

-

23 2022

**3**

2

4

-

144

-

16 2022

0

2022

- -  
- -

<b>-1.</b>	
<b>-3.</b>	

1		42	12	12	18
2		46	10	14	22
3		29	10	6	13
		27	-	-	27
		144	32	32	53+27

.

Для каждого из указанных ниже рядов: 1) найдите сумму  $n$  первых членов ряда ( $S_n$ ); 2) докажите его сходимость, пользуясь непосредственно ее определением; 3) найдите его сумму ( $S$ ).

а)  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$ ;      б)  $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$ ;

в)  $\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} + \dots$ ;      г)  $\arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{8} + \dots + \arctg \frac{1}{2 \cdot n^2} + \dots$ .

Укажите одну из возможных формул для  $n$ -го члена ряда:

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \dots$$

Напишите 5 первых членов ряда по известной формуле для его общего члена

$$a_n = \frac{(-1)^n (n-1)}{2^{n+3}}.$$

С помощью необходимого признака сходимости ряда установите, какие из следующих рядов заведомо расходятся:

а)  $0,001 + \sqrt{0,001} + \sqrt[3]{0,001} + \dots + \sqrt[n]{0,001} + \dots$ ;      б)  $\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{4}{3}} + \dots + \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} + \dots$ ;

в)  $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \dots + \frac{2n}{3^n} + \dots$ .

Определите множества сходимости следующих рядов:

а)  $x + x^4 + \dots + x^{n^2} + \dots$ ;

б)  $x + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{x^n}{\sqrt{n}} + \dots$ ;

в)  $x \operatorname{tg} \frac{x}{2} + x^2 \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \dots + x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} + \dots$ .

Докажите, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-2}}{1+(nx)^2}$  равномерно сходится на  $R = (-\infty, +\infty)$ .

Покажите, что ряд  $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{1+2x}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}} + \dots$  равномерно сходится на  $R_+ = (0, +\infty)$ . Сколько нужно взять членов, чтобы их сумма при любом неотрицательном  $x$  приближала бы сумму ряда с точностью до 0,001?

Покажите, что ряд  $x^2 + x^6 + \dots + x^{4n-2} + \dots$  равномерно сходится в каждом промежутке вида  $-1 + \omega \leq x \leq 1 - \omega$ , где  $\omega$  – любое положительное число, меньшее 1. Интегрированием данного ряда найти в интервале  $(-1, 1)$  сумму

$$\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7} + \dots + \frac{x^{4n-1}}{4n-1} + \dots$$

Найдите сумму ряда  $\frac{x}{1-2} + \frac{x^2}{2-3} + \dots + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{n(n+1)} + \dots$

Функция  $f$  определяется равенством  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{10^n}$ . Покажите, что

функция  $f(x)$  определена и непрерывна при любом  $x$ .

Найдите  $f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ .

Определите область сходимости ряда  $x + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots$ .

Убедитесь, что ряд  $\frac{\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 4\pi x}{4} + \dots + \frac{\sin 2^k \pi x}{2^k} + \dots$  равномерно сходится

на всей числовой оси. Покажите, что этот ряд нельзя почленно дифференцировать ни в каком числовом промежутке.

С помощью формул Эйлера  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$  и  $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$  докажите равенство

$$\cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi = \frac{\sin \frac{n\varphi}{2} \cos \frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}, \text{ где } \varphi \neq 2\pi k, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}.$$

Разложить функцию  $y = x^2$  в ряд Фурье: 1) в интервале  $[-\pi, \pi]$ ;

2) в интервале  $(0; 2\pi)$ .

При помощи полученных разложений вычислить суммы числовых рядов:

$$s_1 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots; \quad s_2 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} + \dots;$$

$$s_3 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots$$

Разложить в ряд Фурье функцию  $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in (-\pi, 0), \\ 3 & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$

Разложите в тригонометрический ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [-1, 0), \\ x, & \text{если } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

~~Разложите в тригонометрический ряд Фурье функцию~~

Разложите в ряд Фурье по косинусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{l}{2} - x, & \text{если } x \in (0, \frac{l}{2}], \\ 0, & \text{если } x \in (\frac{l}{2}, l), \quad l > 0. \end{cases}$$

Разложите в ряд

Для каждого из указанных ниже рядов: 1) найдите сумму  $n$  первых его членов ( $S_n$ ); 2) докажите его сходимость, пользуясь непосредственно ее определением; 3) найдите его сумму ( $S$ ).

