«

-

2 2020

Рабочая программа дисциплины
Б1.О.33 Дифференциальное и интегральное исчисление функций нескольких переменных

01.03.02 Прикладная математика и информатика
Математическое и информационное моделирование

-

2

3

144

3

:

-

26 2020 1

2020

1. Место дисциплины в структуре ОП

,

-
;
-
;
-
;
-
-
.
-
;
-
;
-

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

ОПК-1.	**Знать** **Уметь** **Владеть**

ОПК-3.	**Знать** **Уметь** **Владеть:**

3. Содержание дисциплины

1. Функции нескольких переменных. Предел и непрерывность. n -

n - n -

2. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.

.

.

3. Интегральное исчисление функций нескольких переменных.

.

.

, .

-

4. Основные операции теории поля.

4. Тематический план

				-	-
1	.	24	8	8	8
2		30	10	10	10
3		53	18	16	19
4		6		2	4
5		4			4
		27			27
		144	36	36	45+27

5. Виды учебной деятельности

Занятия лекционного типа

Лекция 1 «Понятие n-мерного координатного и n-мерного евклидова пространства. Последовательности точек в евклидовом пространстве и их предел»:

n - n -

;

.

Лекция 2 «Понятие функции нескольких переменных. График и линии уровня функций двух переменных»

Лекция 3 «Предел и непрерывность функции нескольких переменных»

;

; .

Лекция 4 «Основные свойства непрерывных функций. Понятие равномерной непрерывности функций нескольких переменных»:

Лекции 5-7 «Частные производные и дифференцируемость функций нескольких переменных»

.

Лекция 8 «Формула Тейлора для функций нескольких переменных. Неявное задание функций. Дифференцирование неявной функции»:

;

.

Лекция 9. «Экстремумы функций нескольких переменных. Наибольшие и наименьшие значения функций нескольких переменных»:

.

Лекции 10-12 «Двойные и тройные интегралы и их приложения»:

;

;

Лекции 13-15 «Криволинейные интегралы и их приложения»:

;

;

.

Лекция 16-17 «Поверхностные интегралы и способы их вычисления»:

.

Лекция 18 «Формулы Стокса и Остроградского-Гаусса»:

-

Занятия семинарского типа (практические занятия)

Практическое занятие №1. «Понятие *n*-мерного евклидова пространства. Открытые и замкнутые множества. Предел последовательности точек»

I

1. *n*- *n*-

2. *n*- $K(M_0; r)$; *n*- $S(M_0, r)$?

3. E $\boldsymbol{R}^2$. E

4. E $\boldsymbol{R}^2$

5. $\boldsymbol{R}^2$.

6. $\boldsymbol{R}^2$

7. $M_n(x_n, y_n)$ $\boldsymbol{R}^2$.

II

1.1. $a_1, a_2, ..., a_n$ $b_1, b_2, ..., b_n$ -

$$\sum_{i\ 1}^{n} a_i b_i \} \sqrt{\sum_{i\ 1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i\ 1}^{n} b_i^2} .$$

1.2. M_1, M_2, M_3 $\boldsymbol{R}^{\text{n}}$ $(M_1, M_2) \}$ (M_1, M_3) (M_3, M_2).

1.3. $S(M_0, r)$

1.4. $M_0(x_0, y_0)$ E $\boldsymbol{R}^2_{xy}$ $\{M_n(x_n, y_n)\}$ $M_0(x_0, y_0)$, E $M_n(x_n, y_n)$ $M_0(x_0, y_0)$ n $\boldsymbol{N}$.

1.5. $\{M_n\}$ E $\boldsymbol{R}^2$ M_0 M_0 E.

1.6. Σ $\{(x, y)$ $\boldsymbol{R}^2_{xy} \left| x^2 \right.$ $y^2 \} 1$ x $[0, 1]\}$

1.7. M_n $tg \frac{1}{n}, (1 \quad \frac{1}{n})^n$.

III

1.8. $\{M_n\}$ E $\boldsymbol{R}^2$ M_n M_0 n M_0 E .

1.9. E

1.10. $M(x, y)$ $\boldsymbol{R}^2_{xy}$ $\cos(x^2 \quad y^2)$ 0 ,

1.11. M_n $\frac{n^2\ )\ 1}{n^2 \quad 1}, \frac{n \quad 1}{5n}$.

1.12. Q_n $\cos n, 5$ ү

Практическое занятие №2. «Понятие функции нескольких переменных. График и линии уровня функции двух переменных»

I

1. n

2.
3.
4. $Z \quad f(x,y)$?
5. $Z \quad f(x,y)$.

II

с - 2.4:

2.1. $Z \quad \dfrac{1}{x \quad y}$; 2.2. $Z \quad \sqrt{1) \ \dfrac{x^2}{9} \ ) \ \dfrac{y^2}{4}}$; 2.3. $Z \quad \sqrt{) \ x} \quad \sqrt{y}$;

2.4. $U \quad \arcsin\dfrac{x}{a} \quad \arcsin\dfrac{y}{b} \quad \arcsin\dfrac{z}{c}$.

