin^3 t, \end{cases}$ $0 \} \ t \} \ \frac{}{2}$.

15)1) $y \quad e^x$ $A(0,1)$ $B(2, e^2)$

)) $(x, y) \quad ky^2$.

15)2)

$\frac{x^2}{5} \quad \frac{y^2}{9} \quad 1,\ y \quad 0,\ z \quad 0$ $z \quad y$.

Практическое занятие №16. «Поверхностные интегралы первого и второго рода и способы их вычисления»

)

1. $\boldsymbol{R}^3$.

) $\boldsymbol{R}^3$:)

3.))

4)))

5) $\boldsymbol{R}^3$ - :

1))

2)

$z \quad f(x,y)$.

3))

9.)

,) :

, ,))

12.)

, .) :

, /)

)

15))

II)

16.,) :

a) $\dfrac{dS}{\sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2}}$ $x \quad \cos$,

$y \quad \sin$, $0 \} \quad \} \; 2$, $0 \} \; z \} \; 1$;

b) $z^2 dS$, $\sqrt{x^2 \quad y^2} \} \; z \} \; 2$.

16.2. :

a) $xdydz \quad ydzdx \quad zdxdy$ 6

b) $(y^2 \quad z^2)dxdy$ $z \quad \sqrt{1) \; x^2}$,

$y \quad 0 \quad y \quad 1$.

III)

,1).) :

a) $\sqrt{1 \quad 4x^2 \quad 4y^2}dS$ $z \quad 1) \; x^2) \; y^2$,

$z \quad 0$;

b) $(x^2 \quad y^2 \quad 3z^2)dS$, $z \quad \sqrt{x^2 \quad y^2}$,

$z \quad 0 \quad z \quad 1$.

16.4. :

a) $xdydz \;) \; ydzdx \quad zdxdy$ $x^2 \quad y^2 \quad z^2$,

$z \quad 0$ $x^2 \quad y^2 \quad 1$;

b) $ydxdy$, $z \quad x^2 \quad y^2, \quad 0 \} \ z \} \ 2$.

Практическое занятие №17. «Формулы Остроградского-Гаусса и Стокса и некоторые их приложения»

)

1.

)

)

?

3. -)

/) - :

0))

0) :

1) :

II)

17),) -

$x^2dydz \quad y^2dzdx \quad z^2dxdy,$)

17.2)

$\oint_L x^2y^3dx \quad dy \quad zdz,$ L $x^2 \quad y^2 \quad 1, z \quad 0,$

$x^2 \quad y^2 \quad z^2 \quad 1, \quad z \quad 0$ L

.

17).) $x^2 \quad y^2 \quad z^2 \quad 1, \ x \quad 0,$ $y \quad 0, \ z \quad 0.$

III)

17/) -

$x^3dydz \quad y^3dzdx \quad z^3dxdy,$ $x^2 \quad y^2 \quad z^2 \quad 1.$

170)

$\oint_L ydx \quad zdy \quad xdz,$ L $x^2 \quad y^2 \quad z^2 \quad 1, x \quad y \quad z \quad 0,$

$x \quad y \quad z \quad 0,$

L)

171) $R,$

)

Практическое занятие №18. «Контрольная работа»

Образец варианта контрольной работы

18.1) $\lim\limits_{\substack{x \\ y}} (x^2 \quad y^2)e^{) \sqrt{x^2 \quad y^2}}$.

18. 2) .

18.3. $(x \quad y^2)dxdy$ D

D

$y = x \quad y \quad x^2.$

18.4) T

$z \quad 0, \quad z \quad x^2 \quad y^2, \quad y \quad x^2, \; y \quad 1.$

18.5) $\circ(x \quad y)dx\,)\;(x\,)\;y)dy$ L

L

$\frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2} \quad 1,$)

Самостоятельная работа

)

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

)

)

Оценочные средства

I. Контрольные вопросы для проверки теоретической подготовки к практическому занятию.

.

Критерии оценивания ответа на теоретический вопрос

"Отлично"

-

)

-)

"Хорошо"

-

)

)

"Удовлетворительно"

)

"Неудовлетворительно"

-

)

II. Задания для самостоятельной работы.

.

