Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»
Проректор по учебно-
методической работе
___________Ю.А. Устименко
«23» июня 2022 г.

Направление подготовки:
Направленность (профиль):
Форма обучения: очная
Курс – 3
Семестр – 5, 6
Всего зачетных единиц –7,часов – 252
Форма отчетности: экзамен – 5, 6 семестр

Программу разработал
старший преподаватель Курицын С.Ю.

Одобрена на заседании кафедры
«16» июня 2022 г., протокол № 10

Заведующий кафедрой _________К.М. Расулов

Смоленск
2022

Дисциплина «Математическое моделирование» относится к части образовательной программы, формируемой участниками образовательных отношений. Она изучается в 5-6 семестрах и опирается на компетенции, полученныестудентами при изучениидисциплин «Математический анализ», «Дифференциальные и разностные уравнения», «Алгебра и геометрия»,«Теория вероятностей и математическая статистика», «Численные методы», «Экономика организации», «Дискретная математика» и др. Курс построен так, чтобы углубить и расширить знания по разделам, связанным с построением математических моделей, применяемых в прикладном программировании.

Согласно учебному плану, освоение данной дисциплины необходимо для изучения таких дисциплин, как «Планирование ресурсов организации», «Методы анализа и моделирования бизнес-процессов»и др. Кроме того, компетенции, сформированные при изучении данной дисциплины, способствуют успешному применению их в дальнейшей профессиональной деятельности. Поэтому чёткое и ясное понимание не только содержания современных социально-экономических операций, но и их математических основ становится необходимым условием высокой квалификации бакалавра.

Изучение курса основано на традиционных методах высшей школы, тесной взаимосвязи со смежными курсами, а также на использовании современной учебной и методической литературы.

Характерной чертой курса является сочетание достаточного числа математических вопросов с практическими математическими методами и приёмами, применяемыми в прикладном программировании.

Компетенция	Индикаторы достижения
Способен проводить обследование организаций, выявлять информационные потребности пользователей, собирать детальную информацию, формировать требования к автоматизированной информационной системе (ERP-системе).	: методику проведения обследования организаций с целью выявления информационных потребностей пользователей; требования, предъявляемые к автоматизированной информационной системе (ERP-системе); возможности типовых ИС, архитектуру, устройство и функционирование вычислительных сетей, коммуникационное оборудование и сетевые протоколы, теорию баз данных и основы программирования; основы бухгалтерского учета, управления торговлей, поставками, запасами, управления персоналом, управления организацией, экономической теории. : выявлять информационные потребности пользователей, формулировать требования к автоматизированной информационной системе (ERP-системе), осуществлять сбор детальной информации для формализации требований пользователей заказчика. методами, способами и инструментами выявления информационных потребностей пользователей, методикой обследования организации, навыками по информированию заказчика о возможностях типовых ИС.
Способен проводить описание прикладных процессов и информационного	основные принципы и методы описания и анализа прикладной области,

обеспечения и проектировать автоматизированные информационные системы (ERP-системы)	информационных потребностей, формирования требований к информационным системам, методы формализации и структурирования данных, основные методы и технологии проектирования информационных систем, возможности типовых ИС, архитектуру, устройство и функционирование вычислительных сетей, коммуникационное оборудование и сетевые протоколы, теорию баз данных и основы программирования. проводить анализ предметной области, выявлять информационные потребности и разрабатывать требования к информационным системам, формализовывать и структурировать полученную информацию, осуществлять сравнительный анализ и выбор информационно-коммуникационной технологии для решения поставленных задач, проектировать информационные системы. навыками сбора и анализа информации, необходимой для решения поставленных производственных задач, навыками по формализации и структурированию данных, навыками работы с прикладным программным обеспечением для проектирования современных информационных систем

Понятия модели. Классификация моделей. Основные этапы математического моделирования. Классификация экономико-математических моделей социально-экономических систем.Основные математические методы и модели в различных направлениях экономической деятельности.

Линейная алгебра и ее использование при решении экономических задач. Формулировка задач балансового анализа. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики. Линейная модель обмена. Применение дифференциального и интегрального исчисления функций одной переменной в моделировании социально-экономических процессов. Функции в экономике и социологии. Функции спроса и предложения. Функции Торнквиста. Пределы в социально-экономической сфере. Предельные величины в экономике. Экономический смысл производной. Применение производной в экономической теории. Понятие об эластичности функции. Эластичность спроса и предложения. Вычисление объема выпущенной продукции. Кривые Лоренца. Коэффициент Джини. Непрерывное начисление процентов. Задачи дисконтирования. Использование понятия функции нескольких переменных в социально-экономической сфере. Производственные функции. Виды производственных функций. Предельные показатели экономики. Задача оптимизации производственных издержек. Функция полезности. Кривые безразличия. Задача потребительского выбора. Применение аппарата дифференциальных и разностных уравнений в моделировании динамических социально-экономических процессов. Модель естественного роста. Модель Мальтуса. Модель Ферхюльста. Модель Эванса установления равновесной цены. Модель экономического цикла Самуэльсона-Хикса.Паутинообразная модель рынка.

Основные определения и понятия, связанные с моделями управления запасами. Статическая детерминированная модель без дефицита. Статическая детерминированная модель управления запасами без дефицита с количественными скидками.Статическая детерминированная модель с дефицитом. Понятие стохастической модели управления запасами.

Основные понятия теории графов. Понятие транспортной сети. Методы определения кратчайших расстояний между пунктами транспортной сети. Построение графа наименьшей длины. Планирование сети дорог. Задачи обслуживания: задача коммивояжера, задача китайского почтальона и др. Методы составления рациональных маршрутов при перевозке массовых грузов. Составление рациональных развозочно-сборных маршрутов. Задача о расположении центра снабжения (склада). Планирование сети дорог.Пропускная способность транспортной сети. Задача о наибольшем потоке. Транспортная задача в сетевой постановке. Применение задачи о максимальном потоке к решению транспортной задачи по критерию времени. Понятие сетевой модели и ее основных элементов. Правила построения сетевых графиков. Упорядочение сетевого графика. Понятие критического пути. Сетевой анализ проектов. Параметры событий и работ. Метод критического пути (метод CPM). Метод оценки и обзора программы (метод PERT).

Задача об оптимальном использовании ресурсов. Задача о составлении рациона питания. Общая задача линейного программирования. Графический метод решения задачи линейного программирования. Анализ модели на чувствительность. Двойственные задачи линейного программирования. Симплекс-метод. Транспортная задача. Метод потенциалов. Задача формирования оптимального штата фирмы. Целочисленное программирование. Метод ветвей и границ. Задача о рюкзаке. Понятие задачи дробно-линейного программирования.Сведение к задаче линейного программирования. Применение дробно-линейных моделей в моделировании относительных экономических показателей. Задача о себестоимости продукции. Задача о рентабельности производства.Многокритериальные модели.Метод последовательных уступок. Метод равных наименьших отклонений.Применение методов линейного программирования для решения задач маршрутизации перевозки грузов.

Постановка задачи нелинейного программирования. Метод множителей Лагранжа. Задачи выпуклого программирования. Теорема Куна—Таккера. Задача об инвестиционном портфеле.

Общая постановка задач динамического программирования. Моделирование многошаговых процессов. Принцип оптимальности Р. Беллмана. Модель динамического программирования, связанная с распределением средств между предприятиями. Модель динамического программирования о распределении ресурсов между отраслями на nлет. Модель динамического программирования о замене оборудования (автотранспорта).

Понятие об игровых моделях. Платежная матрица. Нижняя и верхняя цена игры. Решение игр в смешанных стратегиях.Игры с природой. Матрица рисков. Критерии принятия решений в условиях неопределенности и риска. Деревья решений. Метод обратного пересчета.

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий		
			лекции	лабораторные занятия	самостоятельная работа
1.	Модели и моделирование	4	2	0	2
2.	Функциональные модели в	53	14	26	13

	моделировании социально-экономических процессов				
3.	Модели управления запасами	24	8	12	8
4.	Модели теории графов	36	10	12	10
	Экзамен	27	0	0	27
	Всего за семестр	144	34	50	60
1.	Линейные оптимизационные модели	48	16	20	12
2.	Нелинейные оптимизационные модели	12	6	4	2
3.	Динамическое программирование	7	4	2	1
4.	Модели и методы поддержки принятия решений в условиях конфликта, неопределенности и риска	14	6	6	2
	Экзамен	27	0	0	27
	Всего за семестр	108	32	32	44

Понятия модели. Классификация моделей. Основные этапы математического моделирования. Классификация экономико-математических моделей социально-экономических процессов. Основные математические методы и модели в различных направлениях экономической деятельности.

Балансовые модели в экономике. Модель Леонтьева.Модель международной торговли. Балансовые модели в анализе экономических показателей.

Функции одной переменной в моделировании социально-экономических процессов. Функции спроса и предложения. Равновесная цена. Функции дохода, издержек и прибыли. Функции Торнквиста. Функции распределения доходов.

Основные экономические задачи, решаемые методами дифференциального исчисления функций одной переменной. Понятие эластичности функции. Свойства эластичности. Геометрический смысл эластичности функции. Эластичность спроса и предложения.

Соотношения между средними и предельными величинами в экономике. О доказательствах некоторых экономических законов с помощью методов дифференциального исчисления. Применение интегрального исчисления в экономическом моделировании. Степень неравенства в распределении доходов. Кривая Лоренца. Коэффициент Джини.

Понятие производственной функции. Виды производственных функций. Предельные и средние значения производственной функции. Задача оптимизации производственных издержек.

Функция полезности и ее свойства. Кривые безразличия и их свойства. Бюджетное множество. Задача потребительского выбора.

---

[1] Содержание данного раздела может быть представлено в электронной информационно- образовательной среде СмолГУ или в опубликованном учебно-методическом пособии.

Дифференциальные и разностные уравнения в моделировании социально-экономических процессов.

Основные определения и понятия, связанные с моделями управления запасами. Детерминированная модель управления запасами без дефицита. Формула Уилсона. Модель оптимального размера заказа с фиксированным временем его выполнения.

Детерминированная модель управления запасами с производством.

Детерминированная модель управления запасами с количественными скидками. Детерминированная модель управления запасами с дефицитом.

Дискретные и непрерывные стохастические модели управления запасами. Примеры.

Основные понятия теории графов. Методы определения кратчайших расстояний между пунктами транспортной сети: алгоритм Дейкстры.Построение графа наименьшей длины. Планирование сети дорог.

Задачи обслуживания: задача китайского почтальона. Понятие эйлерова графа. Критерий отыскания эйлерова графа. Алгоритмы решения задачи китайского почтальона.

Задачи обслуживания: задача коммивояжера. Полный граф. Понятие гамильтонова цикла. Некоторые алгоритмы решения задачи коммивояжера.

Потоковые модели. Транспортная сеть. Задача о максимальном потоке.

Задача о размещении регулярных пунктов обслуживания. Задача о размещении экстренных пунктов обслуживания. Задача определения координат склада в регионе.

Линейные оптимизационные модели. Основные формы задач линейного программирования. Задача о распределении ресурсов. Задача о пищевом рационе.

Графический метод решения задач линейного программирования. Анализ модели на чувствительность.

Симплекс-метод решения задач линейного программирования. Пример.

Двойственные задачи линейного программирования. Понятие о задаче торга. Алгоритм построения двойственной задачи.Задачи целочисленного программирования. Метод ветвей и границ. Метод отсечений.Некоторые модели целочисленного программирования: задача о рюкзаке, задача об оптимальном раскрое.

Дробно-линейные модели. Алгоритм решения задач дробно-линейного программирования. Некоторые дробно-линейные модели в экономике.

Транспортная задача. Основные понятия. Метод минимальной стоимости отыскания опорного плана. Метод потенциалов. Пример.

Многокритериальные модели. Метод последовательных уступок. Метод равных наименьших отклонений.

Постановка задачи нелинейного программирования. Метод множителей Лагранжа.

Понятие выпуклого множества и выпуклой функции в n-мерном пространстве. Постановка задачи выпуклого программирования. Теорема Куна—Таккера.

Задача об инвестиционном портфеле и подходы к её решению.

Общая постановка задачи динамического программирования. Принцип оптимальности и уравнения Беллмана.

Задача о распределении инвестиций между предприятиями. Задача об оптимальном распределении ресурсов между отраслями на nлет. Алгоритм Беллмана—Форда.

Принятие решений в условиях конфликта. Основные понятия теории игр. Классификация игр.

Матричные игры. Понятие верхней и нижней цены игры. Седловая точка. Доминирование стратегий. Понятие смешанных стратегий. Равновесие Нэша. Теорема Дж. фон Неймана. Решение игр в смешанных стратегиях. Математическая модель игры в смешанных стратегиях.

Принятие решений в условиях неопределенности. Понятие природы. Игры с природой. Принятие решений в условиях риска. Матрица рисков. Понятие дерева решений. Узлы и ветви дерева решений. Одноуровневые и многоуровневые деревья решений. Отыскание наилучшего решения методом обратного пересчета.