2.5.

$\boldsymbol{R}^2_{xy}$ $\qquad \Gamma \quad (x,y) \quad R^2 \big| \ x^2 \quad y^2 \quad 25$.

2.6.

2.7.

$a)\ Z \quad x \quad y\ )\ 1$; $b)\ Z \quad xy$.

2.8. $h \quad 1$

$a)\ Z \quad x \quad y$; $б)\ Z \quad \dfrac{1}{2x^2 \quad 3y^2}$.

III

2.9. с

a) $Z \quad \dfrac{x}{y}$; b) $Z \quad \arccos\dfrac{x^2 \quad y^2}{9}$.

2.10.

$D \quad (x,y) \quad R^2 \big| x^2 \quad y^2 \ \} \ 100, \quad x \quad 0$.

R,

$x \qquad y$

2.12. $Z \quad \sqrt{x^2 \quad y^2}$.

2.13. $h \quad 1$

$a)\ Z \quad 2x \quad y$; $б)\ Z \quad \sqrt{x/y}$.

Практическое занятие №3. «Предел и непрерывность функции нескольких переменных»

I

$Z \quad f(M) \qquad M_0$ -

$$\lim_{M \quad M_0} f(M) \quad b, \quad \lim_{M \quad M_0} g(M) \quad c, \qquad b \quad c$$

$\lim_{M \quad M_0} \Omega f(M) \quad g(M) \quad b \quad c$

Z $f(M)$ M

$f(M)$ $\lim_{M} f(M)$ 1.

Z $f(M)$ M_0.

Z $f(M)$ M_0?

M_0

z $f(x, y)$

III

$$\lim_{\substack{x\ \ 0\\ y\ \ 0}} \frac{\sqrt{1 \quad x^2y^2}\ )\ 1}{x^2 \quad y^2}.$$

3

$$\lim_{\substack{x\ \ 0\\ y\ \ 0}} \frac{(x^2 \quad y^2)x^2y^2}{1)\ \cos(x^2 \quad y^2)}.$$

$$\lim_{\substack{x\\ y}} \quad x^2 \quad y^2 \quad \sin\frac{1}{x^2 \quad y^2} \quad .$$

$$f(x,y) \quad \begin{matrix} \dfrac{x^3 \quad y^3}{x^4 \quad y^2}, & (x;y) \quad (0;0), \\ 0, & (x;y) \quad (0;0), \end{matrix}$$

$O(0,0)$.

3.14.

$$a)\ Z \quad \frac{2x)\ 3}{x^2 \quad y^2)\ 4};\ b)\ W \quad \frac{1}{x^2 \quad y^2 \quad z^2)\ 16}.$$

$$Z \quad \frac{x^4 \quad y^4 \quad x^3y^3}{x^4 \quad y^4}.$$

$$f(x,y) \quad \begin{matrix} \dfrac{\cos(x)\ \ y))\ \cos(x \quad y)}{2xy}, & xy \quad 0, \\ 1, & xy \quad 0, \end{matrix}$$

$O(0,0)$ $A(1,0)$.

$$g(x,y) \quad \begin{matrix} \dfrac{x^2y^2}{x^4 \quad y^4}, & x^4 \quad y^4 \quad 0, \\ 0, & x^4 \quad y^4 \quad 0, \end{matrix}$$

$O(0,0)$ $B(1,2)$.

Практическое занятие №4. «Основные свойства непрерывных функций. Понятие равномерной непрерывности функций нескольких переменных»

I

1.

2. D

$$U(x,y) \quad \begin{matrix} \dfrac{\sin(x \quad y)}{x \quad y}, & x \quad y \quad 0, \\ 1, & x \quad y \quad 0, \end{matrix}$$

$\boldsymbol{R}^2_{xy}$?

3.

4. D

$$V(x,y) \quad \begin{cases} \dfrac{\sin(x \quad y)}{x}, & x \quad 0, \\ 0, & x \quad 0, \end{cases}$$

$K \quad x, y \quad R^2 \left| x^2 \quad y^2 \right\} 1 \}$?

5. D

$K \quad x, y \quad R^2 \left| x^2 \quad y^2 \right\} 1 \}$.

6. $Z \quad f(x,y)$

$E \quad \boldsymbol{R}^2_{xy}$. $U \quad x^2 \quad y^2$ $\boldsymbol{R}^2_{xy}$?

7.

II

$$f(x,y) \quad \frac{x^6 \quad y^6}{x^2 \quad y^2}$$

$\Sigma \quad \{(x,y) \quad \boldsymbol{R}^2_{xy} \left| 0 \quad x^2 \quad y^2 \right\} 9\}$ $\sup\limits_{\Sigma}\{f(x,y)\} \quad \inf\limits_{\Sigma}\{f(x,y)\}$.

