

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»
Проректор по учебной работе
_____ Ю.А. Устименко
«07» сентября 2021 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
Б1.В.03 АЛГЕБРА МНОГОЧЛЕНОВ**

Направление подготовки: **44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)**

Направленность (профиль): **Математика, информатика**

Форма обучения: очная

Курс – 3

Семестр – 5

Всего зачетных единиц – 2, часов – 72

Форма отчетности: зачет – 5 семестр

Программу разработал:

кандидат физико-математических наук, доцент С.А. Гомонов

Одобрена на заседании кафедры

«31» августа 2021 г., протокол №1

Заведующий кафедрой _____ К.М.Расулов

Смоленск
2021

1. Место дисциплины в структуре ОП.

Дисциплина «Алгебра многочленов» входит в вариативную часть программы бакалавриата по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (профиль Математика, информатика). Она изучается в пятом семестре и является одной из основных дисциплин, т.к. завершает такой важный курс как «Алгебра».

При изучении данной дисциплины необходимы компетенции студентов, сформированные при изучении таких дисциплин, как: «Математический анализ», «Алгебра» и др. Курс построен так, чтобы можно было углубить и расширить тот объем знаний, что был получен при изучении вышеперечисленных дисциплин.

Освоения дисциплины преследует следующие цели:

- овладение основными понятиями алгебры многочленов;
- овладение логическими основами курса, необходимыми для решения теоретических и практических задач;
- приобретение навыков использования свойств многочленов при решении соответствующих прикладных математических задач;
- формирование навыков самостоятельной работы, необходимых для использования знаний при изучении специальных дисциплин и дальнейшей практической деятельности;
- развитие математической интуиции, воспитание математической культуры.

В процессе освоения дисциплины решаются такие задачи, как:

- познавательная – глубокое освоение математических понятий, изучаемых в указанном разделе высшей математики, что совершенно необходимо для изучения всех других дисциплин профессионального цикла;
- воспитательная – привитие и развитие культуры мышления, способности логически верно выстраивать устную и письменную речь, понимать необходимость доказательств, как в математике, так и в реальных жизненных ситуациях при общении с коллегами и при работе в ученическом и производственном коллективах;
- развивающая – усвоение определенного количества информации по данной дисциплине, накопленной человечеством в процессе развития математики; привитие способности понимания значения комбинаторного анализа, теории булевых функций, теории графов в других разделах математики и возможности применения полученных знаний в своей будущей профессиональной деятельности.

Изучение курса основано на традиционных методах высшей школы, а также тесной взаимосвязи со смежными курсами.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
ПК-5. Способен использовать научные знания в предметной области (математика) в процессе формирования предметной компетенции обучающихся в рамках реализации основной общеобразовательной программы	Знать: современное состояние и перспективы развития математики как учебной дисциплины, направления развития школьного математического образования, теоретические основы обучения математике, принципы построения методической системы обучения математике, основные линии школьного курса математики, их структуру, содержание и роль, этапы формирования математических понятий, методические подходы к изучению основных тем школьного курса математики; Уметь: анализировать и интерпретировать содержание математических понятий,

	<p>теорем, задач, разрабатывать фрагменты уроков, организовывать образовательный процесс обучения математике, конструировать методику введения понятий, изучения теорем, решения задач;</p> <p>Владеть: основными приемами организации деятельности школьников по изучению математики, навыками разработки методики изучения частных вопросов обучения математике, исследовательскими методами в профессиональной деятельности.</p>
<p>ПК-7. Способен математически корректно ставить естественнонаучные задачи и классические задачи математики, строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата</p>	<p>Знать: базовые принципы постановки естественнонаучных задач и классических задач математики, определения основных понятий и доказательства теорем по основным разделам математики;</p> <p>Уметь: решать основные типы математических задач, доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть его следствия;</p> <p>Владеть: первичными навыками применения математического аппарата к решению конкретных задач из различных областей прикладной математики и информатики.</p>