а)  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$ ;      б)  $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} + \dots$  .

Укажите одну из возможных формул для  $n$ -го члена ряда:

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$$

С помощью необходимого признака сходимости ряда установите, какие из следующих рядов заведомо расходятся:

а)  $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{2n+1}{2n+2} + \dots$ ;      б)  $\frac{1}{1001} + \frac{2}{2001} + \frac{3}{3001} + \dots + \frac{n}{1001n+1} + \dots$  .

Зная, что сумма ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$  равна  $\frac{\pi^2}{12}$ , найдите сумму ряда

$$1 + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} - \frac{1}{6^2} + \dots$$

полученного перестановкой членов исходного ряда.

Исследуйте на сходимость ряд

$$\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k-3} + \dots$$

Будет ли сходящимся ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k-3} \right)$  ?

При каких значениях параметра  $\alpha$  сходится ряд

$$1 + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \dots ?$$

в) Докажите, что ряд  $\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{1}{(2k)^2}\right) + \dots$  сходится.

Будет ли сходиться ряд, получаемый из данного, если убрать скобки ?

г) Исследуйте на сходимость произведение по Коши рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n^3}} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

Найдите сумму ряда  $x + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \dots$  .

Покажите, что ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x)$  сходится неравномерно на отрезке  $[0; 1]$ .

Функция  $f$  определяется равенством  $f(x) = e^{-x} + 2e^{-2x} + \dots + ne^{-nx} + \dots$  .

Покажите, что  $f(x)$  непрерывна на интервале  $(0, +\infty)$ . Вычислите  $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x) dx$  .

Разложить функцию  $y = \sin \frac{\pi x}{4}$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $x_0 = 2$ .

Разложить функцию  $y = x^2 e^x$  в ряд Маклорена.

Найти первые пять членов ряда Тейлора для функции  $y = e^{\cos x}$  в окрестности точки  $x_0 = 0$ .

Доказать соотношения:

$$\cos \varphi + \cos 3\varphi + \dots + \cos(2n-1)\varphi = \frac{\sin 2n\varphi}{2 \sin \varphi}, \text{ где } \varphi \neq \pi k, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin \varphi + \sin 2\varphi + \dots + \sin n\varphi = \frac{\sin \frac{n\varphi}{2} \sin \frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}, \text{ где } \varphi \neq 2\pi k, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}.$$

Разложить в ряд Фурье функцию  $y = x^3$  в интервале  $(-\pi; \pi)$ .

Разложить в ряд по синусам функцию  $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$  в интервале  $(0; \pi)$ .

Разложить в ряд по косинусам функцию  $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$  в интервале  $(0; \pi)$ .

Разложить функцию  $y = \operatorname{ch} x$  в интервале  $(0; \pi)$  в ряд косинусов и в ряд синусов.

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{n+1}{n}^{n^2}}{5^n}$$

3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2013}}$$

4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(x+4)^n}$$

5.



---

		*)
1		

(\*)

1		4,75-5
2		3,75-4,5
3		3-3,5
4		

---

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11.

12.

13.

14.

15.

16.

17.

18.

19.

20.

21.

22.

23.

24.

25.

26.

27.

28.

$e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ .

29.

$\ln(1+x)$ ,  $(1+x)^\mu$ .

30.

- 31.
- 32.
- 33.
- 34.
- 35.
- 36.
- 37.
- 38.

- 1.
- 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

3.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$$

4.

$$x_0 = 2$$

5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2$$

1		

(\*)

1		4,75-5
2		3,75-4,5
3		3-3,5
4		

1.

3-

ISBN 978-5-534-09085-7.

URL: <https://urait.ru/bcode/450170>

2.

ISBN 978-5-534-08225-8.

URL: <https://urait.ru/bcode/455638>

3.

5-

5-534-03203-1.

<https://urait.ru/bcode/451193>

ISBN 978-  
URL:

- 1.
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.
- 6.

- 2.
- 3.

1. <http://cdo.smolgu.ru>
- 2.
- 3.
- 4.
- 5.

- <http://biblioteka.smolgu.ru>
- <http://www.intuit.ru>
- <http://www.mathnet.ru>

MicrosoftOpenLicense (WindowsXP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016),  
66975477 03.06.2016 ( ).

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН  
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 03B6A3C600B7ADA9B742A1E041DE7D81B0  
Владелец: Артеменков Михаил Николаевич  
Действителен: с 04.10.2021 до 07.10.2022