Модель межотраслевого баланса

Теоретические вопросы

1. В чем заключается балансовый принцип межотраслевых связей в экономике? Поясните схему межотраслевого баланса.
2. Дайте определение модели Леонтьева. Приведите примеры.
3. Какие основные задачи связаны с линейной моделью Леонтьева? Приведите решение этих задач.
4. Сформулируйте определение коэффициентов прямых материальных затрат? Каковэкономический смысл этих коэффициентов?
5. Какая матрица прямых материальных затрат называется продуктивной? Приведитепримеры. Какие условия продуктивности матрицы A Вам известны?
6. Дайте определение матрицы полных затрат? Каков экономический смысл элементов этой матрицы?

Задания для аудиторной работы

1. Заполните недостающие клетки межотраслевого баланса, располагая следующими данными об экономической системе, состоящей из трех экономических объектов: P_1 – промышленность, P_2 – сельское хозяйство, P_3 – транспорт.

Производящие отрасли	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	P_1	P_2	P_3		
P_1	20	50		200	300
P_2	10	0	40		500

P_3	0			240	
Условно-чистая продукция		390			
Валовой выпуск					

Кроме того, известно, что суммарное внутреннее потребление всех экономических объектов составляет 310.

2.Дана схема межотраслевого баланса

Производящие отрасли	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	I	II	III		
I	70	90	50	150	360
II	30	80	100	200	410
III	75	105	80	250	510

Найдите: а) матрицу прямых затрат *A*; б) матрицу полных затрат *B*.

3. Постройте схему межотраслевого баланса, если задана матрица прямых затрат А и матрица конечного продукта Y :

$$A=\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}.$$

4. В таблице приведены данные об использовании баланса за отчетный год (усл.ден.ед.) трех отраслей производства.

Производящие отрасли	Потребление			Конечный продукт	Валовой выпуск
	Энерге-тика	Машино-строение	Прочие отрасли		
Энергетика	10	15	20	100	145
Машино- строение	15	30	10	36	91
Прочие отрасли	20	18	12	84	134

Составьте схему межотраслевого баланса для данных отраслей в следующем году, если конечное потребление энергетической отрасли увеличится в 1,5 раза, машиностроения – увеличится в 2 раза, а прочие отрасли останутся на прежнем уровне; при этом предполагается, что технологические коэффициенты (коэффициенты прямых затрат) не изменяются.

Задания для самостоятельной работы

1. Два цеха предприятия выпускают продукцию двух видов: первый цех – продукцию 1-го вида; второй – продукцию 2-го вида. Часть выпускаемой продукции идет на внутреннее потребление, остальная часть является конечным продуктом. Требуется выявить распределение продукции между цехами, идущей на внутреннее потребление и общие объемы выпускаемой продукции, если матрицы прямых затрат *A* и конечного продукта *Y* имеют вид:

$$A=\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}.$$

2.. Дана схема межотраслевого баланса за отчетный год.

Производящие отрасли	Потребление			Конечный продукт	Валовый выпуск
	I	II	III		
I	160	88	465	87	800
II	80	440	186	174	880
III	400	176	93	261	930

Найдите: а) матрицу прямых затрат A; б) матрицу полных затрат B; в) составьте схему межотраслевого баланса для данных отраслей в следующем году, если конечное потребление первой отрасли не меняется, второй отрасли – увеличится на 50%, а в третьей отрасли – на треть; при этом предполагается, что технологические коэффициенты (коэффициенты прямых затрат) не изменяются.

Функции одной переменной в экономических задачах

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение функции спроса $Q^D = q(p)$ (предложения $Q^S = q(p)$). Приведите примеры.
2. Какими характерными свойствами обладает функция спроса (предложения)?
3. Сформулируйте определение функции общих издержек $TC = TC(q)$ (дохода $TR = TR(q)$, прибыли $\pi = \pi(q)$).
4. Каким соотношением связаны между собой функции общих издержек, дохода и прибыли?
5. Зная функцию спроса $Q^D = q(p)$, составьте функцию дохода.
6. Дайте определение функций Торнквиста для малоценных товаров (товаров первой, второй необходимости и предметов роскоши)?

Задания для аудиторной работы

1. Издержки на изготовление продукции определяются по формуле $y = aq + b$, где q – объем выпущенной продукции, причем для двух технологических процессов изготовления продукции это разные функции, для первого – $y = \quad q + \quad$, для второго – $y = \quad q + \quad$. Определите, какой из технологических процессов выгоднее в зависимости от q. Найдите себестоимость продукции для обоих вариантов при $q = \quad$ усл.ед.
2. Функция предложения некоторого товара имеет вид $S = \frac{\quad + (p + \quad)}{p +}$, а функция спроса — $D = \frac{\quad - \quad p - \quad p}{p +}$. Найдите равновесную цену.
3. Издержки производства описываются функцией $C(q) = \sqrt{q}$, доход предприятия описывается функцией $R(q) = \frac{q}{\quad} - \quad q + \quad q$. Найдите прибыль предприятия $\pi(q)$. Исходя из графиков данных функций, сделайте экономические выводы.
4. Провайдер сети Интернет «Точка доступа» предоставляет услуги по подключению к сети жителей многоквартирного дома. При величине абонентской платы в 360 руб. в месяц количество пользователей по опросам жителей составит 210 абонентов, а при абонентской плате в 300 руб. в месяц – 240 абонентов. Фиксированные издержки обслуживания подключений составляют 2700 руб. в месяц, а переменные – 120 руб. за подключение. Найдите функцию прибыли, предполагая линейную зависимость между числом абонентов и величиной абонентской платы. Каково максимальное значение прибыли?

5. Известно, что функция Торнквиста для малоценных товаров имеет вид $x=\frac{I(I+2)}{I^2+4}$. Найдите функции Торнквиста для товаров первой, второй необходимости и предметов роскоши. Реализуйте основные этапы исследования функции средствами компьютерной математики и постройте их графики. Сделайте экономические выводы.

Задания для самостоятельной работы

1. Функция предложения некоторого товара имеет вид $q^S=\frac{p+\quad p+}{p+}$, а функция спроса – $q^D=\frac{+\quad p-\quad p}{p+}$. Найдите равновесную цену.
2. Менеджер по продажам цветочного магазина «Лютики» заметил, что при цене 550 руб. за букет магазин продает 225 букетов в день. Если повысить цену до 600 руб., то число клиентов снижается до 200. Считая линейным соотношение между спросом и ценой, найдите функцию дохода. При какой цене доход достигает своего максимального значения? Изменится ли результат, если известно, что ежедневно магазин может сделать: а) не более 300 букетов; б) не более 200 букетов?
3. Известны параметры функций Торнквиста $\alpha=\quad,\beta=\quad и\, \gamma=\quad$. Найдите функции Торнквиста и постройте их графики. При каком доходе населения

Понятие эластичности функции.

Теоретические вопросы

1. Какие основные классы задач в социально-экономических исследованиях решаются средствами дифференциального исчисления функций одной переменной?
2. Сформулируйте определение эластичности (точечной эластичности) функции $y=f(x)$ в точке x .
3. Какова геометрическая интерпретации эластичности $y=f(x)$ в точке x ?
4. Каков экономический смысл эластичности?
5. Докажите основные свойства эластичности функции $y=f(x)$ в точке x .
6. Как найти точечную эластичность спроса (предложения)? Какие еще виды эластичности спроса (предложения) Вам известны?
7. Каким соотношением связаны между собой эластичность спроса и эластичность дохода? Каков экономический смысл этого соотношения?

Задания для аудиторной работы

1. Найдите эластичность следующих функций: $y=x^a, y=a^x, y=\quad x$.
2. Спрос задан обратной функцией спроса $p=\sqrt{\quad -q}$. Найдите эластичность спроса в точке $p=$. Как изменится спрос, если цена возрастет на ?
3. Для функции спроса $D(p)=\quad(\quad-\sqrt{p})$ найдите значения p, при которых спрос является эластичным.
4. Найдите эластичность функции спроса $qp=$ в точке $p=$. Какой это тип эластичности? Как увеличение цены повлияет на выручку?
5. При цене $p=$ руб. за единицу продукции величина спроса на товар равна 0. При величине спроса $D=$ ед. ценовая эластичность спроса на товар равна –1. Найдите функцию спроса, считая, что она линейная.
6. Спрос на некоторый товар по цене $p=$ руб. равен 1200 ед. Определите спрос на этот товар при цене $p=$ руб., если коэффициент эластичности функции спроса от цены постоянный и равен $E=-$

7. Известна, что ценовая эластичность спроса на товар равна –4. Определите, как должны измениться цена и количество продаваемого товара, чтобы выручка выросла на 15%.
8. Эластичность рыночного предложения труда при ставке заработной платы в 500 рублей в час равна 2. При каком значении ставки заработной платы работники откажутся предоставлять свой труд на рынок, если кривая предложения труда линейна?

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. Функция спроса имеет вид $D= \quad \sqrt{\quad -p}$. Найдите эластичность спроса и выясните, как повлияет увеличение цены на выручку, если спрос составляет: а) 150 единиц; б) 50 единиц.
2. Функция предложения имеет вид $S= \quad p- \quad$. Найдите эластичность функции предложения при цене $p= \quad$. Определите, при каких значениях цены p предложение неэластично.
3. Спрос на труд характеризуется постоянной единичной эластичностью, а предложение труда описывается функцией $L^S= \quad + \quad w$. Известно, что равновесие на рынке достигнуто при ставке заработной платы $w= \quad$. Найдите функцию спроса на труд. Определите численность занятых и ставку заработной платы, если государство решило ввести закон о минимальной ставке заработной платы в размере 10.
4. Функция спроса характеризуется постоянной эластичностью $E=- \quad$. На сколько процентов изменится цена, если величина спроса снизилась в два раза?

Суммарные, средние и предельные величины в экономике

<u>Теоретические вопросы</u>

1. Дайте определение средней величины для суммарной величины $F=F(x)$. Приведите примеры средних величин в экономике.
2. Каков геометрический смысл средней величины $AF=AF(x)$?
3. Дайте определение предельной (маржинальной) величины для суммарной величины $F=F(x)$. Приведите примеры предельных величин в экономике.
4. Каков геометрический смысл предельной величины $MF=MF(x)$?
5. Зная предельную величину $MF(x)$, выведите формулу для средней величины $AF(x)$.
6. Зная предельную величину $MF(x)$, выведите формулу для средней величины $AF(x)$.
7. Пусть дана суммарная величина $F=F(x)$, дифференцируемая на некотором промежутке Δ. Докажите, что точечная эластичность этой величины удовлетворяет соотношению $E_x(F)=\frac{MF(x)}{AF(x)}$.
8. Докажите следующее утверждение: для того чтобы прибыль была максимальной необходимо, чтобы предельный доход и предельные издержки были равны.
9. Докажите, что при наиболее экономичном производстве достигается равенство средних и предельных издержек.

<u>Задания для аудиторной работы</u>

1. Функция общих издержек производства некоторой продукции определяется формулой: $TC(q)= \quad + \quad q+ \quad q$. Найдите функцию предельных издержек, функцию средних издержек производства q единиц продукции и скорость изменения средних издержек. При каком уровне производства скорость изменения средних издержек равна нулю?
2. Функция общих издержек равна $TC(q)= \quad - \quad q+ \quad q$. При каком объеме производства средние общие издержки минимальны?

3. Пусть спрос на некоторый товар на конкурентном рынке задан обратной функцией спроса $p^D = -q +$, а предложение этого товара – обратной функцией предложения $p^S = \ q +$. Средние издержки производства одной единицы товара определяются функцией $AC(q) = \frac{}{q} + \ + \ q$. Найдите максимальное значение прибыли.
4. На монопольном рынке спрос на некоторый товар определяется следующей функцией: $p^D = \ - \ q - \ q$. Найдите максимальную прибыль, если средние издержки производства этого товара составляют $AC(q) = \frac{}{q} + \ + \ q$. При каком значении цены прибыль q максимальна?
5. Предельные затраты фирмы-монополиста имеют вид $MC(q) = q +$, а предельный доход – $MR(q) = \ - \ q$. Определите эластичность рыночного спроса в точке максимальной прибыли.
6. Известно, что спрос на некоторую продукцию обладает постоянной ценовой эластичностью $E = \frac{-}{}$. Составьте соответствующие уравнения кривых $p^D = p^D(q), TR = TR(q), TR = TR(p), AR = AR(q), MR = MR(q)$.

Задания для самостоятельной работы

1. Функция средних переменных затрат имеет вид: $AVC = \ + \ q$. Постоянные затраты равны 12 руб. Найдите функцию общих и предельных затрат.
2. Издержки производства некоторой продукции имеют вид $TC(q) = \ + \ q + \ q$, где q — число единиц продукции. Цена на этот товар составляет 36 ден.ед. Найдите функцию предельной прибыли и ее значение при $q =$ и $q =$ Объясните экономический смысл значения $M\pi(\ ), M\pi(\ )$.
3. Функция спроса на продукцию монополиста имеет вид $q = \ - \ p$. Предельные и средние издержки удовлетворяют соотношению $MC = AC =$. Найдите объем выпуска монополиста и цену его продукции.
4. Функция общих издержек задана уравнением $TC(q) = \ + q$. Найдите цену, обеспечивающую фирме максимальную прибыль при объеме производства $q =$, если ценовая эластичность спроса на продукцию фирмы-монополиста при этой цене равна −2.
5. Известно, что спрос на некоторую продукцию описывается функцией $q^D = - \ + \frac{}{p}$. Составьте соответствующие уравнения кривых $p^D = p^D(q), TR = TR(q), TR = TR(p), AR = AR(q), MR = MR(q)$.