3. Содержание дисциплины

- Многочлены-функции.** Построение совокупности многочленов от одной переменной на языке функции. Равные многочлены. Основные операции над многочленами. Основные характеристики многочленов.
- Многочлены-формальные суммы.** Построение совокупности многочленов одной переменной над произвольным кольцом K на языке формальных сумм. Равенство многочленов. Основные операции над многочленами. Кольцо многочленов $K[x]$. Основные характеристики многочленов.
- Многочлены-финитные последовательности.** Построение совокупности многочленов одной переменной над произвольным кольцом K на языке финитных последовательностей.
- Теорема Безу.** Деление с остатком на двучлен $x - x_0$ и корни многочлена. Теорема Безу и следствие из нее. Схема Горнера. Число корней многочлена над областью целостности.
- Алгебраическое и функциональное равенства многочленов.** Сравнительный анализ понятий алгебраического и функционального равенства многочленов.
- Отношение делимости в кольце многочленов и его свойства.** Свойства отношения делимости многочленов и их применение к решению задач.
- Деление многочлена на многочлен с остатком.** Основная теорема о делении с остатком многочлена на многочлен. Способы нахождения неполного частного и остатка.
- НОД многочленов.** Существование и единственность НОД двух и нескольких многочленов. Алгоритм Евклида и его свойства. Свойства НОД многочленов. Взаимно простые многочлены и их свойства.
- НОК многочленов.** Существование и единственность НОК двух и нескольких многочленов. Связь НОД и НОК двух многочленов.
- Свойства НОД и НОК нескольких многочленов.** Теоремы существования и

единственности НОД и НОК нескольких многочленов и способы вычисления НОД и НОК.

11. **Идеалы кольца $R[x]$.** Главенство всякого идеала кольца $R[x]$ где R – произвольное поле. Понятие евклидова кольца и его свойства.
12. **Факторизация многочленов.** Приводимые и неприводимые многочлены над произвольным полем и их свойства.
13. **Факториальность кольца $R[x]$** где R – произвольное поле. Существование и единственность разложения многочлена на неприводимые множители.
14. **Кольцо многочленов одной переменной над факториальным кольцом.** Понятие факториального кольца и его свойства. Факториальность кольца многочленов одной переменной над факториальным кольцом.
15. **Формальная производная многочлена и ее свойства.** Отделение кратных неприводимых множителей многочлена. Алгоритм отделения.
16. **Формула Тейлора для многочленов.** Получение и обоснование формулы Тейлора для многочленов заданных над произвольным полем коэффициентов.
17. **Понятие показателя кратности корня многочлена.** Критерий k - кратности корня многочлена.
18. **«Основная» теорема алгебры.** Следствия из «основной» теоремы алгебры. Формулы Виета и их обоснование.
19. **Свойства комплексных корней многочленов с вещественными коэффициентами.** Сопряженность комплексных корней многочлена из $R[x]$.
20. **Уравнение третьей степени над C .** Формула Кардано-Тартальи и ее обоснование. Понятие малого дискриминанта для случая приведенного кубического уравнения. Вещественные корни кубического уравнения с вещественными коэффициентами.
21. **Уравнения четвертой степени.** Метод Феррари. Кубическая резольвента. Результаты Н.Х.Абея и Э. Галуа.
22. **Отделение действительных корней многочлена из $R[x]$.** Методы отделения действительных корней. Теоремы Штурма и Декарта.
23. **Рациональные корни многочленов из $Q[x]$.** Алгоритм нахождения рациональных корней многочлена из $Q[x]$ и их $Z[x]$.
24. **Примитивные многочлены.** Понятие примитивных многочленов и их свойства. Теорема Гаусса о связи приводимости над Q и над Z . «Критерий» (достаточное условие) неприводимости многочленов из $Z[x]$ Эйзенштейна.
25. **Метод Кронекера.** Алгоритмы получения разложения многочлена из $Z[x]$ на неприводимые над Z множители.
26. **Алгебраические и трансцендентные числа.** Свойства алгебраических и трансцендентных чисел. Минимальный многочлен алгебраического числа. Поле алгебраических чисел.
27. **Многочлены от нескольких переменных.** Разложение многочленов от нескольких переменных на неприводимые множители. Факториальность кольца многочленов от нескольких переменных заданного над факториальным кольцом коэффициентов. Словарное упорядочивание одночленов многочлена.
28. **Основная теорема о симметрических многочленах.** Алгоритм получения представления симметрического многочлена через основные симметрические многочлены. Однородные многочлены и их свойства.
29. **Результант и дискриминант.** Результант двух многочленов и дискриминант многочлена их свойства и их применение к решению задач.
30. **Базисы Грёбнера.** Применение базисов Гребнера к решению систем алгебраических уравнений.