- $K(M_0, \ )$

$M_0 \ \overline{3}, \ ) \ \overline{3}$ $$f(x,y) \quad \begin{cases} \dfrac{\sin x \quad \sin y}{x \quad y}, & x \quad y \quad 0, \\ \dfrac{1}{2}, & x \quad y \quad 0, \end{cases}$$

$$g(x,y) \quad \sin(\frac{}{2}) \ x^2 \ ) \ y^2)$$

$O(0,0)$

$$f(x,y) \quad x^2 \quad y^2$$

$T \quad (x,y) \quad R^2 \left| 1 \} \ x \quad 4, \ 2 \} \ y \quad 6 \right\}$

$Z \quad x^2 \quad y^2 \ e^{xy}$

$Q \quad \{(x,y) \quad R^2 \left| 1 \} \ x^2 \quad y^2 \right\} 4\}$ $e\sqrt{e}$?

$f(x,y) \quad \sqrt{4 \ ) \ x^2 \ ) \ y^2}$ ee

III

$$f(x,y) \quad \frac{x^2 \ ) \ y^2}{x^2 \quad y^2} \qquad \Sigma$$

$\boldsymbol{R}^2_{xy} \setminus \{O(0,0)\}$ $\sup\limits_{\Sigma}\{f(x,y)\} \quad \inf\limits_{\Sigma}\{f(x,y)\}$

$U = \sqrt{16 \ ) \ x^2 \ ) \ y^2 \ ) \ z^2}$.

$Z \quad \begin{cases} 0, & x \quad y, \\ x, & x \quad y, \end{cases}$ $O(0,0)$?

?

$f(x,y)$

$g(x,y) \quad \cos(\quad) \; x^2 \;) \; y^2)$

$O(0,0)$

$U(x,y) \quad x^2 \quad y^2$ $\overline{K} \quad \{(x,y) \quad \mathbf{R}^2_{xy} \, | x^2 \quad y^2 \} \; 1\}$.

Практическое занятие №5. «Частные производные и дифференцируемость функций нескольких переменных»

I

1. $V \quad f(x_1, ..., x_n)$ x_n

2. $\frac{U}{x} \quad \frac{U}{y}$ $U \quad xy^2$.

3. $Z \quad f(x,y)$ $M_0(x_0, y_0)$.

4. $M_1(x_1, y_1)$ $Z \quad f(x,y)$

5. $Z \quad f(x,y)$ $M_0(x_0, y_0)$?

6.

7. $Z \quad f(x,y)$ $P_0(x_0, y_0, Z_0)$.

8. $Z \quad f(x,y)$ $M_0(x_0, y_0)$.

II

5.1.

$a)\; Z \quad x^2 y \,) \; xy^2 \quad 3; \; b)\; Z \quad (x^2 \quad y^2)^3; \; c)\; Z \quad \frac{x}{y} e^{xy}; \; d)\; Z \quad \cos \quad .$

5.2. $f(x,y) \quad \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 \quad y^2}}, & x^2 \quad y^2 \quad 0; \\ 0, & x \quad 0, y \quad 0, \end{cases}$

$O(0,0)$ $f_x(0,0)$, $f_y(0,0)$

5.3. $\frac{f}{y} \partial \, 0$ $D \quad R^2$ $f(x,y)$

y $f(x,y_1) \quad f(x,y_2)$ $M(x,y_1) \quad N(x,y_2)$

D $\frac{f}{x}$ $\frac{f}{y}\partial 0$ D R^2 $f(x,y)$

5.4. Z $\sqrt{1)\ x^2\ )\ y^2}$

$P_0(0,0,1)$.

5.5. Z x y^2

$P_0(0,1,1)$.

III

$a)$ Z $xy)$ $\frac{y}{x}$; $b)$ H $\ln(x^2$ $y)$; $c)$ U $\sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2}$.

$O(0,0)$ $f_x(0,0)$,

$f_y(0,0)$

$\frac{f}{y}$ $M(1,2)$

$f(x,y)$ x^{x^y} $(\ln x)$ $\{\mathrm{arctg}^4[\mathrm{arctg}(\sin xy)])$ $\ln^3(x$ $y)\}$.

Z x^2 y^2

$Q_0(1,\ 2,\ 5)$.

Практическое занятие №6. «Достаточные условия дифференцируемости функций нескольких переменных. Применение дифференциала к приближенным вычислениям»

I

1.

Z $f(x,y)$ $M_0(x_0,y_0)$.

2.

Z $f(x,y)$ $M_0(x_0,y_0)$.

3. $P(x,y)$ x y

$\boldsymbol{R}^2_{xy}$.

4. $U(x,y) =$ $\begin{cases} 0, & xy \quad , \\ 1, & xy \end{cases}$

$O(0;0)$?

5.

?

II

$$f(x,y) \quad \begin{cases} (x^2 \quad y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2 \quad y^2}}, & x^2 \quad y^2 \quad 0, \\ 0, & x^2 \quad y^2 \quad 0, \end{cases}$$

$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ $O(0,0)$

$O(0,0)$

$O(0,0)$.

$Z \quad x^y y^x$

$x\frac{Z}{x} \quad y\frac{Z}{y} \quad (x \quad y \quad \ln Z) \ Z$.