Критерии оценивания выполнения заданий для самостоятельной работы

,	0,5
	0,5
.	1
/	1
0	1
	- 5

III. Контрольные работы по дисциплине.

)

5

1. $f\ x,y\quad \sqrt{1)\ x^2}\quad \sqrt{y^2\ )\ 1}$.

) $u\quad arctg\dfrac{y}{x}$.

.) $z\quad x^2\ )\ 2xy\quad 2y^2\quad 2x$)

/) $\iint_G f\ x,y\ dxdy$

G $y\quad 0,\ x\quad \sqrt{y},\ x\quad y\quad 6.$

0) $\int_L 2xydx)\ x^2dy$ L -

$y\quad \sqrt{\dfrac{x}{2}},\ 0\}\ x\}\ 2.$

1.

*		*)
1		,

(*) 0)

2. 5

*		
1		4,5-5
2		3,5-4,5
3		2,5-3,5
4		,5

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

)

Вопросы для подготовки к экзамену и образцы экзаменационных заданий.

1. *n*-)
2.))
)
3.)
4.)
5.)
6.))
7.))
8.
)
9.)
10.)
11.)
)
12. .
13.)
)
14.))
15.))
)
16.)
17.)
)
18.)
)
19.)
))
20.
))
21.)
))
22.))
23.)
24.)
25.))
26.))
27.)
28.)
29.)
30.
)
31.))
32.)
33.)
)
34.)
35.)

36. -))

5

1.))
2.))
3. $f(x,y)\quad x^2)\ 2y\quad 3$

$$D\quad x,y\quad R^2\,|\,y)\ x\}\ 1,\ x\}\ 0,\ y\quad 0\}.$$

4. $$\iint_D \frac{dxdy}{x^2\quad y^2)\ 1},$$

$$D\quad x,y\quad R^2\,|\,9\}\ x^2\quad y^2\ \}\ 25\}.$$

5. $xyz\quad a^3\ (a\quad 0$
)

1.

*		
1		,

0 0 20)

2. 5

*		
1		4,75-5
2		3,75-4,5
3		3-3,5
4		.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Список основной литературы

1.))) ,) , 5 *))))))) 4-))) 5) 324)) ISBN 978-5-534-07067-5. 5 ** X) URL: cω 5**p ф) p*] _ */ 0 / 4 5 1) 3))
2.))) ,) 5 *))))))) 4-))) 5) 315)) ISBN 978-5-534-07069-9. 5 ** X) URL: https:**p ф) p*] _ */ 0 / , 5 1) 3))
3.)) 5 *))) 8-))) 5) 447)) ISBN 978-5-534-12319-7. 5 ** X) P M 5cω 5**p ф) p*] _ */ / 42. 5 1) 3))
4.)) 5 *))) 5) 212)) ISBN 978-5-534-04282-5. 5 ** X) P M 5cω 5**p ф) p*] _ */ 0. , / 5 1) 3))

7.2. Список дополнительной литературы

5.)))
5)
5 - , /) 0,)
6.))
5
, / *)) 6)
) -) 5 - ,) .)
7.))) -)5 -
3) / , 1)
8.)))), -3. -)5
1)
9.)))) ,)
) 5 1)
10.)))))).) 5
3)
11.)))) /)) 0) 5
3)
12.))))))))
))))) -)5)
13.))) -)5 -
4) 3)
14.))) -)5 5
2009. 003)
15.))))) I. -
)5 , 411)6 II)5 , 421)
16.))))) 5
) 5 , 4) 245
) 5https:/ /urait.ru].

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

≥
http://moodle.smolgu.ru
≥ - http://biblioteka.smolgu.ru
≥ http://www.intuit.ru
≥ http://exponenta.ru
≥ http://www.mathnet.ru

8. Материально-техническое обеспечение

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа

)

Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации,)
)
)

Помещение для самостоятельной работы

.

9. Программное обеспечение

Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), 66975477 03.06.2016 ( ).

-)