Интегральное исчисление в экономике

Теоретические вопросы

1. Зная предельную (маржинальную) величину $MF = MF(x)$, запишите формулу для отыскания соответствующей суммарной величины $F = F(x)$.
2. Какую зависимость устанавливает кривая Лоренца?
3. Дайте определение коэффициента Джини. Приведите примеры.

Задания для аудиторной работы

1. Функция предельных издержек некоторой продукции имеет вид $MC(q) = \ qe^{\ q}$. Найдите функцию издержек, если фиксированные издержки составляют 20 тыс. руб.
2. Найдите объем продукции, выпущенной за год (258 рабочих дней) при восьмичасовом рабочем дне, если производительность труда задается функцией $g(t) = - \ t - \ t +$.

3. Определите объем выпуска продукции при производительности труда $g(t)= \quad te^{- \quad t}$ за первые пять часов работы.
4. Распределение дохода в некоторой стране определяется кривой Лоренца $y=\frac{\ }{\ }x \ +\frac{\ }{\ }x$.

   Какую часть дохода получают 12% наиболее низко оплачиваемого населения? Посчитайте коэффициент неравномерности распределения совокупного дохода.
5. В одной из стран кривая Лоренца имеет вид $y= \ -\sqrt{\ -x}$. Найдите коэффициент Джини и сделайте вывод о равномерности распределения доходов в этой стране.
6. Всех жителей некоторой страны можно условно разделить на три равные по численности группы: бедные, средние и богатые. Значение коэффициента Джини равно 0,4. В стране было решено провести перераспределение доходов, изъяв 25% доходов богатой части населения и передав ее бедным. Новое значение коэффициента Джини оказалось равно 0,18. Определите доли дохода каждой из трех групп до и после перераспределения.
7. В таблице распределены данные, характеризующие распределение денежных доходов населения Смоленской области в 2011, 2012 и 2013 годах

Годы	2017	2018	2019
Денежные доходы — всего в %	100	100	100
в том числе по 20-процентным группам населения:			
первая (с наименьшими доходами)	6,1	6,0	6,0
вторая	11,0	10,9	10,9
третья	15,8	15,7	15,7
четвертая	22,9	22,9	22,9
пятая	44,2	44,5	44,5

   (Источник: Смоленская область в цифрах. 2020: Крат. стат. сб. / Смоленскстат – С., 2020. – С. 81.) По данным таблицы постройте кривые Лоренца для соответствующего года. Найдите коэффициент Джини для каждого года. Какая тенденция в распределении доходов населения Смоленской области проявляется?
8. Доход некоторого предприятия описывается функцией $R(t)= \quad e^{\quad t},\ \ \le t\le$. Найдите среднее значение дохода на промежутке [0, 10].

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. Известно, что предельный доход равен $MR(q)= \quad +q$. Определите функцию, обратную функции спроса $p^D=p^D(q)$. При какой цене объем спроса $q= \quad$?
2. Производительность труда рабочего в течение одного дня задается функцией $y=- \quad t+ \quad t+$ ден. ед./ч, $\ \le t\le \ $. Найдите объем продукции Q (в стоимостном выражении), произведенной за смену рабочим.
3. Кривая Лоренца для экономики страны А имеет вид:

$$y_A=\begin{cases} \quad x_A, если \ \le x_A\le \ , \\ - \quad + \ x_A, если \ < x_A\le \ , \end{cases}$$

где x_A – доля населения в %, y_A – доля доходов соответствующей группы населения в общей сумме доходов в стране *А*. В стране *В* кривая Лоренца описывается уравнением:

$$y_B=\begin{cases} \quad -x_B, если \ \le x_B\le \ , \\ - \quad + \quad x_B, если \ < x_B\le \ , \end{cases}$$

где x_B – доля населения в %, y_B – доля доходов соответствующей группы населения в общей сумме доходов в стране *В*. Для каждой страны определите коэффициенты Джини. В какой стране доходы распределены более равномерно.

4. В некоторой стране общество состоит из двух неравных по численности и уровню доходов групп: бедных и богатых. Известно, что бедные получают 40% совокупного дохода. Значение коэффициента Джини составляет 0,3. Рассчитайте долю бедных и долю богатых от общей численности населения.
5. Для некоторой страны кривая Лоренца имеет вид $y= - \ \frac{\pi}{\ }x, \ \le x \le$ Найдите коэффициент Джини и сделайте вывод о равномерности распре деления доходов в этой стране.

Производственные функции. Задача оптимизации производственных издержек.

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение производственной функции.
2. Какие виды производственной функции Вам известны?
3. Перечислите основные свойства неоклассической производственной функции.
4. Дайте определение средней производительности i -го ресурса для двухфакторной производственной функции $q=f(x \ , \ x)$.
5. Сформулируйте определение предельной (маржинальной) производительности i -го ресурса (предельного продукта i -го ресурса) для двухфакторной производственной функции $q=f(x \ , \ x)$.
6. Каков экономический смысл предельной производительности ресурса?
7. Сформулируйте определение эластичности выпуска по i -му ресурсу для двухфакторной производственной функции $q=f(x \ , \ x)$.
8. Дайте определение изокванты для двухфакторной производственной функции $q=f(x \ , \ x)$.
9. Перечислите основные свойства изоквант неоклассической производственной функции.
10. Сформулируйте определение предельной нормы замещения i -го фактора производства j -ым фактором производства R_{ij} .
11. Каков экономический смысл величины R_{ij} ?

Задания для аудиторной работы

1. Производство телевизоров характеризуется функцией $q= \ KL^{-}$. В течение недели затрачивается 125 ч труда и 125 ч работы машин. Определите: 1) сколько телевизоров выпускается в неделю; 2) на сколько часов должны возрасти затраты труда, чтобы выпуск не изменился, если в целях экономии было решено уменьшить работу станков на 5 ч; 3) во сколько раз возрастет выпуск, если администрация примет решение увеличить использование ресурсов в 8 раз.
2. Производственная функция фирмы имеет вид $q=- \ x + \ \ x + \ x \ x + \ \ x - x$. Найдите максимально возможный выпуск и обеспечивающие этот выпуск затраты ресурсов.
3. Определите характер отдачи от масштабов производства фирмы, если производственная функция имеет вид
   a. $q=(KL)$;
   b. $q= \ x \ \ y$.
4. Постройте изокванты для производственной функции $q=q(K,L)$, если
   a. $q=L^{-}K^{-}$;
   b. $q= \ K+ \ L$;

c. $q = min\left\{\frac{K}{}, \frac{L}{}\right\}$..

5. Производственная функция фирмы имеет вид $Q = KL$. Цена единицы труда P_L составляет 150 руб., а цена единицы капитала P_K – 1000 руб. Необходимый объем выпуска продукции составляет 1000 ед. Определите, при каком соотношении труда и капитала фирма минимизирует затраты. Постройте соответствующие изокванту и изокосту.
6. На основе статистических данных о затратах производственных фондов K, трудовых ресурсов L и соответствующем объёме выпущенной продукции y, постройте производственную функцию Кобба—Дугласа. Для построенной функции:
   a. определите предельные и средние производительности каждого ресурса;
   b. определите эластичность выпуска по каждому ресурсу;
   c. постройте изокванты, соответствующие объёмам выпущенной продукции;
   d. постройте график производственной функции;
   e. решите задачу минимизации производственных издержек, если цена единицы труда равна $P_L =$ ден.ед., цена единицы капитала $P_K =$ ден.ед.

L	3,45	3,48	3,06	3,85	3,44	4,08	4,5	4,31	3,57	3,55	4,61	3,99	4,78
K	6,17	7,55	6,93	7,73	7,43	7,55	7,6	6,88	6,54	4,37	6,82	7,33	6,01
y	10,11	13,65	13,75	12,43	14,33	15,26	15,9	18,21	13,22	13,45	12,22	12	13,07

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. Проверьте, удовлетворяет ли функция $f(x_1, x_2) = x_1 \frac{x_1 + x_2}{}$

6.

5. Дайте определение кривой безразличия для функции полезности $U=U(x\ ,\ x\ )$. Перечислите их основные свойства.
6. Сформулируйте определение предельной нормы замещения одного продукта другим для функции полезности $U=U(x\ ,\ x\ )$. Каков экономический смысл этого понятия?
7. Сформулируйте постановку задачи потребительского выбора.
8. Дайте определение бюджетного множества.
9. Дайте определение бюджетной линии.
10. Решите задачу потребительского выбора, если функция полезности имеет вид: а) $U(x\ ,x\ )=x\ _{\alpha}x\ _{\beta}$; б) $U(x\ ,\ x\ )=a\ x\ +a\ x$; в) $U=\left\{\frac{x}{a},\frac{x}{a}\right\}$.

<u>Задания для аудиторной работы</u>

1. Найдите предельную норму замещения второго товара первым товаром для функции полезности $U=x\ \ +x$, где $\chi\ $, $\chi\ $ – объем потребления первого и второго товара соответственно.
2. Предпочтения потребителя, который приобретает 10 л молока и 2 тюбика зубной пасты, выражаются функцией $U(x\ ,x\ )=\ \ (x-\ )+\ \ (x-\ )$. Определите, что полезнее приобрести покупателю: 1 литр молока или 1 тюбик зубной пасты?
3. Постройте кривые безразличия при уровнях потребительской оценки $U=\ ,U=\ ,U=\ $, если функция полезности имеет вид:
   а) $U=\ x+\ x\ ;$ б) $U=min\{\ x,\ x+y\}$.
4. Предпочтения индивида описываются функцией полезности вида $U=(x\ x\ )$. Постройте кривую безразличия, удовлетворяющую потребительскому набору $(\ ;\ )$. Постройте кривую безразличия, соответствующую уровню потребительской оценки, равному 100. Вычислите предельные нормы замещения для потребительских наборов $(\ ;\ )$ и $(\ ;\ )$, сравните полученные результаты и сделайте выводы.
5. Потребление человеком воды в день составляет 3 л. Полезность набора, состоящего из двух товаров — воды и хлеба — равна 10. Определите потребление хлеба, если функция полезности имеет вид $U=\ x+\ x$. Найдите минимальный доход, необходимый для покупки благ в таком количестве, если цена 1 л воды равна 8 руб., а цена хлеба — 25 руб.
6. Потребитель тратит свой совокупный доход в размере 2400 руб. на приобретение картофеля и других продуктов питания. Определите оптимальный набор потребителя, если цена картофеля $p_{кар}=\ \ руб$ за 1 кг, а стоимость условной единицы других продуктов питания $p_{др}=\ \ руб$. Функция полезности имеет вид $U(x\ ,\ x\ )=\sqrt{x\ x\ }$.
7. Предпочтения потребителя описываются логарифмической функцией полезности $U(x\ ,x\ )=\ \ (x-\ \ )+\ \ (x-\ )$. Потребитель имеет доход 300 д.е. в месяц, цена первого товара 50 д.е., цена второго товара — 20 д.е. Решите задачу потребительского выбора. Известно, что цена первого товара возросла на 10%, а цена второго — на 20%. Государственный бюджет компенсирует потери потребителя в виде дотации. Определите сумму государственной дотации, которую должен получить потребитель, чтобы он мог приобрести товары в прежнем количестве.

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. Проверьте, удовлетворяет ли функция $U(x\ ,x\ )=\quad x-x+\quad x-x$ свойствам функции полезности. Постройте для неё карту кривых безразличия.
2. Функция полезности имеет вид $U(x,y)=x\quad y$. Определите предельную норму замещения продукта Xпродуктом Y при условии, что их потребляемое количество удовлетворяет равенству $x=y$.
3. Постройте кривые безразличия при уровнях потребительской оценки $U=\ ,U=\ ,U=$, если функция полезности имеет вид:

   а) $U=x^{-}x^{-};$ б) $U=min\{x\ ,\ \ x\ \}$.
4. Определите угловой коэффициент угла наклона бюджетной линии потребителя при покупке им двух товаров Xи Y, цены на которые соответственно составляют 30 и 40 ден.ед.
5. Рациональный потребитель выбрал оптимальный набор, состоящий из 20 ед. первого блага и 25 ед. второго блага. Функция полезности имеет вид: $U(x\ ,x\ )=x\ +x$, располагаемый доход равен 100 д.е. в месяц. Определите, как изменился доход потребителя, если новый оптимальный набор содержит 10 ед. первого блага и 15 ед. второго блага, а уровень цен не изменился.

Дифференциальные и разностные уравнения в моделировании социально-экономических процессов.

Теоретические вопросы

1. Каково влияние фактора времени в моделировании экономических процессов?
2. Опишите модель естественного роста. Какие приложения данной модели Вам известны?
3. Выведите уравнение логистической кривой.
4. Опишите модель Эванса установления равновесной цены на рынке одного товара. Решите получившееся дифференциальное уравнение.
5. Дайте определение разностного уравнения.
6. Сформулируйте определение линейного разностного уравнения первого (второго) порядка. Приведите примеры.
7. Каков метод решения линейного разностного уравнения первого (второго) порядка?
8. Сформулируйте паутинообразную модель рынка с помощью модели разностного уравнения.
9. Охарактеризуйте модель экономического цикла Самуэльсона-Хикса.