$V \quad \frac{1}{3}\ h(R^2 \quad r^2 \quad Rr)\ (h \qquad R \quad r$

R

$V(R)$:

a *b* R = 10 *см*, r = 4 *см*, h = 5 *см*, R = 0,1 *см*.

а)

$\sin 59^0 tg 46^0$; b) $2{,}003^2 \quad 3{,}998^3 \quad 1{,}002^2$.

III

$$Z \quad \begin{cases} \dfrac{x^3 \quad y^3}{x^2 \quad y^2}, & \textit{если } x^2 \quad y^2 \quad 0, \\ 0, & \textit{если } x^2 \quad y^2 \quad 0, \end{cases}$$

$O(0,0)$

$$Z \quad \frac{x)\ y}{z)\ t} \quad \frac{t)\ x}{y)\ z}$$

$$\frac{u}{x} \quad \frac{u}{y} \quad \frac{u}{z} \quad \frac{u}{t} \quad 0 .$$

$Z = x^3 + y^2$ $M(1;1)$

$x \quad y$.

a = (31,4 0,15) *см*, b = (26,2 0,1) *см*, c = (42,3 0,3) *см*.

$\sqrt{1{,}98^2 \quad 1{,}01^2}$.

Практическое занятие №7. «Дифференцирование сложной функции. Частные производные и дифференциалы высших порядков»

I

1.

2.

3. $f(M)$ $M_0(x_0, y_0)$ l.

4. $\dfrac{f(M_0)}{l}$ $M_0(x_0, y_0)$?

5. $Z \quad f(x,y)$ $M_0(x_0, y_0)$?

6. $\dfrac{f(M_0)}{l}$?

7. $Z \quad f(x,y)$

$x \quad y \quad M(x,y)$.

8. $Z \quad f(x,y)$

$U \quad [\sin(x \quad y)]^{\cos xy}$

$M(x,y)$, $\sin(x \quad y) \quad 0$

9. n- $U \quad f(x_1,...,x_n)$

10. $Z \quad f(x,y)$

$M_0(x_0,y_0)$.

11. $Z \quad f(x,y)$.

12. n) *го* $Z \quad f(x,y)$.

II

7.1. $Z \quad x^2 \quad xy \quad y^2$ $x \quad \sin t$, $y \quad \cos t$ $\frac{dZ}{dt}$ dZ.

7.2. $Z \quad x^2 y) \; xy^2$ $x \quad \cos$, $y \quad \sin$ $\frac{Z}{}$, $\frac{Z}{}$ dZ.

$Z \quad xy \;\; arctg(xy)$, $x \quad t^2 \quad 1$, $y \quad t^3$,

$g(x,y) \quad 5xy^3) \; x^2$ M_0

$b \quad 3i \quad 15j$.

7.5

$$Z \quad \ln\sqrt{x^2 \quad y^2}.$$

$$f(x,y) \quad \begin{cases} \dfrac{xy\,(x^2\;)\;y^2)}{x^2 \quad y^2}, & x^2 \quad y^2 \quad 0, \\ 0, & x \quad y \quad 0, \end{cases}$$

$f_{xy}(0;0) \quad f_{yx}(0;0)$.

III

7.7. $Z \quad \cos(2x \quad 4x^2\;)\;y)$ $x \quad \frac{1}{t}, y \quad \frac{\sqrt{t}}{\ln t}$. $\frac{dZ}{dt}$ dZ.

7.8. $Z \quad e^{xy}\ln(x \quad y)$, $x \quad t^3$, $y \quad 1)\;t^3$. $\frac{dZ}{dt}$ dZ.

$Z \quad x^y \quad y^x$, $x \quad U^2 \quad V^2$, $y \quad U^2\;)\;V^2$,

.

$h(x,y) \quad 3xy^4\;)\;x^2y$ $M_0(1,\;)\;1)$

$b \quad 5i \quad 11j$.

$$Z = \ln tg\,\frac{y}{x}.$$

7.12. $f(x,y) \quad y\sqrt[3]{x}$. $f_x(1;1)$, $f_y(1;1)$, $f_{xx}(1;1)$, $df(1;\,1)$.

Практическое занятие №8. «Формула Тейлора для функции двух переменных. Понятие неявной функции. Дифференцирование неявных функций»

1.

$Z \quad f(x,y)$ $M_0(x_0, y_0)$.

2. *многочленом Тейлора* n *-й степени для функции* $f(x,y)$ *в окрестности точки* $M_0(x_0, y_0)$?

3. $f(x,y)$

$M_0(x_0, y_0)$?

4. $F(x,y) \quad 0$,

5.

$F(x,y) \quad 0$ $F(x,y,z) \quad 0$).

6. $f\ (0)$ $f\ (0)$ $y \quad f(x)$

$x^2 \quad y^2\ )\ 1 \quad 0$ $f(0) \quad 1$

$x = 0$.

II

$f(x,y) \quad e^{\frac{x}{y}}$

$M_0(0,1)$

$y^4\ )\ 4x^2y^2 \quad \sin x \quad 0$ y x.