4. Тематический план

№ п/	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий			
			лекции	практич	лаборат	самостояте

п				еские занятия	орные занятия	льная работа
1	Многочлены-функции.	2	2	–	–	-
2	Многочлены-формальные суммы.	4	2	2	–	-
3	Многочлены-финитные последовательности.	2	2	–	–	–
4	Теорема Безу.	4	–	4	–	-
5	Алгебраическое и функциональное равенства многочленов.	2	–	–	–	2
6	Отношение делимости в кольце многочленов и его свойства.	4	1	2	–	1
7	Деление многочлена на многочлен с остатком.	4	1	2	–	1
8	НОД многочленов.	7	2	4	–	1
9	НОК многочленов.	1	–	–	–	1
10	Свойства НОД и НОК нескольких многочленов.	1	–	–	–	1
11	Идеалы кольца $\mathbf{P}[x]$.	2	–	2	–	–
12	Факторизация многочленов.	3	2	–	–	1
13	Факториальность кольца $\mathbf{P}[x]$ где \mathbf{P} – произвольное поле.	3	–	2	–	1
14	Кольцо многочленов одной переменной над факториальным кольцом.	1	–	–	–	1
15	Формальная производная многочлена и ее свойства.	1	–	-	–	1
16	Формула Тейлора для многочленов.	3	–	2	–	1
17	Понятие показателя кратности корня многочлена.	2	–	2	–	–
18	«Основная» теорема алгебры.	3	2	–	–	1
19	Свойства комплексных корней многочленов с вещественными коэффициентами.	3	–	2	–	1
20	Уравнение третьей степени над \mathbf{C} .	1	–	–	–	1
21	Уравнения четвертой степени.	1	–	–	–	1
22	Отделение действительных корней многочлена из $\mathbf{R}[x]$.	3	–	2	–	1
23	Рациональные корни многочленов из $\mathbf{Q}[x]$.	3	–	2	–	1
24	Примитивные многочлены.	4	2	–	–	2
25	Метод Кронекера.	2	–	2	–	–

26	Алгебраические и трансцендентные числа.	2	–	2	–	-
27	Многочлены от нескольких переменных.	1	–	–	–	1
28	Основная теорема о симметрических многочленах.	1	–	–	–	1
29	Результант и дискриминант.	1	–	–	–	1
30	Базисы Грёбнера.	1	–	–	–	1
ИТОГО		72	16	32	–	24

5. Виды учебной деятельности.

Занятия лекционного типа

Лекция 1. «Многочлены-функции»: построение совокупности многочленов от одной переменной на языке функции. Равные многочлены. Основные операции над многочленами. Основные характеристики многочленов.

Лекция 2. «Многочлены-формальные суммы»: построение совокупности многочленов одной переменной над произвольным кольцом K на языке формальных сумм. Равенство многочленов. Основные операции над многочленами. Кольцо многочленов $K[x]$. Основные характеристики многочленов.

Лекция 3. «Многочлены-финитные последовательности»: построение совокупности многочленов одной переменной над произвольным кольцом K на языке финитных последовательностей.

Лекция 4. «Отношение делимости в кольце многочленов и его свойства»: свойства отношения делимости многочленов и их применение к решению задач.

Лекция 5. «Деление многочлена на многочлен с остатком»: основная теорема о делении с остатком многочлена на многочлен. Способы нахождения неполного частного и остатка.