Задания для аудиторной работы

1. Найдите все кривые, для которых эластичность во всех точках выражается линейной функцией.
2. Численность населения $y(t)$некоторой страны удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'=\quad y(\ -\ ^{-}\ y)$, где время tвыражается в годах. В начальный момент времени численность населения составляла 1000 человек. Через сколько лет численность населения вырастет в 4 раза?
3. Найдите объём реализованной продукции $q=q(t)$, если известно, что кривая спроса задаётся уравнением $p(q)=\ -q$, норма акселерации $\alpha=$, норма инвестиций $m=$, а объём реализованной продукции в начальный момент времени составляет $q(\ )=$.
4. Пусть функции спроса и предложения имеют вид $D(p)=\quad -\ p-\ \frac{dp}{dt}$, $S(p)=\ +\ p+\ \frac{dp}{dt}$. Найдите зависимость равновесной цены от времени, если в начальный момент времени цена равна 10. Вычислите $\lim\limits_{t\to\infty} p(t)$, постройте график функции $p=p(t)$.
5. Постройте паутинообразную модель рынка с учетом запаздывания для функций спроса $D(p)=a-b\cdot p$ и предложения $S(p)=\alpha+\beta\cdot p$. Найдите решение паутинообразной модели рынка, считая, что $p(1)=10$. Исследуйте на устойчивость модель при следующих значениях параметров:

   а) $a=100$, $b=10$, $\alpha=25$, $\beta=5$;

б) $a = 100$, $b = 10$, $\alpha = 10$, $\beta = 20$;
в) $a = 100$, $b = 10$, $\alpha = 20$, $\beta = 10$.

6. Найдите решение уравнения Хикса при заданных параметрах уравнения: акселератор $a = 1{,}25$, предельная склонность к потреблению $m = 0{,}95$ и автономное потребление $n = 0{,}1$.
7. Валовой внутренний продукт страны Y есть сумма инвестиций I , потребления C, госрасходов G и чистого экспорта X , причем потребление представляет собой функцию от ВВП прошлого периода: $C(t) = mY(t-1) + n$, где n – величина автономного потребления, m – предельная склонность к потреблению. Известно, что в некоторой стране в начальный момент времени ВВП составляет 1200 д.ед., предельная склонность к потреблению 0,8, а величина автономного потребления 250 д.ед. В первый год величина инвестиций равна 50 д.ед., госрасходов – 20 д.ед., а чистого экспорта – 10 д.ед. Ожидается, что ежегодно госрасходы будут возрастать на 5%, чистый экспорт убывать на 2 д.ед, а инвестиции сохраняться на постоянном уровне. Постройте соответствующую модель для определения ВВП и спрогнозируйте величину ВВП страны через 5 лет.

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. Пусть функции спроса и предложения имеют вид $D(p) = -p +$, $S(p) = p +$. Зная, что коэффициент пропорциональности $\gamma = —$, составьте соответствующую модель Эванса для определения равновесной цены. Найдите зависимость равновесной цены от времени $p = p(t)$, если $p(\ ) =$.
2. В городе с населением 3000 человек распространение гриппа подчиняется дифференциальному уравнению $y' = \quad y(\quad - y)$, где $y(t)$ — количество заболевших в момент времени t. В начальный момент времени количество заболевших составляет 3 человека. Через какое время заболеет 70% населения?
3. Дана модель Самуэльсона-Хикса с параметрами $a = 0{,}5$, $m = 0{,}68$, $n = 1{,}3$. Найдите общее решение уравнения. Сделать экономические выводы.
4. *Паутинообразная модель с обучением*. Цена на рынке определяется продавцами, стратегия которых в каждом периоде состоит в ориентации на некоторое средневзвешенное значение между спросом и предложением в предыдущем периоде. Эта стратегия описывается условием:
$$q^S(t+1) = \alpha \cdot q^S(t) + (1-\alpha) \cdot q^D(t),$$
где $0 < \alpha < 1$ - параметр, характеризующий стратегию продавца. Тем самым продавцы пытаются приспособиться к колебаниям цены, которые «обучают» его делать более точный прогноз предложения. Считая, что функции спроса и предложения линейны относительно цены, решите получившуюся модель. Исследуйте устойчивость модели, меняя параметр α произвольным образом.

Статическая детерминированная модель управления запасами без дефицита

<u>Теоретические вопросы</u>

1. Перечислите основные характеристики моделей управления запасами.
2. Сформулируйте основную задачу управления запасами.
3. Сформулируйте статическую детерминированную модель управления запасами без дефицита.
4. Каковы особенности модели с фиксированным временем выполнения заказа?
5. Сформулируйте модель управления запасами с наличием количественных скидок?
6. Сформулируйте модель производства партии продукции.

<u>Задания для аудиторной работы</u>

1. Компания занимается розничной продажей электротоваров. Одним из видов продукции являются утюги. Спрос на них составляет 25 утюгов в неделю, причем его величина равномерно распределяется в течение недели. Компания производит закупку утюгов по 9 д.ед. за штуку. Стоимость подачи одного заказа составляет 15 д.ед., а издержки хранения – 0,5 д.ед. за единицу среднего размера запаса в течение года плюс 15% среднегодовой стоимости запасов.
   a. Предполагая, что в году 50 недель, определите оптимальный размер заказа.
   b. В настоящее время компания заказывает утюги партиями по 300 штук. Какой будет величина экономии, если заказы будут подаваться в соответствии с найденным размером?
   c. Как изменится решение администрации компании относительно оптимального заказа, если стоимость подачи одного заказа снизится до 5 д.ед.?
2. Компания «Ватерлиния» продаёт 400 водяных матрасов в год, причем издержки хранения равны 1.5 тыс.руб. за матрас в день, издержки создания заказа — 60 тыс.руб. Время выполнения заказа составляет 6 дней. Предполагая, что в году 250 рабочих дней, определите оптимальный размер заказа, найдите точку восстановления запаса. Каким будет оптимальный размер заказа, если издержки хранения вырастут на 500 рублей?
3. Гипермаркет крупной торговой сети использует 12000 бумажных рулонов для чековых аппаратов в год. Каждый новый заказ чистых рулонов стоит 150 ден.ед., а издержки хранения одного рулона составляют 30% от его стоимости в год. Цена одного рулона равна 1,9 ден.ед., если размер заказа составляет до 2999 рулонов, 1,82 ден.ед при размере заказа от 3000 до 5999 рулонов и 1,74 ден.ед. при заказе от 6000 рулонов.
   a. Рассчитайте наилучший размер заказа для каждого диапазона цен. Как часто необходимо делать заказ в каждом случае? Каковы общие издержки в каждом случае?
   b. Постройте график функции общих издержек. Определите размер заказа, при котором функция общих издержек принимает наименьшее значение.
4. Некоторой фирме необходимо иметь в штате 1000 инженеров. При этом в компании наблюдается ротация кадров — и темп увольнения инженеров составляет 150 человек в год и является постоянным. Прежде чем приступить к работе, вновь принятые инженеры объединяются в группы для прохождения обучения на курсах, организуемых компанией. Проведение каждого цикла обучения обходится компании в 25000 ден.ед. Если нет возможности предоставить работу немедленно, то компания теряет 500 ден.ед. на человека в месяц. Определите, сколько инженеров следует принимать на каждый курс обучения, с какой частотой следует организовывать курсы и каковы общие годовые издержки на их организацию.

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. Крупной консалтинговой компании по компьютерным системам в бизнесе необходимо иметь диски под системные программы. Покупка дисков осуществляется у внешнего поставщика и, как было оценено, в ближайшем будущем использование дисков составит 20000 штук в год. Стоимость подачи одного заказа на партию дисков равна 32 д.ед. По оценкам специалистов фирмы годовые издержки хранения одного диска составит 1% его стоимости. Стоимость каждого диска равна 0,8 д.ед. Предполагается, что коэффициент использования дисков является постоянным, отсутствие запасов недопустимо.
   a. Требуется определить оптимальный размер одного заказа и количество заказов, которое следует подавать в течение года. Найдите соответствующее значение годовой стоимости запасов.
   b. Предположим, что оценка спроса оказалась заниженной, и фактическое значение спроса составило 24200 дисков в год. Определите новый оптимальный размер заказа и сравните величину издержек при найденном ранее размере заказа и при новом размере. Что можно сказать о чувствительности модели к изменению спроса?
2. Объем продаж демонстрационного зала автомобилей составляет 200 автомашин в год. Стоимость подачи каждого заказа равна 500 д.сд., а издержки хранения - 30%

среднегодовой стоимости запасов. Если размер заказа меньше, чем 50 автомобилей, то цена покупки одного автомобиля составляет 6000 д.ед. Для заказов, размер которых колеблется от 50 до 99 автомобилей, предоставляется скидка на закупочную цену в 1,5%, а заказам, размер которых составляет 100 и более автомобилей, соответствует скидка, равная 3%.

a. Требуется определить оптимальный размер заказа.
b. Изменится ли оптимальный размер заказа, если поставщик увеличит размер скидки с 3 до 5%?

3. Магазин «Лада» закупает духи «Ландыш» на одной из парфюмерных фабрик города. Годовой спрос на этот продукт составляет примерно 600 шт. Издержки на заказ равны 850д.ед., издержки хранения - 510д.ед. на 1 упаковку (20 шт.) в год. Магазин заключил договор на поставку с фиксированным интервалом времени. Количество рабочих дней в году — 300. Время поставки товара - 6 дней. Стоимость одного флакона 135 д.ед. Чему равно оптимальное число заказов в течение года, точка восстановления заказа и минимальные совокупные издержки?

Статические детерминированные модели управления запасами с дефицитом. Модель с производством.

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте модель управления запасами в условиях планирования дефицита.
2. Каково графическое представление динамики изменения количества товара в модели с дефицитом?
3. Как определяется плотность убытков из-за неудовлетворенности спроса?

Задания для аудиторной работы

1. Годовой объем продаж тостера «Слава» для магазина равен 3000 единиц (или 10 единиц в день). Издержки заказа равны 25 тыс.руб., а издержки хранения – 0,4 тыс.руб. в день. Так как тостер «Слава» является очень популярной моделью, то в случае отсутствия товара в магазине покупатели обычно согласны подождать, пока не подойдет следующий заказ. Однако издержки от дефицита равны 0,75 тыс.руб. за тостер в день. Каков оптимальный размер заказа для магазина? Каков максимальный дефицит? Чему равны совокупные издержки?
2. На некотором станке производятся детали в количестве 2000 единиц в месяц, при этом стоимость производственного цикла составляет 1000 д. ед. Эти детали используются для производства продукции на другом станке, потребность в деталях которого составляет 500 единиц в месяц. Оставшиеся детали образуют запас. По оценкам специалистов компании, издержки хранения составляют 20% средней стоимости запасов в год. Стоимость производства одной детали равна 2,50 д. ед.
   a. Каким должен быть оптимальный размер партии деталей, производимой на первом станке, и с какой частотой следует организовывать циклы для производства этих деталей в течение года?
   b. Определите оптимальный размер партии детали, производимой на первом станке, если удалось снизить издержки производства до 500 д. ед.?
   c. Как изменился бы ответ на первый вопрос, если бы произошло дальнейшее снижение стоимости производства до 250 д. ед.?

Задания для самостоятельной работы

1. Известно, что годовая потребность сельхозпредприятия в минеральных удобрениях составляет 320 кг, издержки содержания запаса - 4,1 руб./кг-год, стоимость выполнения поставки - 21 руб., а потери от дефицита - 0,015 руб./кг-сутки. Определите оптимальный размер партии поставки, величину максимального запаса, максимальный дефицит и длительность дефицитной ситуации.

2. На некотором станке производятся клапаны в количестве 12000 единиц в год. Эти клапаны используются для производства продукции на другом станке, потребность которого в клапанах составляет 3600 единиц в год. Оставшиеся клапаны образуют запас. Издержки хранения составляют 0,5 д.ед. за один клапан в год. Стоимость производственного цикла на первом станке равна 800 д.ед. Рассчитайте оптимальный размер партии клапанов на первом станке. Определите продолжительность одного производственного цикла. Найдите минимальные совокупные издержки.

Понятие о стохастических моделях управления запасами

Теоретические вопросы

1. Каковы особенности стохастических моделей управления запасами? Какие разновидности стохастических моделей Вы знаете?
2. Как определяется оптимальный размер запаса в случае дискретного (непрерывного) случайного спроса?

Задания для аудиторной работы

1. Предприятие «Водолей» закупает фильтрующие установки с запасными сменными фильтрами к ним. Издержки хранения одного запасного фильтра равны 1500ден.ед. В случае выхода установки из строя из-за засорившегося фильтра, отсутствующего в запасе, простой установки и срочный заказ нового фильтра обойдутся предприятию в 30000 ден.ед. Опытное распределение установок по числу фильтров, потребовавших замену, представлено в таблице. Определите оптимальное число запасных фильтров, которое следует приобрести вместе с установкой.