$F(x,y) \quad 0$ $y \quad f(x)$

$M_0(x_0, y_0)$

$F(x,y) \quad x^3 \quad y^3\ )\ 3axy,\ x_0 \quad a\sqrt[3]{4},\ y_0 \quad a\sqrt[3]{2},\ a \quad 0$?

$y \quad f(x)$

$xe^{2y}\ )\ y \ln x\ )\ 8 \quad 0$.

$z(x,y)$,

$z^3 \quad 3x^2z \quad 2xy$.

III

$Z \quad x^2 \ln y$ $M_0(1,1)$ $n \quad 2$.

$e^{x^2 \quad y^3}\ )\ x^6\ )\ 5 \quad 0$ y x.

$F(x,y) \quad 0$ $y \quad f(x)$

$M_0(x_0, y_0)$ $F(x,y) \quad x(x^2 \quad y^2))\ a(x^2\ )\ y^2),\ x_0 \quad y_0 \quad 0,\ a \quad 0$.

$y \quad f(x)$

$e^y \quad ax^2e^{)\ y}\ )\ 2bx \quad 0$ $a \quad const \quad 0$ $b \quad const \quad 0$.

8.10. $z(x,y)$,

$x^2\ )\ 2y^2 \quad z^2\ )\ 4x \quad 2z\ )\ 5 \quad 0$.

Практическое занятие №9. «Экстремумы функций нескольких переменных. Наибольшие и наименьшие значения функции»

I

1. $Z \quad f(M)$.

2\.
$Z \quad f(M)$ $Z \quad f(M)$
$M_0(x_0, y_0)$ $Z_x(M_0) = 0$ $Z_y(M_0) = 0$ $M_0(x_0, y_0)$

3\. $Z \quad f(x, y)$?
$Z \quad f(x, y)$ $M_0(x_0, y_0)$
$Z_x(M_0) = 0,$ Z_y M_0
2\. ?
4\.
$Z \quad f(x, y)$ $M_0(x_0, y_0)$.
5\. $Z \quad f(x, y)$
$(x, y) \quad 0$.
6\.

7\.
$Z \quad f(x, y)$ $D \quad \boldsymbol{R}^2$.
II

a) $Z \quad xy(1) \; x) \; y)$; b) $Z \quad \sin x \quad \sin y \quad \sin(x \quad y)$ $0 \} \; x \} \; \frac{}{2}, \; 0 \} \; y \} \; \frac{}{2}$.
$Z \quad xy$ $x^2 \quad y^2 \quad 1$.
$Z(x, y)$

a) $Z \quad x) \; 2y) \; 3$ $D \quad \{(x, y) \quad R^2 | 0 \} \; x \} \; 1, \; 0 \} \; y \} \; 1, \; 0 \} \; x \quad y \} \; 1\}$;
b) $Z \quad \sqrt{1) \; x^2 \;) \; y^2}$ $x^2 + y^2 \} \; 1$.
$y \quad x^2$ $x) \; y) \; 2 \quad 0$.
III

a) $Z \quad 3x^2 y) \; x^3 \;) \; y^4$; b) $Z \quad xy \ln(x^2 \quad y^2)$.
$Z \quad \frac{1}{x} \quad \frac{1}{y}$ $x \quad y$
$x \quad y \quad 2a$ $a \quad 0$.
$Z \quad x^2 \quad 3y^2 \;) \; x \quad 18y) \; 4$,
$D \quad (x, y) \quad R^2 | 0 \} \; x \} \; 1, 0 \} \; y \} \; 1 \rangle$.

Практическое занятие №10. «Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла. Определение ион своксов ивокногоринтегра«

3\.
4\.

5. $Z \quad f(x,y)$ D

6.

7.

8.

9. $\iint\limits_G f(x,y)dxdy$

$G \quad \{(x,y) \quad R^2 \big| (x\ )\ 1)^2 \quad (y\ )\ 2)^2\ \}\ 25\}$.

II

10 $f(x,y)$ G G

$x = 0, y = 0, x^2 + y^2 = r^2$.

10 $\int\limits_0^4 dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\ dy$.

10

$\int\limits_0^1 \int\limits_{2x}^{3x}$

G.

10

a) $\int\limits_3^4 dx \int\limits_1^2 \frac{dy}{(x \quad y)^2}$; b) $\iint\limits_G e^{\frac{x}{y}} dxdy$ G $x = y^2$, $x = 0$, $y = 1$; c) $\int\limits_0^2 d \int\limits_{a\sin}^{a} rdr$.

10 $f(x,y) \quad \sin^2 x \ \sin^2 y$ $D = \{(x, y)$ $\boldsymbol{R}^2 \ 0\ \}\ x\ \} \quad , 0\ \}\ y\ \} \quad \}$.

III

10 $f(x,y)$ G G $y = x^3$, $x + y = 10$, $x - y = 4$, $y = 0$.

10.7. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f(x,y)dx$.

10.8. $\sqrt{y}$

$)\ y$

G?

10

a) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1)\ x^2}} \sqrt{1)\ x^2\ )\ y^2} dy$;

b) $\iint\limits_G \cos(x \quad y)dxdy$ G $x = 0, y = \quad , y = x$.

