

« »

« »

«2» 2020 .

**Рабочая программа дисциплины
Б1.О.34 Числовые и функциональные ряды**

**: 01.03.02 Прикладная математика и информатика
(): Математическое и информационное моделирование**

-2
-4

-4, - 144

: -4

«26» 2020 ., 1

1. Место дисциплины в структуре ОП

1
« 4 »
, « », « », « », « », « »
« », « »
« »
« »

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

ОПК-1. « » ()	Знать: « » ; Уметь: « » ; Владеть: « » »
ОПК-3.	Знать: « » ; Уметь: « » ; Владеть: « »

3. Содержание дисциплины

Числовые ряды.

Функциональные последовательности и ряды.

Ряды и интеграл Фурье.

4. Тематический план

/						
1		46	14	6	8	18
2		46	12	6	6	22
3		25	8	4	2	11
		27	-	-	-	27
		144	34	16	16	51+27

5. Виды образовательной деятельности

Занятия лекционного типа

Лекция №1. Числовые ряды.

Лекция №2. Числовые ряды.

Лекция №3. Числовые ряды.

Лекция №5. Числовые ряды.

Лекция №6,7. Числовые ряды.

Лекция №8. Функциональные последовательности и ряды.

Лекция №9. Функциональные последовательности и ряды.

Лекция №10. Функциональные последовательности и ряды.

Лекция №11. Функциональные последовательности и ряды.

Лекция №12. Функциональные последовательности и ряды.

Лекция №13. Ряды и интеграл Фурье.

Лекция №14. Ряды и интеграл Фурье.

Лекция №15. Ряды и интеграл Фурье.

Лекция №16. Ряды и интеграл Фурье.

Лекция №17. Ряды и интеграл Фурье.

Занятия семинарского типа – практические занятия

[7].

Практическое занятие №1. Числовые ряды.

Для каждого из указанных ниже рядов: 1) найдите сумму n первых членов ряда (S_n); 2) докажите его сходимость, пользуясь непосредственно ее определением; 3) найдите его сумму (S).

а) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$; б) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} + \dots$;

в) $\frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} + \dots$; г) $\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{8} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{1}{2 \cdot n^2} + \dots$

Практическое занятие №2. Числовые ряды

Укажите одну из возможных формул для n -го члена ряда:

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \dots$$

Напишите 5 первых членов ряда по известной формуле для его общего члена

$$a_n = \frac{(-1)^n (n-1)}{2^{n+3}}$$

Практическое занятие №3. Числовые ряды

С помощью необходимого признака сходимости ряда установите, какие из следующих рядов заведомо расходятся:

а) $0,001 + \sqrt{0,001} + \sqrt[3]{0,001} + \dots + \sqrt[n]{0,001} + \dots$; б) $\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{4}{3}} + \dots + \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} + \dots$;

в) $\frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{6}{27} + \dots + \frac{2n}{3^n} + \dots$

Практическое занятие №4. Функциональные последовательности и ряды

Определите множества сходимости следующих рядов:

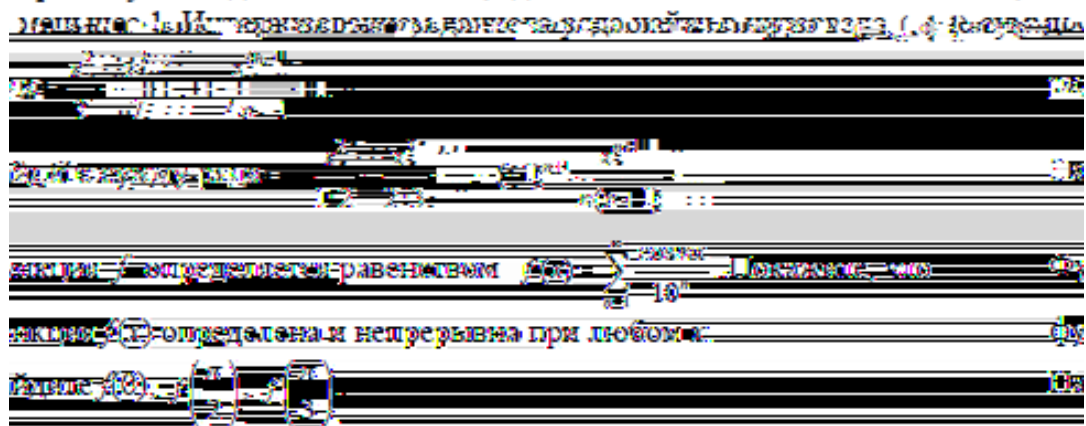
- а) $x + x^4 + \dots + x^{n^2} + \dots$;
б) $x + \frac{x^2}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{x^n}{\sqrt{n}} + \dots$;
в) $x \operatorname{tg} \frac{x}{2} + x^2 \operatorname{tg} \frac{x}{4} + \dots + x^n \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} + \dots$.

Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-2}}{1+(nx)^2}$ равномерно сходится на $R = (-\infty, +\infty)$.

Покажите, что ряд $\frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{2\sqrt{1+2x}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}\sqrt{1+nx}} + \dots$ равномерно сходится на $R_+ = (0, +\infty)$. Сколько нужно взять членов, чтобы их сумма при любом неотрицательном x приближала бы сумму ряда с точностью до 0,001?

Практические занятия №5. Функциональные последовательности и ряды

Покажите, что ряд $x^2 + x^6 + \dots + x^{4n-2} + \dots$ равномерно сходится в каждом промежутке вида $-1 + \omega \leq x \leq 1 - \omega$, где ω – любое положительное число,



Практическое занятие №6. Функциональные последовательности и ряды.

Определите область сходимости ряда $x + \frac{x^2}{2^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots$.

Убедитесь, что ряд $\frac{\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 4\pi x}{4} + \dots + \frac{\sin 2^n \pi x}{2^n} + \dots$ равномерно сходится на всей числовой оси. Покажите, что этот ряд нельзя почленно дифференцировать ни в каком числовом промежутке.

Практическое занятие № 7. Ряды и интеграл Фурье.

С помощью формул Эйлера $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ и $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ докажите равенство

$$\cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi = \frac{\sin \frac{n\varphi}{2} \cos \frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}, \text{ где } \varphi \neq 2\pi k, n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}.$$

Разложить функцию $y = x^2$ в ряд Фурье: 1) в интервале $[-\pi, \pi]$;

2) в интервале $(0; 2\pi)$.

При помощи полученных разложений вычислить суммы числовых рядов:

$$s_1 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots; \quad s_2 = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^2} + \dots;$$

$$s_3 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} + \dots.$$

Разложить в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in (-\pi, 0), \\ 3 & \text{при } x \in (0, \pi). \end{cases}$

Практическое занятие №8. Ряды и интеграл Фурье

Разложите в тригонометрический ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in [-1, 0), \\ x, & \text{если } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

~~Разложите в тригонометрический ряд Фурье функцию~~

Разложите в ряд Фурье по косинусам функцию

$$f(x) = \begin{cases} \frac{l}{2} - x, & \text{если } x \in (0, \frac{l}{2}], \\ 0, & \text{если } x \in (\frac{l}{2}, l), \quad l > 0. \end{cases}$$

Лабораторные работы

Лабораторная работа 1. Сходящиеся числовые ряды и их основные свойства.

10 1-2 (6) [5].

Лабораторная работа 2. Признаки сходимости положительных числовых рядов.

10 3-6 (6) [5].

Лабораторная работа 3. Абсолютно и условно сходящиеся числовые ряды.

10 7-8 (6) [5].

Лабораторная работа 4. Основные свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.

10 9, 11 (6) [5].

Лабораторная работа 5. Радиус и область сходимости степенных рядов.

10 10, 13 (6) [5].

Лабораторная работа 6. Разложения основных элементарных функций в степенные ряды.

20 14 (6) [5].

Лабораторная работа 7. Некоторые приложения степенных рядов.

10 15 (6) [5].

11.6-11.10 1 [2].

Лабораторная работа 8. Условия сходимости тригонометрических рядов Фурье.

13.1-13.5, 16.4 1 [2].

Самостоятельная работа

[7]. :

Тема 1. «Числовые ряды».

Для каждого из указанных ниже рядов: 1) найдите сумму n первых его членов (S_n); 2) докажите его сходимость, пользуясь непосредственно ее определением; 3) найдите его сумму (S).

а) $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$; б) $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+3)} + \dots$

Укажите одну из возможных формул для n -го члена ряда:

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \dots$$

С помощью необходимого признака сходимости ряда установите, какие из следующих рядов заведомо расходятся:

а) $\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{2n+1}{2n+2} + \dots$; б) $\frac{1}{1001} + \frac{2}{2001} + \frac{3}{3001} + \dots + \frac{n}{1001n+1} + \dots$

Зная, что сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2}$ равна $\frac{\pi^2}{12}$, найдите сумму ряда

$$1 + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} - \frac{1}{6^2} + \dots$$

полученного перестановкой членов исходного ряда.

Исследуйте на сходимость ряд

$$\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k-3} + \dots$$

Будет ли сходящимся ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4k-1} - \frac{1}{4k-3} \right)$?

При каких значениях параметра α сходится ряд

$$1 + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{5^\alpha} + \frac{1}{7^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \dots ?$$

1. Докажите, что ряд $\left(1 - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{16}\right) + \dots + \left(\frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{1}{(2k)^2}\right) + \dots$ сходится.

Будет ли сходящимся ряд, получаемый из данного, если убрать скобки?

.. Исследуйте на сходимость произведение по Коши рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n^3}} \text{ и } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

Разложить функцию $y = \sin \frac{\pi x}{4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 2$.

Разложить функцию $y = x^2 e^x$ в ряд Маклорена.