Число фильтров	0	1	2	3	4	5	6	⩾7
Вероятность замены	0,0	0,1	0,8	0,05	0,02	0,01	0,01	0,01

2. Решите задачу №1 при условии непрерывного случайного спроса: а) распределенного по показательному закону с функцией распределения $F(r) = -e^{-\lambda r}$ при $\lambda =$; б) распределённого по нормальному закону с математическим ожиданием 3 и дисперсией 2, в) распределенного равномерно с дисперсией 3 и математическим ожиданием 6.

Задания для самостоятельной работы

1. Компания «Елки-палки» занимается закупкой новогодних ёлок. Менеджеру по продажам требуется определить количество ёлок, заготовленных к празднику. Каждая ёлка стоит компании 4 ден.ед., а цена, по которой компания продаёт её, составляет 7,5 ден.ед. Нераспроданные вовремя ёлки сбыта не находят. Решите задачу, если: а) спрос распределён по нормальному закону с математическим ожиданием 200 и дисперсией 300, б) спрос распределен равномерно с теми же дисперсией и математическим ожиданием.

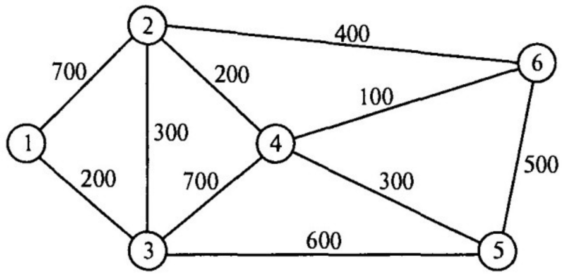
Задача о кратчайшем пути в графе

Теоретические вопросы

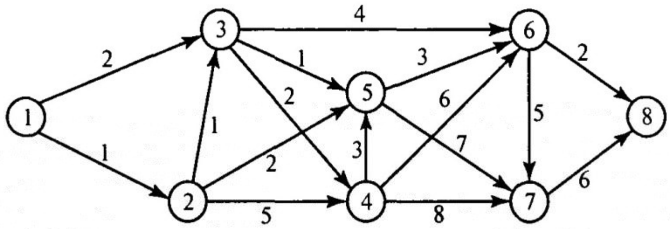
1. В чем заключается задача о кратчайшем пути в графе?
2. Сформулируйте алгоритм Дейкстры отыскания кратчайшего пути в графе.

Задания для аудиторной работы

1. Почтовая компания обслуживает шесть удаленных друг от друга районов, которые связаны сетью, представленной на рисунке. Компании необходимо определить наиболее эффективные маршруты пересылки почтовых отправлений между любыми двумя районами.



2. На рисунке показана транспортная сеть, соединяющая восемь городов, и расстояния между ними. Найдите кратчайшие маршруты между следующими городами: а) города 1 и 8; б) города 1 и 6; в) города 4 и 8; г) города 2 и 6.



Задания для самостоятельной работы

1. Компания по прокату автомобилей разрабатывает план по обновлению парка своих машин на следующие 5 лет (2022-2026 гг.). Создайте модель замены оборудования, предполагая, что автомобиль до замены должен эксплуатироваться не менее двух и не более четырех лет. Стоимость замены автомобиля в 2022-2026 гг. представлена в таблице:

Год покупки	Стоимость замены (в ден. ед.) в зависимости от срока эксплуатации		
	2	3	4
2022	3800	4100	6800
2023	4000	4800	7000
2024	4200	5100	7200
2025	4800	5700	–
2026	5300	–	–

2. Пекарня имеет пять точек по реализации своей продукции. Арендуя пять автомобилей, пекарня ежедневно поставляет в каждую точку заказанную продукцию, причем объем продукции всегда соответствует максимальной загрузке автомобиля (таким образом, использование одного авто для попутной доставки в несколько точек исключается). Специалист отдела логистики лично проехал между всеми этими объектами и занес в таблицу реальное расстояние между *i*-й и *j*-й точками (если между ними есть дорога). Таким образом, была учтена дорожная ситуация. Найдите оптимальный путь от пекарни до каждой из точек.

	№1	№2	№3	№4	№5	Пекарня
№1	0	5	4	12	1	–
№2	5	0	3	10	6	13
№3	4	3	0	6	13	22
№4	1	8	8	0	6	12
№5	4	9	3	8	0	10
Пекарня	–	13	24	14	20	0

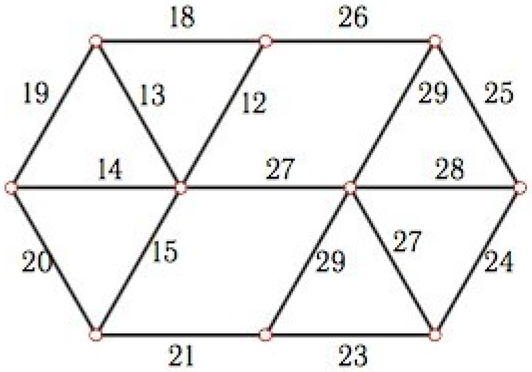
Задача о нахождении графа наименьшей длины

Теоретические вопросы

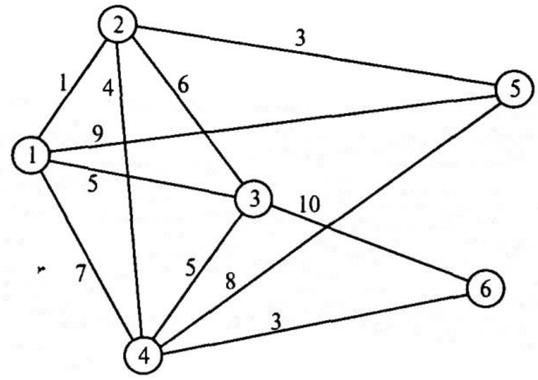
1. Дайте определение графа наименьшей длины. Приведите примеры.
2. Каким свойством обладает граф наименьшей длины?
3. Сформулируйте алгоритм построения графа наименьшей длины.

Задания для аудиторной работы

1. Постройте граф наименьшей длины



2. Маленькая интернет-компания «Гном-Телеком» планирует подключение к своей сети пяти новых районов города. На рисунке показана структура планируемой сети и расстояния между районами и серверной фермой компании.



Спланируйте: а) наиболее экономичную сеть; б) наиболее экономичную сеть при условии, что районы 2 и 5 невозможно соединить напрямую.

3. По заданной матрице расстояний постройте соответствующий ей граф и граф наименьшей длины:

$M =$

4. Для обустройства загородного дома Олег Архипович решил проложить дорожки, соединяющие все объекты инфраструктуры: дом (А), баня (Б), гараж (В), домик для гостей (Г), беседка (Д), бассейн (Е), водопад (Ё), теннисный корт (Ж) и футбольное поле (З). Длина предполагаемых дорожек между объектами приведена в таблице.

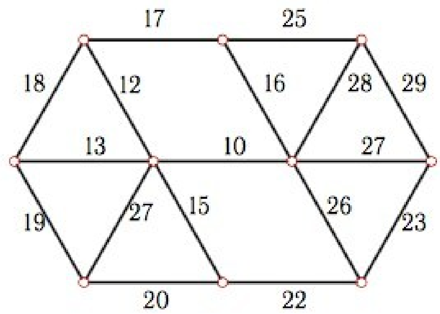
	А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж	З

А	0	10	10	80	40	20	100	60	70
Б	10	0	20	100	20	10	90	120	100
В	10	20	0	60	40	60	110	50	60
Г	80	100	60	0	40	40	90	40	60
Д	40	20	40	40	0	40	80	60	80
Е	20	10	60	40	40	0	120	20	30
Ё	100	90	110	90	80	120	0	30	80
Ж	60	120	50	40	60	20	30	0	10
З	70	100	60	60	80	30	80	10	0

Разработайте проект наименьшей стоимости.

Задания для самостоятельной работы

1. Постройте граф наименьшей длины



2. Проводится газификация поселков А, Б, …, Ж Первоапрельского района Весенней губернии. Расстояние между населенными пунктами (в км) приведено в таблице:

Пункты	А	Б	В	Г	Д	Е	Ё	Ж
А	0	3	6	7	5	7	15	12
Б	3	0	1	6	4	7	13	9
В	6	1	0	6	4	3	9	7
Г	7	6	6	0	8	4	3	6
Д	5	4	4	8	0	2	8	3
Е	7	7	3	4	2	0	5	2
Ё	15	13	9	3	8	5	0	5
Ж	12	9	7	6	3	2	5	0

Постройте конфигурацию газопровода, имеющего наименьшую протяженность.

3. Телефонная компания получила заказ на местную телефонизацию 8 деревень, расположенных в необжитой части Сибири. В каждой деревне построили небольшую АТС, и только на АТС возможно разветвление проводов. Важно, чтобы между любыми двумя деревнями была телефонная связь. Ввиду наличия множества хищных зверей, проживающих в окрестных лесах, и мерзлости грунта, кабель решили прокладывать в воздухе, на уже имеющихся столбах линий электропередач и иных надземных коммуникаций, соединяющих некоторые из деревень. Заданы расстояния между деревнями, которые уже соединены коммуникациями. Найти самое экономичное решение. Критерий: минимальная суммарная длина телефонных проводов. Вычислить стоимость проекта, если стоимость прокладки 1 км телефонной линии равна 9000 руб. Расстояния между деревнями (там, где есть коммуникации) даны в таблице:

	Д1	Д2	Д3	Д4	Д5	Д6	Д7	Д8
Д1	0	15	–	15	19	20	25	12
Д2		0	20	11	–	16	11	–

Д3			0	8	12	3	5	2
Д4				0	7	5	–	9
Д5					0	4	18	7
Д6						0	9	4
Д7							0	–
Д8								0

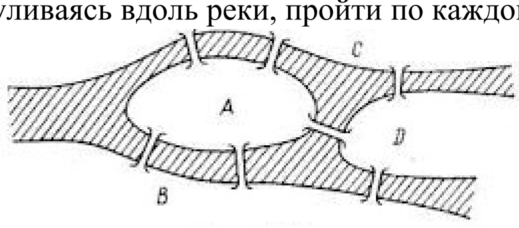
Задача инспекции дорог.

Теоретические вопросы

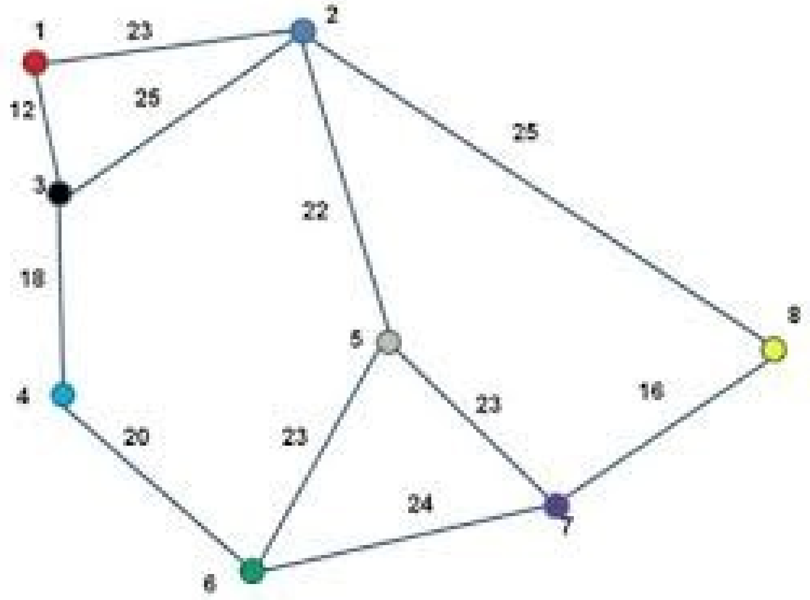
1. Дайте определение степени вершины графа. Приведите примеры.
2. Какой цикл в графе называется эйлеровым?
3. Сформулируйте критерий существования эйлерова цикла.
4. В чем состоит задача китайского почтальона? Сформулируйте алгоритм ее решения.

Задания для аудиторной работы

1. *«Задача о кенигсбергских мостах».* В городе Кенигсберге было 7 мостов через реку Прегель. Можно ли, прогуливаясь вдоль реки, пройти по каждому мосту ровно один раз?

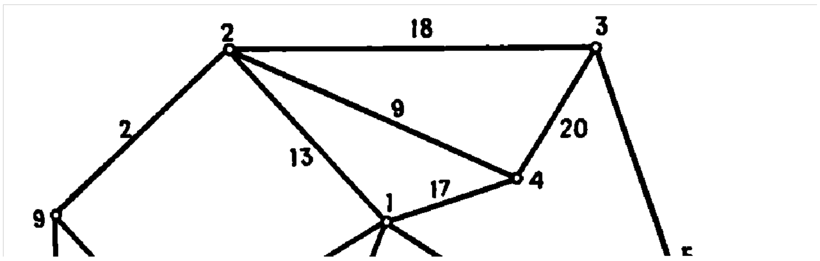


2. Цирк «Царь тайги» проводит рекламную кампанию в городе, используя промоавтомобиль. Схема городских улиц представлена в виде графа. Промоавтомобиль должен объехать все улицы города хотя бы один раз. Определите длину наименьшего пути промоавтомобиля, если цирк находится в вершине №1 графа.