Практическое занятие №11. «Замена переменных в двойном интеграле. Двойной интеграл в полярных координатах»

I

$x = \ (u, v), y = \ (u, v)$?

OXY

$\Pi \quad (\ , \ ) | 0 \} \quad \} 1, \ 0 \} \quad \} 2 \ \}$ $\quad x \quad cos \ ,$ $y \quad sin \ .$

?

II

11

a) $f(x, y)dxdy$ G

G

$x^2 + y^2 \} \ ax \quad x^2 + y^2 \} \ by$;

b) $\int_0^2 dx \int_0^x f(\sqrt{x^2 \quad y^2})dy$.

11 $u \quad x \quad y, \ v \quad x) \ y$

$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)dy$

11 $ydxdy$ G –

G

a a; 0).

11 $dxdy$ $u \quad xy, \ v \quad \frac{y^2}{x}$ G

G

$y^2 \quad 2x, \ y^2 \quad 3x$ $xy \quad 1, \ xy \quad 2$.

11 $\frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2} \quad 1$.

III

11

a) $f(x, y)dxdy$ G – $x^2 + y^2 \} \ ax$; b) $\int_0^R dx \int_0^{\sqrt{R^2) \ x^2}} f(x, y)dy$.

G

11 $(x^2 \quad y^2)dxdy$ G –

G

$x^2 + (y+2)^2 \} \ 4$.

11 $(x^2 \quad y^2)dxdy$ G –

G

$x^2 \quad y^2 \quad 2x) \ 1 \quad 0 \quad x^2 \quad y^2 \quad 2x \quad 0,$

$x \quad 1 \quad \cos \ , \ y \quad \sin \ .$

11 $xy \quad 4, \ x \quad y) \ 5 \quad 0$.

Практическое занятие №12. «Геометрические и механические приложения двойного интеграла. Понятие о тройном интеграле»

I

$\boldsymbol{R}^3$?

$\boldsymbol{R}^3$

$U \quad f(x, y, z)$

$D \quad \boldsymbol{R}^3$.

$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$?

II

12

1) x, y, z; 2) y, x, z; 3) z, x, y,

a) $\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$ $\quad D \quad \frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2} \quad \frac{z^2}{c^2} \quad 1$;

b) $\int_0^1 dx \int_0^{1)x} dy \int_0^{x \quad y} f(x,y,z)dz$.

12 $\quad \int_0^x dt \int_0^t du \int_0^u f(v)dv$

12

a) $\iiint_D (x \quad y \quad z)dxdydz$ $\quad D$

$0 \} \ x \} \ a, 0 \} \ y \} \ b, 0 \} \ z \} \ c$;

b) $\iiint_D xy^2z^3dxdydz$ $\quad D \quad Z = xy, y = x, x = 1, z = 0.$

12 $\quad y^2 \quad 4) \ x$

$2y^2 \quad x \quad 8$.

III

12

x, y, z ; 2) y, x, z ; 3) z, x, y,

a) $\iiint_D f(x,y,z)\,dxdydz$ $\quad D$

$x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 1.$

b) $\int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^{x^2 \quad y^2} f(x,y,z)dz$.

12.6.

a) $\iiint_D \quad \sin \quad d \quad d \quad d$ $\quad D$

$0\} \quad \} \ \frac{}{2}, 0\} \quad \} \ 2 \ , 0\} \quad \} \ \frac{}{2}$;

b) $\iiint_D x\,dx\,dy\,dz$ $\quad D \quad x= 0, y=0, z = 0, y = h, x + y =a.$

12

$x^2 \quad y^2 \quad 1 \qquad z \quad y \quad z \quad 2y$.

Практическое занятие №13. «Криволинейный интеграл по координатам (второго рода). Формула Грина»

I

1. ?
2.

?

3. ?
4. .
5.
6.
7. ?
8.
9.

II

13

a) $\int_L xdy$ L $\frac{x}{a} \quad \frac{y}{b} \quad 1$ $(a;0)$ $(0;b)$;

b) $\int_L (x^2 \quad y^2)dy$ L $x \quad 1,\ x \quad 3,$ $y \quad 1,\ y \quad 5$ L

c) $\int_L ydx \quad xdy$ L $x \quad r\cos t$, ,

13

$$\int_L \sqrt{x^2 \quad y^2}dx \quad y[xy \quad \ln(x \quad \sqrt{x^2 \quad y^2})]dy .$$

13 $\int_L (x \quad y)^2 dx)\ (x^2 \quad y^2)dy$

L $A(1,1)$, $B(3,2)$, $C(2,5)$

13

$x \quad a(2\cos t\ )\ \cos 2t), \quad y \quad a(2\sin t\ )\ \sin 2t), \ 0 \} \ t \} \ 2$.

III

13

a) $\int_L (x^2\ )\ y^2)dx$ L $y= x^2$ $(0;0)$ $(2;4)$;

$\int_L (2a\ )\ y)dx \quad xdy$, L

$x \quad a(t\ )\ \sin t), \quad y \quad a(1)\ \cos t), \ 0 \} \ t \} \ 2$.