Лекция 6. «НОД многочленов»: существование и единственность НОД двух и нескольких многочленов. Алгоритм Евклида и его свойства. Свойства НОД многочленов. Взаимно простые многочлены и их свойства.

Лекция 7. «Факториальность кольца $P[x]$ где P – произвольное поле. Основная теорема алгебры»: существование и единственность разложения многочлена на неприводимые множители; следствия из «основной» теоремы алгебры. Формулы Виета и их обоснование.

Лекция 8. «Примитивные многочлены»: понятие примитивных многочленов и их свойства. Теорема Гаусса о связи приводимости над Q и над Z . «Критерий» (достаточное условие) неприводимости многочленов из $Z[x]$ Эйзенштейна.

Занятия семинарского типа

Практическое занятие № 1. Многочлены-формальные суммы.

Решение задач: [7] №1(a-e).

Практическое занятие №2-3. Теорема Безу.

Решение задач: [6] № 550-559, 562; [7] № 2-9 (§1), №4-8 (§3).

Практическое занятие №4. Отношение делимости в кольце многочленов и его свойства.

Решение задач: [6] №547, 548; [7] №3 (§2).

Практическое занятие №5. Деление многочлена на многочлен с остатком.

Решение задач: [6] №546; [7] №1-2 (§2).

Практическое занятие №6-7. НОД многочленов.

Решение задач: [6] №577-583; [7] №4-6 (§2).

Практическое занятие №8. Идеалы кольца $R[x]$.

Решение задач: [6] №588-589; [7] №7 (§2).

Практическое занятие № 9. Факториальность кольца $R[x]$ где R – произвольное поле.

Решение задач: [6] №587, 589-595; [7] №1-2 (§3).

Практическое занятие №10. Формальная производная многочлена и ее свойства.

Решение задач: [6] №585; [7] №10-14 (§3).

Практическое занятие №11. Формула Тейлора для многочленов.

Решение задач: [6] №551; [7] №4-9 (§3).

Практическое занятие №12. Понятие показателя кратности корня многочлена.

Решение задач: [6] №552-555.

Практическое занятие №13. Свойства комплексных корней многочленов с вещественными коэффициентами.

Решение задач: [6] №590-595; [7] №1-4 (§5).

Практическое занятие №14. Отделение действительных корней многочлена из $R[x]$.

Решение задач: [6] №773-775, 779.

Практическое занятие №15. Рациональные корни многочленов из $Q[x]$.

Решение задач: [6] №649,650; [7] №1-5 (§8).

Практическое занятие №16. Метод Кронекера. Алгебраические и трансцендентные числа.

Решение задач: [6] №680-683; [7] №6-7 (§8); [6] №684-686; [7] №1-7 (§12), 15-16 (§12).

Самостоятельная работа

Текущая самостоятельная работа студента направлена на углубление и закрепление знаний студентов и развитии практических умений. Она заключается в работе с лекционными материалами, поиске и обзоре литературы и электронных источников, информации по заданным темам курса, опережающей самостоятельной работе, в изучении тем, вынесенных на самостоятельную проработку, подготовке к практическим занятиям.

Самостоятельная внеаудиторная работа студентов состоит в:

- проработке лекционного материала, составлении конспекта лекций по темам, вынесенным на самостоятельное изучение;
- выполнении домашних заданий.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Текущая аттестация осуществляется на каждом практическом занятии в процессе фронтального опроса, выполнения заданий для аудиторной работы, в процессе проверки домашней самостоятельной работы.

Проведение текущего контроля осуществляется также посредством проведения аудиторных контрольных работ и разноуровневых самостоятельных работ.

Оценочные средства

I. Контрольные вопросы для проверки теоретической подготовки к практическому занятию.

Перечень вопросов приводится в методических разработках, рекомендованных к каждому практическому занятию.

II. Задания для самостоятельной работы.

Список заданий для самостоятельной работы по каждому из занятий хранится на кафедре.

III. Контрольные работы по дисциплине.

Образец контрольной работы

1. Используя схему Горнера, разложите многочлен $f(x) = x^4 - 3x^3 + \frac{1}{2}x - 7$ по степеням двучлена $x - 2$ и вычислите значения производных всех порядков этого многочлена в точке $x_0 = 2$.