Задания для самостоятельной работы

1. Дана схема дорог микрорайона. Выехав с базы (вершина 1), требуется, затратив наименьшее время, обработать противогололедной смесью все дороги и вернуться обратно. Время проезда по каждой, улице микрорайона представлено на схеме.



Задача коммивояжера.

<u>Теоретические вопросы</u>

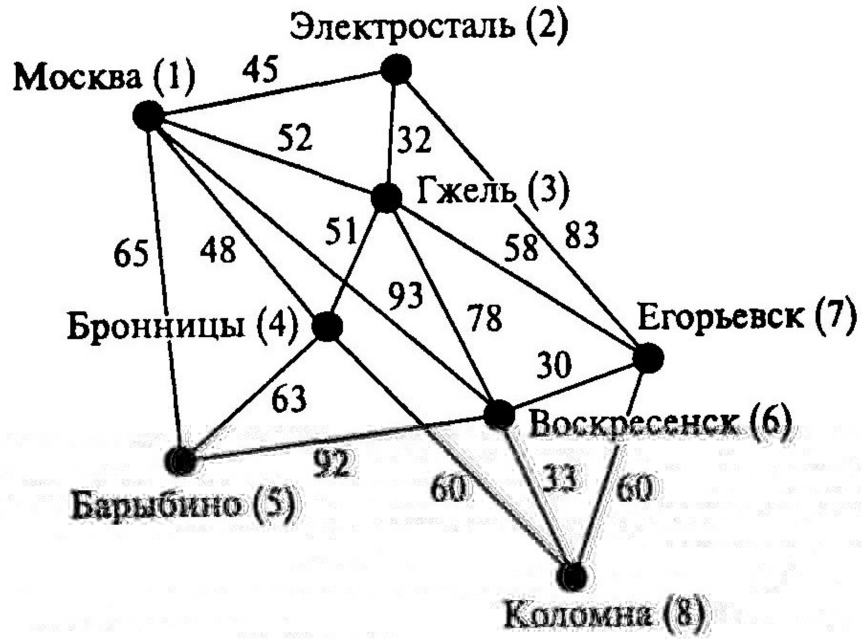
1. Дайте определение полного графа. Приведите примеры.
2. Какой цикл в графе называется гамильтоновым?
3. В чем состоит задача коммивояжера.
4. Сформулируйте деревянный алгоритм решения задачи коммивояжера.
5. Какие еще методы решения задачи коммивояжера Вам известны?
6. Какова модель линейного программирования решения задачи коммивояжера?

<u>Задания для аудиторной работы</u>

1. Почтальон Печкин, выехав из деревни Простоквашино, должен доставить почту еще в четыре деревни данного района, побывав в каждой деревне ровно один раз, и вернуться назад. Определите кольцевой маршрут минимальной продолжительности Печкина, если время движения между деревнями этого района известно и представлено в виде матрицы:

Деревня	П	А	Б	В	Г
П	0	20	50	40	10
А	20	0	70	20	15
Б	50	70	0	30	40
В	40	20	30	0	80
Г	10	15	40	80	0

2. Представитель фирмы с целью инспектирования выезжает из центрального офиса в г. Москва в филиалы, расположенные в городах Московской области (см. схему). Он должен посетить каждый филиал и вернуться обратно в кратчайшие сроки. Определите самый короткий маршрут объезда всех филиалов.



<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. Решите задачу коммивояжера по следующей матрице расстояний:

Пункты	А	Б	В	Г	Д	Е
А	0	20	28	12	39	32
Б	21	0	15	9	17	27
В	30	25	0	45	29	47
Г	7	52	40	0	15	1
Д	50	46	11	5	0	34
Е	11	45	14	21	30	

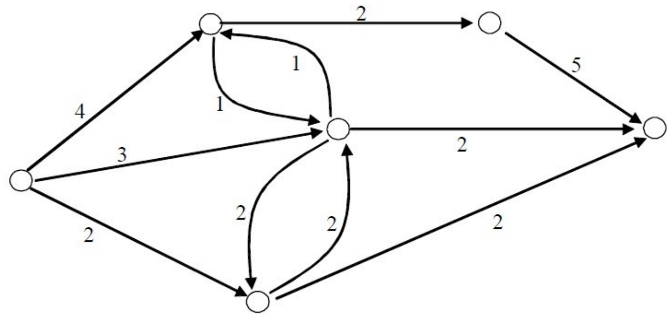
Потоковые модели. Задача о наибольшем потоке

<u>Теоретические вопросы</u>

1. Дайте определение потока физической величины. Приведите примеры.
2. Что такое пропускная способность некоторого объекты?
3. Сформулируйте определение транспортной сети.
4. В чем состоит свойство непрерывности потока в транспортной сети?
5. Какая дуга в сети называется насыщенной? Дайте определение полного потока в транспортной сети.
6. Сформулируйте задачу о максимальном потоке.
7. Сформулируйте алгоритм Форда-Фалкерсона решения задачи о наибольшем потоке?
8. Постройте математическую модель задачи линейного программирования для решения задачи о наибольшем потоке.

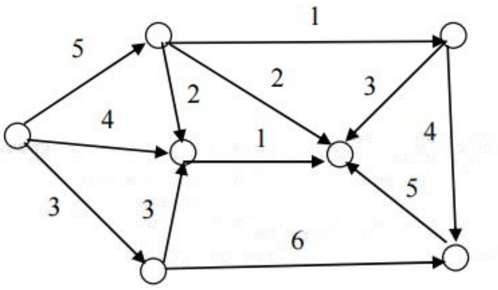
<u>Задания для аудиторной работы</u>

1. Транспортная система городка С представлена на рисунке.

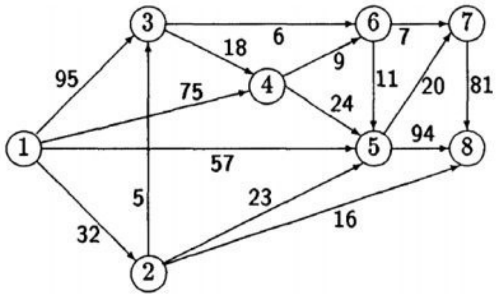


Найдите максимальный поток автомобилей, который способна обслужить данная система, если цифрами обозначена максимальная пропускная способность каждого участка дороги (тыс. машин в день). Дайте рекомендации мэру городка о необходимости расширения транспортной сети.

2. Газотранспортная система некоторого городка представлена на схеме. Найдите распределение объема газа по каждому из трубопроводов, при котором общий объем транспортируемого газа будет наибольшим, если схема имеет вид:



а)

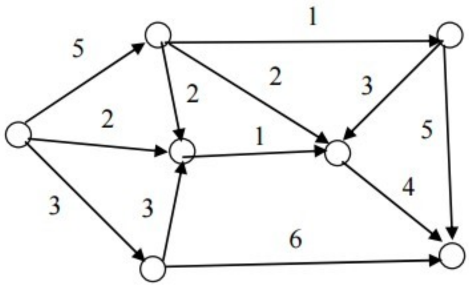


б)

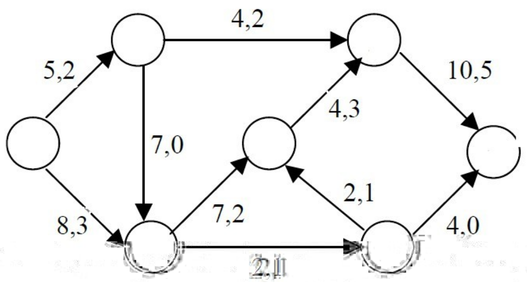
Укажите «узкое место» сети и определите его пропускную способность.

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. Газотранспортная система некоторого городка представлена на схеме. Найдите распределение объема газа по каждому из трубопроводов, при котором общий объем транспортируемого газа будет наибольшим, если схема имеет вид:

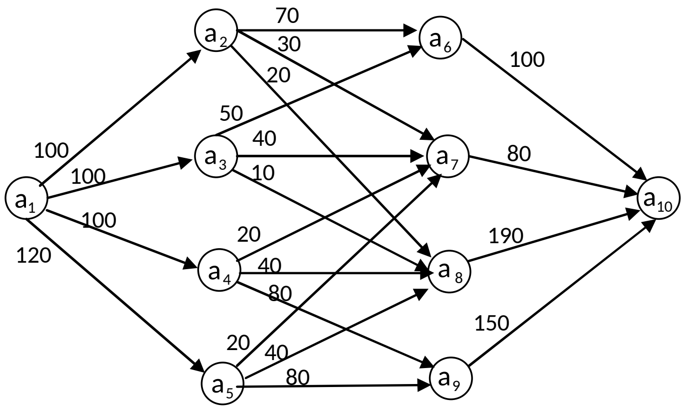


а)



б)

2. Заданы топология и пропускные способности каналов замкнутой информационной сети. Найдите максимальный поток, проходящий по данной сети.



Построение линейных оптимизационных моделей. Графический метод решения задач линейного программирования.

Теоретические вопросы

1. Дайте общую постановку задачи о распределении ресурсов, постройте ее математическую модель.
2. Дайте общую постановку задачи о рационе питания, постройте ее математическую модель.
3. Какая функция называется целевой функцией задачи линейного программирования?
4. Дайте определение опорного (оптимального) решения задачи.
5. Сформулируйте алгоритм решения задачи линейного программирования графическим методом. Приведите пример.

Задания для аудиторной работы

Постройте математическую модель задачи и решите её графическим методом:

1. Фирма «Тояматоканава» производит совковые и штыковые лопаты. Для их изготовления требуется листовой металл и древесина. Для изготовления одной совковой лопаты требуется 0,04 листа металла и 0,004$м^3$ древесины, а для изготовления одной штыковой лопаты – 0,02 листа металла и 0,004$м^3$ древесины. Розничная цена одной совковой лопаты 60 *ден.ед.*, а штыковой – 50 *ден.ед.* Изучение рынка сбыта показало, что спрос на штыковые лопаты превышает спрос на совковые не более, чем на 3 *тыс.шт.* в месяц. Кроме того, спрос на совковые лопаты не превышает 11 *тыс.шт.* в месяц. Сколько лопат каждого вида должна изготовлять фирма в месяц, если она располагает 450 листами металла и 60$м^3$ древесины и хочет получить наибольший доход от реализации своей продукции?

2. Фармацевтическая компания ежедневно производит не менее 800 кг некой пищевой добавки – смеси кукурузной и соевой муки, состав которых представлен в таблице:

Мука	Компоненты (в кг на 1 кг муки)		Стоимость ден.ед. в
	белок	клетчатка	
Кукурузная	0,09	0,02	0,3
Соевая	0,6	0,06	0,9

Диетологи требуют, чтобы в пищевой добавке было не менее 30% белка и не более 5% клетчатки. Фирма хочет определить рецептуру смеси минимальной стоимости с учетом требований диетологов.

3. Компания Show&Sell имеет возможность рекламировать свою продукцию по местному радио и телевидению. Бюджет на рекламу ограничен суммой 10000 дол. в месяц. Одна минута рекламного времени на радио стоит 15, а на телевидении – 300 дол. Компания предполагает, что реклама по радио по времени должна превышать рекламу на телевидении не менее чем в два раза.
Вместе с тем, известно, что нерационально использовать более 400 минут рекламы на радио в месяц. Последние исследования показали, что реклама на телевидении в 25 раз эффективнее рекламы на радио. Разработайте оптимальный бюджет для рекламы на радио и телевидении.

4. Автотранспортному предприятию (АТП) необходимо освободить из-под груза складские помещения клиента. Вывоз груза следует осуществлять в два района колоннами автомобилей. Условия перевозки требуют, чтобы в составе каждой колонны, предназначенной для вывоза груза в первый район, было 8 автомобилей VOLVO и 8 автомобилей КАМАЗ; в колоннах второго рейса 8 автомобилей КАМАЗ и 16 – SCANIA. Характер груза позволяет полностью использовать грузоподъемность всех автомобилей. Каждая из колонн может сделать одинаковое количество поездок за сутки. Парк подвижного состава АТП состоит из 32 автомобилей VOLVO, грузоподъемностью 3 т, 48 автомобилей КАМАЗ грузоподъемностью 4 т, 48 автомобилей SCANIA грузоподъемностью 7,5 т. Определите количество колонн, которое нужно направить в каждый район, чтобы перевезти наибольшее количество груза.

5. После предпринятой рекламной кампании фирма «Давидко» испытывает необыкновенный рост спроса на два типа мангалов для приготовления шашлыков на открытом воздухе — газовые и угольные. Фирма заключила контракт на ежемесячную поставку в магазины 300 угольных и 300 газовых мангалов.
Производство мангалов ограничивается мощностью участка производства деталей, участка сборки и участка упаковки. В таблице приведены данные показывающие, какие трудозатраты возникают на каждом участке на каждую единицу продукции, а также допустимый ежемесячный объем трудозатрат.