13

$x^3 \quad y^3 \quad 3axy \quad (a \quad 0)$. *Указание*: *положить* $y \quad tx$.

13

$\underset{L}{\circ}\, xy^2dx\,)\ \ x^2dy$, L $x^2 \quad y^2 \quad a^2$.

Практическое занятие №14. «Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования. Восстановление функции по ее полному дифференциалу»

1. $\underset{AB}{} P(x, y)dx \quad Q(x, y)dy$

D ?

2.

$\underset{AB}{} P(x, y)dx \quad Q(x, y)dy$

3. $P(x, y)dx \quad Q(x, y)dy$

$F(x, y)$?

4. $F(x, y)$ D

II

14

a) $\int\limits_{(\,)\,1;\,2)}^{(2;\,3)} xdy \quad ydx$; b) $\int\limits_{(0;1)}^{(1;\,2)} \frac{2x}{y^3}dx \quad \frac{y^2\,)\ 3x^2}{y^4}dy$.

14.2.

a) $(x^2 \quad 2xy\,)\ y^2)dx \quad (x^2\,)\ 2xy\,)\ y^2)dy$;

b) $(\frac{y}{\sqrt{1 \quad x^2 \quad y^2}}\,)\ \frac{x}{x^2 \quad y^2})dx \quad 2xydy$.

14.3. $F(x,\ y)$

$y^2 \quad 8x$

$(4;\ 4\sqrt{2})$.

14.4. F

OX.

$x^2 \quad y^2 \quad R^2$

14.5. F

$F_x \quad xy \quad \frac{y^2 \sin x}{2} \qquad F_y \quad \frac{x^2\,)\ 2y\cos x}{2}$

III

14 $\int\limits_{(\,)\,2;\,)\,1)}^{(3;\,0)} (x^4 \quad 4xy^3)dx \quad (6x^2y^2\,)\ 5y^4)dy$ -

14

$$\frac{2x(1\ e^y)}{(1\quad x^2)^2}dx\quad \frac{e^y}{1\quad x^2}dy.$$

14 F $F_x\quad 2xy,\ F_y\quad x^2$

Практическое занятие №15. «Криволинейный интеграл по длине дуги (первого рода) и некоторые его приложения»

I

1.
2.
3.

4.
5.
6. L

$r\quad r(\ )$ $_1\}\quad\}\quad_2$ $r(\ )$

$[\ _1,\ _2].$

II

15

a) $\int_L y^2dl$ L $\begin{cases} x\quad a(t\ \sin t) \\ y\quad a(1\ \cos t), \end{cases}$ $0\}\ t\}\ 2\ $;

b) $\int_L ydl$ L $y^2\quad 2px$ $O(0,0)$ $B(2, 2\sqrt{p})$.

15 $\begin{cases} x\quad a\cos t \\ y\quad a\sin t, \end{cases}$ $0\}\ t\}\ \frac{}{2}$

15 $x^2\quad y^2\quad R^2$

$(x\quad 0,\ y\quad 0,\ z\quad 0)$ $2Rz\quad xy$.

15

$\begin{cases} x\quad a\cos^3 t \\ y\quad a\sin^3 t, \end{cases}$ $0\}\ t\}\ 2\ $.

III

15

$\int_L (3x\ )\ 2\sqrt[3]{a^2y})dl$ L $\begin{cases} x\quad a\cos^3 t \\ y\quad a\sin^3 t, \end{cases}$ $0\}\ t\}\ \frac{}{2}$.

15 $y\quad e^x$ $A(0,1)$ $B(2, e^2)$

$(x, y)\quad ky^2$.

15

$\frac{x^2}{5}\quad \frac{y^2}{9}\quad 1,\ y\quad 0,\ z\quad 0$ $z\quad y$.

Практическое занятие №16. «Поверхностные интегралы первого и второго рода и способы их вычисления»

1. $\boldsymbol{R}^3$.

$\boldsymbol{R}^3$

3.

4

5 $\boldsymbol{R}^3$ -

$z \quad f(x, y)$.

9.

12.

15

II

16. :

a) $\dfrac{dS}{\sqrt{x^2 \quad y^2 \quad z^2}}$ $x \quad \cos \quad ,$

$y \quad \sin \quad , \quad 0 \} \quad \} \ 2 \quad , \ 0 \} \ z \} \ 1;$

b) $z^2 dS,$ $\sqrt{x^2 \quad y^2} \} \ z \} \ 2.$

16.2. :

a) $xdydz \quad ydzdx \quad zdxdy$

b) $(y^2 \quad z^2)dxdy$ $z \quad \sqrt{1) \ x^2},$

$y \quad 0 \quad y \quad 1.$

III

:

a) $\sqrt{1 \quad 4x^2 \quad 4y^2}dS$ $z \quad 1) \ x^2 \ ) \ y^2,$

$z \quad 0;$

b) $(x^2 \quad y^2 \quad 3z^2)dS,$ $z \quad \sqrt{x^2 \quad y^2},$

$z \quad 0 \quad z \quad 1.$

16.4. :

a) $xdydz \ ) \ ydzdx \quad zdxdy$ $x^2 \quad y^2 \quad z^2,$

$z \quad 0$ $x^2 \quad y^2 \quad 1 \ ;$

b) $ydxdy$, $z \quad x^2 \quad y^2, \quad 0 \} \ z \} \ 2$.