2. Найдите НОД и НОК многочленов

$$y(x) = 2x^3 - x^2 - 1, \quad \varphi(x) = x^4 + 2x^2 - 3x.$$

3. Найдите рациональные корни многочлена $f(x) = x^3 - 11x^2 + 38x - 40$.

Критерии оценивания контрольной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно реализован каждый метод решения	1 балл
2	Анализ результатов	2 балла

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

1. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация осуществляется посредством проведения зачета

Критерий получения зачета

Зачет выставляется по результатам работы студента в течение семестра согласно Положению о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации студентов в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Смоленский государственный университет» (утверждено приказом ректора от 24 апреля 2014 г. №01-36).

Для получения зачета студент должен:

- уметь отвечать на теоретические вопросы, рассмотренные на лекциях;
- уметь решать задачи, предложенные на практических занятиях.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Список основной литературы

1. Ларин, С. В. Алгебра: многочлены : учебное пособие для академического бакалавриата /

С. В. Ларин. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 136 с. [электронный ресурс: <https://urait.ru/book/algebra-mnogochleny-409796>].

2. Кашапова, Ф. Р. Высшая математика. Общая алгебра в задачах : учебное пособие для академического бакалавриата / Ф. Р. Кашапова, И. А. Кашапов, Т. Н. Фоменко. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 171 с. [электронный ресурс: <https://urait.ru/book/vysschaya-matematika-obschaya-algebra-v-zadachah-411431>].

7.2. Список дополнительной литературы

3. Аржанцев И.В. Базисы Грёбнера и системы алгебраических уравнений.- М.: МЦНМО, 2003.
4. Куликов Л.Я. Курс высшей алгебры.- М.: Высшая школа, 1979.
5. Винберг Э.Б. Алгебра многочленов.- М.: Просвещение, 1980.
6. Курош А.Г. Курс высшей алгебры.- М.: Наука, 1976.
7. Б.Л. ван дер Варден. Алгебра.- М.: Наука, 1976.
8. Прасолов В.В. Многочлены.- М.: МЦНМО, 2001.
9. Фаддеев Д.К., Соминский И.С. Сборник задач по высшей алгебре.- М.: Наука, 2006.
10. Солодовников А.С., Родина М.А. Задачник-практикум по алгебре. Ч. IV.- М.: Просвещение, 1985.

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Электронная библиотека <https://urait.ru/>
2. Электронно-библиотечная система <http://znanium.com>
3. Математическое бюро: решение задач по высшей математике (по разделу теории чисел) - www.matburo.ru
4. <http://www.exponenta.ru/> сайт материалов по математическим пакетам.

8. Материально-техническое обеспечение

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используется интерактивная доска; проектор. Осуществляется поиск информации в WWW-пространстве; работа с Web-страницами и ресурсами сети Интернет.

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине в университете имеется следующая необходимая инструментальная база: учебные аудитории для проведения практических занятий; компьютерный класс, оборудованный персональными ЭВМ с необходимым математическим софтом и выходом в Интернет; кабинеты, оборудованные проекторами и электронными досками для проведения лекционных занятий. Имеется кабинет ксерокопирования и кафедральный принтер для подготовки индивидуальных дидактических карточек, контрольных и экзаменационных материалов. Используются портреты великих математиков, необходимые чертёжные инструменты.

9. Программное обеспечение

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине используется Информационно-вычислительный центр физико-математического факультета (Положение о Центре утверждено приказом ректора №01-66 от 28.09.2015 г.).

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используются информационные технологии обработки данных с помощью прикладных программных продуктов Microsoft Excel, Microsoft PowerPoint. Осуществляется поиск информации в WWW-пространстве; работа с Web-страницами и социальными ресурсами сети Интернет, а также используются различные системы компьютерной математики.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 03B6A3C600B7ADA9B742A1E041DE7D81B0
Владелец: Артеменков Михаил Николаевич
Действителен: с 04.10.2021 до 07.10.2022