Участок	*Трудозатраты*		*Фонд времени, чел.ч.*
	на угольный мангал	*на газовый мангал*	
Производство	5	8	2600
Сборка	0,8	1,2	400
Упаковка	0,5	0.5	200

Фирма «Давидко» не может обеспечить выполнение контракта своими силами. Поэтому она провела переговоры с другим производителем, который в настоящее время располагает избыточными мощностями. Этот производитель согласился поставлять фирме «Давидко» в любом количестве угольные мангалы по 3 тыс. руб. за штуку и газовые мангалы по 5 тыс. руб. за штуку. Эти цены превышают себестоимость мангалов на заводе фирмы «Давидко» на 1,5 тыс. руб. за каждый угольный мангал и на 2 тыс. руб. за каждый газовый мангал. Задача фирмы «Давидко» состоит в том, чтобы найти такое соотношение закупаемых и производимых мангалов, которое обеспечило бы выполнение контракта с минимальными общими затратами.
Ответьте на следующие вопросы:
1) Каковы минимальные издержки на выполнение контракта (в тыс. руб.)?
2) Сколько угольных мангалов следует ежемесячно производить фирме «Давидко»?
3) Сколько газовых мангалов следует ежемесячно производить фирме «Давидко»?
4) Сколько газовых мангалов следует приобретать?
5) Следует ли сохранить объемы производства и закупок газовых мангалов, если компания, выполняющая заказы для фирмы «Давидко», поднимет цену на газовые мангалы до 5,5 тыс. руб., (да — 1, нет — 0)?

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

Постройте математическую модель задачи и решите её графическим методом:

1. Фирма выпускает изделия двух типов *A* и *B*. При этом используется сырье 4 видов. Расход сырья каждого вида на изготовление одной тысячи изделий задан в таблице:

Изделие	Сырье			
	1	2	3	4
A	2	1	0	2
B	3	0	1	1

Запасы сырья 1-ого вида составляют 21 ед., 2-ого вида – 4 единицы, 3-его вида – 6 ед., 4-ого вида – 10 ед. Выпуск одной тысячи изделий типа *A* приносит доход 300 ден. ед., одной тысячи изделий типа *B* - 200 ден. ед. Составьте план производства, обеспечивающий фирме наибольший доход.

2. Из пункта А в пункт В ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда. Данные об организации перевозок представлены в таблице:

Поезда	Количество вагонов в поезде				
	багажный	почтовый	плацкарт	купейный	мягкий
Скорый	1	1	5	6	3
Пассажирский	1	–	8	4	1
Число пассажиров	–	–	58	40	32
Парк вагонов	12	8	81	70	26

Сколько должно быть сформировано скорых и пассажирских поездов, чтобы перевезти наибольшее количество пассажиров?

3. Молочный комбинат может выпускать два сорта творожной массы, используя три вида сырья – творог, наполнители (масло, сливки, сахар, ванилин) и специальные добавки (сухофрукты). Затраты творога на 1 кг массы первого вида составляют 0,15 кг, а второго вида – 0,75 кг. Затраты наполнителей на 1 кг массы первого вида составляют 0,5 кг, а второго вида – 0,25 кг. Затраты добавок на 1 кг массы первого вида составляют 0,35 кг, а при производстве второго вида творожной массы не используются. Запасы творога составляют 525 кг, наполнителей – 400 кг, добавок – 210 кг. Цена одного килограмма первого вида творожной массы составляет 50 д.е., второго вида – 75 д.е. Найдите план производства, при котором доход от продажи творожной массы наибольший. Определите величину дохода.

4. Мебельная фабрика выпускает шкафы-купе, стенки и спальные гарнитуры. Суточный плановый выпуск соответственно равен 90, 70 и 60 штук. Суточные ресурсы фабрики составляют 800 единиц производственного оборудования, 910 единиц сырья и 790 единиц электроэнергии. Расход ресурсов на единицу продукции приведен в таблице.

Ресурсы	Расход ресурсов на одно изделие		
	Шкаф-купе	Стенка	Спальный гарнитур
Оборудование	2	3	4
Сырье	1	4	5
Электроэнергия	2	3	4

Стоимость одного шкафа – 11 у.е., стенки – 17 у.е. и спального гарнитура – 25 у.е. Сколько необходимо производить изделий каждого вида, чтобы стоимость продукции, выпущенной сверх плана, была максимальной?

Анализ модели на чувствительность

Теоретические вопросы

1. Дайте общую постановку задачи о распределении ресурсов и постройте ее математическую модель.
2. Что такое анализ модели на чувствительность?
3. Какие основные задачи анализа модели на чувствительность Вам известны?

Задания для аудиторной работы

1. *Выполните анализ модели на чувствительность следующей задачи:* Фирма «Тояматоканава» производит совковые и штыковые лопаты. Для их изготовления требуется листовой металл и древесина. Для изготовления одной совковой лопаты требуется 0,04 листа металла и 0,004$м^3$ древесины, а для изготовления одной штыковой лопаты – 0,02 листа металла и 0,004$м^3$ древесины. Розничная цена одной совковой лопаты 60 *ден.ед.*, а штыковой – 50 *ден.ед*. Изучение рынка сбыта показало, что спрос на штыковые лопаты превышает спрос на совковые не более, чем на 3 *тыс.шт.* в месяц. Кроме того, спрос на совковые лопаты не превышает 11 *тыс.шт.* в месяц. Сколько лопат каждого вида должна изготовлять фирма в месяц, если она располагает 450 листами металла и 60$м^3$ древесины и хочет получить наибольший доход от реализации своей продукции?

2. Цех выпускает два вида продукции, используя два вида полуфабрикатов. Продукция используется при комплектовании изделий, при этом на каждую единицу продукции первого вида требуется не более двух единиц продукции второго вида. Нормы расходов полуфабрикатов каждого вида на единицу выпускаемой продукции, общие объемы полуфабрикатов и прибыль от единицы каждой продукции представлены в таблице:

Полуфабрикаты	Нормы затрат на единицу продукции		Объем полуфабрикатов
	$П_1$	$П_2$	
I	1	2	800
II	6	2	2400
Прибыль	10	35	

Определите план производства, обеспечивающий наибольшую прибыль. Выполните анализ модели на чувствительность по объемам полуфабрикатов.

Задания для самостоятельной работы

1. *Выполните анализ модели на чувствительность:* Молочный комбинат может выпускать два сорта творожной массы, используя три вида сырья – творог, наполнители (масло, сливки, сахар, ванилин) и специальные добавки (сухофрукты). Затраты творога на 1 кг массы первого вида составляют 0,15 кг, а второго вида – 0,75 кг. Затраты наполнителей на 1 кг массы первого вида составляют 0,5 кг, а второго вида – 0,25 кг. Затраты добавок на 1 кг массы первого вида составляют 0,35 кг, а при производстве второго вида творожной массы не используются. Запасы творога составляют 525 кг, наполнителей – 400 кг, добавок – 210 кг. Цена одного килограмма первого вида творожной массы составляет 50 д.е., второго вида – 75 д.е. Найдите план производства, при котором доход от продажи творожной массы наибольший. Определите величину дохода.

2. *Постройте математическую модель задачи:*

I

Пшеница и кукуруза высаживаются на участках различного плодородия площадью 100 и 200 га. Данные об урожайности приведены в таблице.

Культура	Урожайность (ц/га) участка

	I	II
Пшеница	20	15
Кукуруза	35	30

По плану должно быть собрано не менее 1500 ц пшеницы и 4500 ц кукурузы. Цена 1 ц пшеницы равна 6 у.е., кукурузы – 4 у.е. Найдите оптимальное сочетание посевов пшеницы и кукурузы, которое обеспечивает максимальную выручку от продажи.

II

Металлургическому предприятию требуется уголь с содержанием фосфора не более 0,3% и с долей зольных примесей не более 3,25%. Завод закупает три сорта угля *A*, *B*, *C* с известным содержанием примесей. Содержание примесей и цена исходных продуктов приведены в таблице:

Сорт угля	Содержание примесей, %		Цена 1т, ден.ед
	фосфор	зола	
A	0,06	2,0	30
B	0,04	4,0	30
C	0,02	3,0	45

В какой пропорции нужно смешивать исходные продукты *A*, *B*, *C*, чтобы смесь удовлетворяла ограничениям на содержание примесей и имела минимальную стоимость?

III

Фирма «Фасад» производит двери для продажи местным строительным компаниям. Репутация фирмы позволяет ей продавать всю производимую продукцию. На фирме работает 10 рабочих в одну смену (8 рабочих часов), 5 дней в неделю, что дает 400 часов в неделю. Рабочее время поделено между двумя существенно различными технологическими процессами: собственно производством и конечной обработкой дверей. Из 400 рабочих часов в неделю 250 ч отведены под собственно производство и 150 ч – под конечную обработку. «Фасад» производит 3 типа дверей: стандартные, полированные и резные. В таблице приведены временные затраты и прибыль от продажи одной двери каждого типа:

	Время на производство (мин.)	Время на обработку (мин.)	Прибыль (ден.ед.)
Стандартные	30	15	45
Полированные	30	30	90
Резные	60	30	120

а) Сколько дверей различных типов нужно производить, чтобы максимизировать прибыль?

б) Оптимально ли распределение рабочего времени между двумя технологическими процессами? Как измениться прибыль, если распределить рабочее время между этими процессами оптимально?

в) На предстоящей неделе фирма должна выполнить контракт на поставку 280 стандартных, 120 полированных и 100 резных дверей. Для выполнения заказа «Фасад» может закупить некоторое количество полуфабрикатов дверей у внешнего поставщика. Эти полуфабрикаты «Фасад» может использовать только для производства стандартных и полированных, но не резных дверей. При этом изготовление стандартной двери требует лишь 6 мин. процесса обработки, а полированной – 30 мин. обработки (процесс производства для этих полуфабрикатов не требуется). Полученная таким образом стандартная дверь приносит прибыль 15 ден. ед., а полированная – 50 ден. ед. Предполагая, что по-прежнему 250 часов в неделю отведено на производство и 150 часов под обработку, определите, сколько и каких дверей фирма должна производить самостоятельно, и сколько полуфабрикатов закупить для изготовления стандартных и полированных дверей?

г) Как изменится оптимальный план, полученный при выполнении предыдущего пункта, если правильно распределить время между собственно производством и обработкой дверей? Каково будет правильное распределение в данном случае?

Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Теоретические вопросы

1. Какая функция называется целевой функцией задачи линейного программирования?
2. Дайте определение допустимого (оптимального) решения задачи.
3. Сформулируйте основные теоремы существования оптимального решения задачи линейного программирования.
4. Сформулируйте алгоритм решения задачи линейного программирования симплекс-методом. Приведите пример.

Задания для аудиторной работы

1.Решите задачи линейного программирования симплекс-методом:

а) $z = x + x \to max\square$, $\begin{cases} x + x \le , \\ x - x \le , \\ x \ge , x \ge \end{cases}$

б) $z = x - x \to min\square$, $\begin{cases} x - x \ge , \\ x - x \ge - , \\ x \ge , x \ge \end{cases}$

в) $z = x + x \to min\square$, $\begin{cases} x + x \ge , \\ x + x \ge , \\ x + x \ge , \\ x \ge , x \ge \end{cases}$

г) $z = x + x \to max\square$, $\begin{cases} x + x \le , \\ x + x \ge , \\ x \ge , \\ x \ge , x \ge \end{cases}$

Задачи для самостоятельной работы

1.Решите задачи линейного программирования симплекс-методом:

а) $z = x - x \to max\square$, $\begin{cases} x + x \ge , \\ -x + x \le , \\ x + x \le , \\ x \ge , x \ge \end{cases}$

б) $z = x - x \to min\square$, $\begin{cases} x + x \ge , \\ -x + x \le , \\ x + x \ge , \\ x \ge , x \ge \end{cases}$

в) $z = x - x \to min\square$, $\begin{cases} x + x \ge , \\ x - x \ge , \\ -x - x \ge - , \\ x \ge , x \ge \end{cases}$

г) $z = x + x \to max\square$, $\begin{cases} x - x - \le , \\ x - x \ge , \\ x + x - \ge , \\ x \ge , x \ge \end{cases}$

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение основной задачи линейного программирования.
2. Сведите задачу

   $$\left\{ x + x \le ,¿ \left\{ x - x \ge ,¿¿¿¿ \right.\right.$$

   ¿

   к основной задаче линейного программирования.
3. Как применяются системы компьютерной математики к решению задач линейного программирования?

Задания для аудиторной работы

Решите предложенные задачи средствами системы компьютерной математики и MS Excel.

I

Пшеница и кукуруза высаживаются на участках различного плодородия площадью 100 и 200 га. Данные об урожайности приведены в таблице.

Культура	Урожайность (ц/га) участка	
	I	II
Пшеница	20	15
Кукуруза	35	30

По плану должно быть собрано не менее 1500 ц пшеницы и 4500 ц кукурузы. Цена 1 ц пшеницы равна 6 у.е., кукурузы – 4 у.е. Найдите оптимальное сочетание посевов пшеницы и кукурузы, которое обеспечивает максимальную выручку от продажи.

II

Металлургическому предприятию требуется уголь с содержанием фосфора не более 0,03% и с долей зольных примесей не более 3,25%. Завод закупает три сорта угля *A*, *B*, *C* с известным содержанием примесей. Содержание примесей и цена исходных продуктов приведены в таблице:

Сорт угля	Содержание примесей, %		Цена 1т, ден.ед
	фосфор	зола	
A	0,06	2,0	30
B	0,04	4,0	30
C	0,02	3,0	45

В какой пропорции нужно смешивать исходные продукты *A*, *B*, *C*, чтобы смесь удовлетворяла ограничениям на содержание примесей и имела минимальную стоимость?