Практическое занятие №17. «Формулы Остроградского-Гаусса и Стокса и некоторые их приложения»

1.

?

3. -

-

II

17 -

$x^2dydz \quad y^2dzdx \quad z^2dxdy,$

17.2

$\int_L x^2y^3dx \quad dy \quad zdz,$ L $x^2 \quad y^2 \quad 1, z \quad 0,$

$x^2 \quad y^2 \quad z^2 \quad 1, \quad z \quad 0$ L

.

17 $x^2 \quad y^2 \quad z^2 \quad 1,$ $x \quad 0$, $y \quad 0$, $z \quad 0$.

III

17 -

$x^3dydz \quad y^3dzdx \quad z^3dxdy,$ $x^2 \quad y^2 \quad z^2 \quad 1$.

17

$\int_L ydx \quad zdy \quad xdz,$ L $x^2 \quad y^2 \quad z^2 \quad 1, x \quad y \quad z \quad 0,$

$x \quad y \quad z \quad 0$,

L

17 R,

Практическое занятие №18. «Контрольная работа»

Образец варианта контрольной работы

18.1 $\lim\limits_{\substack{x \\ y}} (x^2 \quad y^2)e^{) \sqrt{x^2 \quad y^2}}$.

18. 2 $U \quad x^2 \ ) \ 2xy \quad 4y^3$.

18.3. D

$y = x \quad y \quad x^2$.

18.4 T

$z \quad 0, \quad z \quad x^2 \quad y^2, \quad y \quad x^2, \quad y \quad 1.$

18.5 $\oint_L (x \quad y)dx) \ (x) \ y)dy$ L

$\frac{x^2}{a^2} \quad \frac{y^2}{b^2} \quad 1,$

Самостоятельная работа

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Оценочные средства

I. Контрольные вопросы для проверки теоретической подготовки к практическому занятию.

.

Критерии оценивания ответа на теоретический вопрос

"Отлично"

-

-

"Хорошо"

-

"Удовлетворительно"

"Неудовлетворительно"

-

II. Задания для самостоятельной работы.

.

Критерии оценивания выполнения заданий для самостоятельной работы

	0,5
	0,5
	1
	1
	1
	- 5

III. Контрольные работы по дисциплине.

1. $f\ \ x,y\ \ \ \sqrt{1)\ x^2}\ \ \ \sqrt{y^2\ )\ 1}$.

$u\ \ \ arctg\frac{y}{x}$.

$z\ \ \ x^2\ )\ 2xy\ \ \ 2y^2\ \ \ 2x$

$\underset{G}{f\ \ x,y\ dxdy}$

G $y\ \ \ 0,\ x\ \ \ \sqrt{y},\ x\ \ \ y\ \ \ 6.$

$\underset{L}{2xydx)\ x^2dy}$ L -

$y\ \ \ \sqrt{\frac{x}{2}},\ 0\}\ x\}\ 2.$

1.

		*)
1		

(*)

2.

1		4,5-5
2		3,5-4,5
3		2,5-3,5
4		,5

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Вопросы для подготовки к экзамену и образцы экзаменационных заданий.

1. n-
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.
12. .
13.
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21.
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.

36. -

1.
2.
3. $f(x,y) \quad x^2 \;)\; 2y \quad 3$

$D \quad x,y \quad R^2 \mid y \;)\; x \} 1, x \} 0, y \quad 0 \}.$

4. $\iint_D \frac{dxdy}{x^2 \quad y^2 \;)\; 1},$

$D \quad x,y \quad R^2 \mid 9 \} \; x^2 \quad y^2 \} \; 25 \}.$

5. $xyz \quad a^3 \; (a \quad 0$

1.

1		

2.

1		4,75-5
2		3,75-4,5
3		3-3,5
4		

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Список основной литературы

1. 4- 324 ISBN 978-5-534-07067-5. URL:

2. 4- 315 ISBN 978-5-534-07069-9. URL: https:

3. 8- 447 ISBN 978-5-534-12319-7.

4. 212 ISBN 978-5-534-04282-5.

7.2. Список дополнительной литературы

5.

-

6.

- -

7. - -

8. -3. -

9.

10.

11.

12.

-

13. - -

14. -
2009.

15.

16. I. -
II

17.
245
https:/ /urait.ru].

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

- ≥
  http://moodle.smolgu.ru
- ≥ - http://biblioteka.smolgu.ru
- ≥ http://www.intuit.ru
- ≥ http://exponenta.ru
- ≥ http://www.mathnet.ru

8. Материально-техническое обеспечение

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа

Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации,

Помещение для самостоятельной работы

.

9. Программное обеспечение

Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), 66975477 03.06.2016 ( ).

-