Найти первые пять членов ряда Тейлора для функции $y = e^{\cos x}$ в окрестности точки $x_0 = 0$.

Тема 2. «Функциональные последовательности и ряды».

Найдите сумму ряда $x + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{4n-3}}{4n-3} + \dots$.

Покажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x^n (1-x)$ сходится неравномерно на отрезке $[0; 1]$.

Функция f определяется равенством $f(x) = e^{-x} + 2e^{-2x} + \dots + ne^{-nx} + \dots$.

Покажите, что $f(x)$ непрерывна на интервале $(0, +\infty)$. Вычислите $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x) dx$.

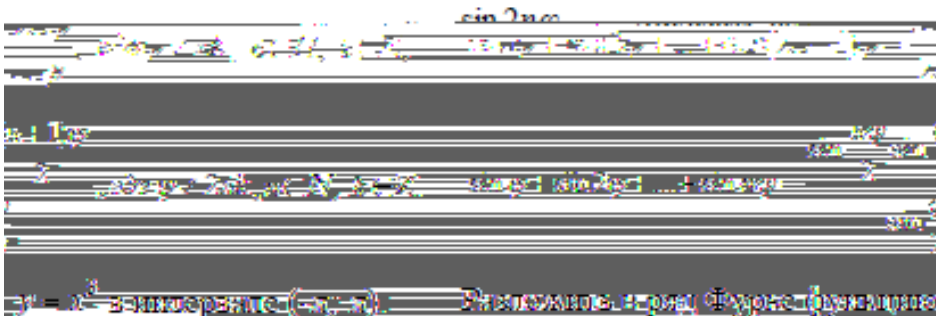
Разложить функцию $y = \sin \frac{\pi x}{4}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 2$.

Разложить функцию $y = x^2 e^x$ в ряд Маклорена.

Найти первые пять членов ряда Тейлора для функции $y = e^{\cos x}$ в окрестности точки $x_0 = 0$.

Тема 3. «Ряды и интеграл Фурье»

Доказать соотношения:



Разложить в ряд по синусам функцию $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ в интервале $(0; \pi)$.

Разложить в ряд по косинусам функцию $y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ в интервале $(0; \pi)$.

Разложить функцию $y = chx$ в интервале $(0; \pi)$ в ряд косинусов и в ряд синусов.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$
2. _____
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2013}}$
4. _____
5. _____

/		(*)
1		1

(*)

0,25

/		
1		4,75-5
2		3,75-4,5
3		3-3,5
4		3

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

1. _____
2. _____
3. _____
4. _____
5. _____
6. _____
7. _____
8. _____
9. _____

- 10.
- 11.
- 12.
- 13.
- 14.
15. ().
- 16.
- 17.
- 18.
- 19.
- 20.
- 21.
- 22.
- 23.
- 24.

- 25.
- 26.
- 27.
28. $e^x, \sin x, \cos x$.
29. $\ln(1+x), (1+x)^\mu$.
- 30.
- 31.
- 32.

- 33.
- 34.
- 35.
- 36.
- 37.
- 38.

- 1.
- 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

3.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$$

$$x_0 = 2$$

4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$$

5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)^2 \quad ?$$

/		
1		1

(*)

0,25

/		
1		4,75-5
2		3,75-4,5
3		3-3,5
4		3

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Основная литература

1. . . . 2 . 2: / . . . , 2020. — 324 . — (. . . . — 3- . — : . — ISBN 978-5-534-09085-7. — : // []. — URL: <https://urait.ru/bcode/450170>
2. , . . . : . : / . . . — : . , 2020. — 97 . — (. . . .). — ISBN 978-5-534-08225-8. — : // []. — URL: <https://urait.ru/bcode/455638>
3. , . . . : / — 5- . — : , 2020. — 164 . — (. . . .). — ISBN 978-5-534-03203-1. — : // []. — URL: <https://urait.ru/bcode/451193>

7.2.

1. — . 2, 3. — : - « . . . », 2008.
2. . . . / . . . , — . 2. — : , 2000.
3. , . . . , . . . / . . . [.]. — . 2. — : , 2010.
4. / . . . [.]. — . 3. — : , 2012.
5. . . . (. . .)
6. . . . « . . . ». 2005. : 2 010400 / . . . , . . . ; . . . - . . . : - , 2013. — 28 .
7. : — : - , 2014.
8. — : . . . , 2010.

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. <http://cdo.smolgu.ru>
2. -
3. <http://www.intuit.ru>
4. <http://www.mathnet.ru>
5. .

8. Материально-техническое обеспечение

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа,

Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации,

Помещение для самостоятельной работы –

« »

9. Программное обеспечение

Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016),
66975477 03.06.2016 ().

« »,

**ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**

Сертификат: 03B6A3C800B7ADA9B742A1E041DE7D81B0
Владелец: Артеменков Михаил Николаевич
Действителен: с 04.10.2021 до 07.10.2022