III

Фирма «Фасад» производит двери для продажи местным строительным компаниям. Репутация фирмы позволяет ей продавать всю производимую продукцию. На фирме работает 10 рабочих в одну смену (8 рабочих часов), 5 дней в неделю, что дает 400 часов в неделю. Рабочее время поделено между двумя существенно различными технологическими процессами: собственно производством и конечной обработкой дверей. Из 400 рабочих часов в неделю 250 ч отведены под собственно производство и 150 ч – под конечную обработку. «Фасад» производит 3 типа дверей: стандартные, полированные и резные. В таблице приведены временные затраты и прибыль от продажи одной двери каждого типа:

	Время на производство (мин.)	Время на обработку (мин.)	Прибыль (ден.ед.)
Стандартные	30	15	45
Полированные	30	30	90
Резные	60	30	120

а) Сколько дверей различных типов нужно производить, чтобы максимизировать прибыль?

б) Оптимально ли распределение рабочего времени между двумя технологическими процессами? Как измениться прибыль, если распределить рабочее время между этими процессами оптимально?

в) На предстоящей неделе фирма должна выполнить контракт на поставку 280 стандартных, 120 полированных и 100 резных дверей. Для выполнения заказа «Фасад» может закупить некоторое количество полуфабрикатов дверей у внешнего поставщика. Эти полуфабрикаты «Фасад» может использовать только для производства стандартных и полированных, но не резных дверей. При этом изготовление стандартной двери требует лишь 6 мин. процесса обработки, а полированной – 30 мин. обработки (процесс производства для этих полуфабрикатов не требуется). Полученная таким образом стандартная дверь приносит прибыль 15 ден. ед., а полированная – 50 ден. ед. Предполагая, что по-прежнему 250 часов в неделю отведено на производство и 150 часов под обработку, определите, сколько и каких дверей фирма должна производить самостоятельно, и сколько полуфабрикатов закупить для изготовления стандартных и полированных дверей?

г) Как изменится оптимальный план, полученный при выполнении предыдущего пункта, если правильно распределить время между собственно производством и обработкой дверей? Каково будет правильное распределение в данном случае?

Задания для самостоятельной работы

Постройте математическую модель задачи и решите ее средствами системы компьютерной математики и MS Excel.

I.

Маленькая кондитерская фабрика должна закрыться на реконструкцию. Необходимо реализовать оставшиеся запасы сырья, для производства продуктов из ассортимента фабрики, получив максимальную прибыль. Запасы и расход каждого вида сырья для производства единицы продукции каждого вида, а также нормы прибыли для каждого продукта (прибыль на 1 пакет), представлены в таблице:

Сырье	Запасы, кг	Продукты, расход сырья, кг				
		Ореховый звон	Райский вкус	Батончик	Белочка	Ромашка
Темный шоколад	1411	0,8	0,5	1	2	1,1
Светлый шоколад	149	0,2	0,1	0,1	0,1	0,2
Сахар	815,5	0,3	0,4	0,6	1,3	0,05

Карамель	466	0,2	0,3	0,3	0,7	0,5
Орехи	1080	0,7	0,1	0,9	1,5	0
Прибыль/пакет		1	0,7	1,1	2	0,6

В разговоре с владельцем фабрики мастер, используя свой 20-летний опыт, предлагает выпустить по 200 пакетов каждого продукта, утверждая, что ресурсов «должно хватить», а прибыль получится, очевидно, 1080 д.е.

При разговоре присутствовал сын владельца фабрики, только что окончивший физико-математический факультет, который утверждает, что такие проблемы надо решать не «на глазок», а с помощью соответствующего математического аппарата. Умиленный отец обещает сыну всю прибыль сверх 1080 д.е., если он предложит лучший план, чем многоопытный мастер.

II.

Бакалейная лавка продает различные типы орехов. Владельца занимает проблема расфасовки орехов и их смесей. Лавка закупает 4 типа орехов и продает их в пакетах по 1 кг. Кроме того, лавка продает пакеты со смесью орехов, состоящей из 40% арахиса, и равных весовых частей всех остальных типов орехов. Количество запасов, стоимость и прибыль от продажи каждого типа орехов и смеси приведены в таблице. Считать, что издержки, связанные с расфасовкой и приготовлением смеси орехов пренебрежимо малы.

Пакет	Цена 1 пакета	Стоимость 1 кг	Имеющееся количество, кг
Смесь «Фирменная»	4		
Арахис	1,5	1	600
Кешью	4,8	3	360
Грецкие орехи	4,6	2,5	500
Миндаль	5	3,5	400

1) Сколько пакетов смеси и сколько пакетов с каждым из сортов орехов нужно приготовить и продать, чтобы максимизировать прибыль?
2) Определите теневые цены орехов. Что означают эти величины?
3) * Дело происходит в преддверие новогодних праздников. Владелец хочет получить больше прибыли. Поэтому он не может ждать новой поставки товара от своего поставщика и решает закупить 1000 кг орехов у своего конкурента с соседней улицы. Цены у конкурента такие же, как и у нашего владельца. Как Вы думаете, он сумасшедший? Если нет, то какое количество различных типов орехов Вы посоветуете ему закупить?

Построение двойственнэ□во1М *ээтж□тэWПю□GнНэлбН ж*

дж

$$\begin{cases} x \ -x \ \le - \ , \\ x - \ x \ \ge - \\ x \ -x \ \le \ , \\ x \ \ge \ , x \ \ge \ ; \end{cases} \qquad \begin{cases} - \ y + y \ - y \ \ge \ , \\ y + \ y - y \ \ge \ , \\ y \ge \ , y \ \ge \ , y \ \ge \end{cases}$$

Задания для самостоятельной работы

1. Для изготовления четырех видов продукции А, Б, В, Г используют три вида ресурсов I, II, III. Другие условия задачи представлены в таблице:

		А	Б	В	Г
I	3400	2	1	0,5	4
II	1200	1	5	3	0
III	3000	3	0	6	1
Прибыль от единицы продукции, ден. ед.		7,5	3	6	12

Определите план выпуска продукции, при котором прибыль от ее реализации наибольшая. Составьте и решите двойственную задачу. Поясните экономический смысл ее решения.

. Целочисленное программирование

Теоретические вопросы

1. В чем особенность задач целочисленного программирования?
2. Какова постановка задачи целочисленного программирования?
3. В чем состоит метод «ветвей и границ» решения задачи целочисленного программирования?
4. Верно ли, что значение целевой функции в оптимальном решении целочисленной задачи минимизации может быть меньше оптимального значения целевой функции соответствующей задачи с ослабленными ограничениями?

Задания для аудиторной работы

1. Найдите оптимальное целочисленное решение задачи:

$$\begin{cases} x + \ x + \ x \le \ \ , \\ x + \ x + \ x \le \ \ , \\ x_j \ge \ , x_j \in Z\left(j = \overline{\quad} \right), \end{cases}$$

$$z = x + \ x + \ x \ \rightarrow max \square .$$

2. На приобретение оборудования для нового производственного участка мебельной фабрики выделена 21 000 у.е. Оборудование должно быть размещено на площади, не превышающей 37 м^2. Предприятие может заказать оборудование двух видов: более мощные станки типа А стоимостью 3 000 у.е., требующие площадь в 6 м^2 (с учетом проходов) и обеспечивающие производительность 7 000 заготовок за смену, и менее мощные станки типа Б стоимостью 2 000 у.е., занимающие площадь 3 м^2 и дающие за смену 4 000 заготовок. Найдите оптимальный вариант приобретения оборудования, обеспечивающий новому участку максимальную производительность.

Задания для самостоятельной работы

1. Решите задачу целочисленного программирования:

$$\begin{cases} x \ +x \ \leq \ , \\ x + \ \ x \ \leq \ , \\ x_j \geq \ \ , x_j \in Z\left(j= \ \ \right), \end{cases}$$

$z = -x - \ \ x \ \rightarrow min$❑.

2. На приобретение нового оборудования для проведения параллельных вычислений выделено 20000 у.е. Оборудование должно быть размещено на площадь 72 м2. Вычислительная лаборатория может заказать оборудование двух видов: более мощные компьютеры типа А стоимостью 5000 у.е., требующие для установки 3 м2 площади (с учетом проходов) и выполняющие 800 млн. операций в секунду, и менее мощные компьютеры типа Б стоимостью 2000 у.е., занимающие площадь 6 м2 и выполняющие 200 млн. операций в секунду. Можно заказать не более трех компьютеров типа А. Найдите оптимальный вариант приобретения компьютеров, обеспечивающий максимальную производительность вычислений.

Дробно-линейное программирование.

Теоретические вопросы

1. Какие задачи проводят к задаче дробно-линейного программирования?
2. Сформулируйте задачу дробно-линейного программирования.
3. Какова особенность задачи дробно-линейного программирования?
4. Каким образом можно свести задачу дробно-линейного программирования к задаче линейного программирования? Приведите примеры.

Задания для аудиторной работы

1. Решите задачу дробно-линейного программирования непосредственно и с помощью системы компьютерной математики или MSExcel:

$$z = \frac{x \ +x}{x \ +x} \rightarrow max,$$

$$\begin{cases} x - \ \ x \ \geq - \ \ \ , \\ x \ +x \ \geq \ \ , \\ x \ -x \ \leq \ \ \ , \\ x \ \ ,x \ \geq \end{cases}$$

2. На промышленном комплексе по производству мяса откармливают свиней трех пород. Все данные представлены в таблице:

Вид корма	Запасы корма, ц	Требуемое количество корма для породы свиней в ц		
		Раннеспелой (до 1 года)	Среднеспелой (до 1,5 лет)	Позднеспелой (до 2 лет)
Грубый (сенная мука, трава)	8000	3	2	3
Сочный (корнеплоды, картофель)	6800	1	4	2

Комбикорм	3000	1	1	1
Стоимость откорма в ден. ед.		90	100	140
Продуктивность,ц		1,5	2	2,5

Требуется определить такое поголовье свиней каждой породы, чтобы себестоимость 1 ц мяса была минимальной.

Задания для самостоятельной работы

1. Решите задачу дробно-линейного программирования непосредственно и с помощью системы компьютерной математики или MSExcel:

$$z=\frac{x\ +x}{x\ +x}\rightarrow max,$$

$$\begin{cases} x\ +x\ \geq\ , \\ -x+\ \ x\ \leq\ , \\ x\ -x\ \leq\ , \\ x\ ,x\ \geq \end{cases}$$

2. Обувное предприятие «Смоленский башмачник» изготавливает босоножки «Сороконожка», туфли «Золушка» и сапоги «Миледи». При этом используется 3 вида материала. Данные о производстве представлены в таблице:

Материал	Затраты материала на одну партию обуви (усл.ед.)			Запасы (усл.ед.)
	«Сороконожка»	«Золушка»	«Миледи»	
Кожа	0,5	1	3	200
Ткань	0,1	1	2	130
Полиуретан	0,15	0,25	0,3	50

Величина производственных фондов, используемых для одной партии босоножек, туфель и сапог равны 500, 750, 1200 ден. ед. соответственно. Прибыль от реализации одной партии обуви равна 2200, 4000, 6500 ден. ед. Найдите план выпуска обуви, обеспечивающий максимальную рентабельность производства, если туфлей «Золушка» необходимо произвести не менее 10 партий, а сапог «Миледи» – не менее 50 партий.

Транспортная задача. Метод потенциалов.

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте транспортную задачу.
2. Какая задача называется закрытой (открытой)?
3. Сформулируйте алгоритм отыскания опорного плана методом минимальной стоимости.
4. Сформулируйте алгоритм метода потенциалов.

Задания для аудиторной работы

1. Составьте математические модели транспортных задач и решите их методом потенциалов:

а)

b_j	100	50	50	a_i
50	9	7	1	
70	8	5	3	
80	4	2	6	

б)

b_j	200	200	300	400	a_i
00	4	3	2	1	2
00	2	3	5	6	3
00	6	7	9	12	5

Задания для самостоятельной работы

1. Составьте математические модели транспортных задач и решите их методом потенциалов: а)

b_j / a_i	11	7	8	4
9	2	5	8	1
16	8	3	9	2
5	7	4	6	3

б)

b_j / a_i	100	200	200	300
100	1	3	4	1
200	5	2	2	7
400	4	4	3	6
200	7	2	5	3

Транспортная задача.

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте транспортную задачу. Структурируйте операцию, постройте математическую модель транспортной задачи.
2. Каково необходимое и достаточное условие разрешимости транспортной задачи? Какая задача называется закрытой (открытой)?
3. В чем особенность реализации транспортных задач в MS Excel (системах компьютерной математики)?
4. Как реализуется решение транспортной задачи в MS Excel (системах компьютерной математики) с ограничениями на пропускную способность?

Задания для аудиторной работы

Постройте математическую модель задачи и решите ее средствами MS Excel (системе компьютерной математики):

1. Три строительных участка потребляют щебень, вырабатываемый тремя дробильными установками. Суточная потребность в щебне строительных участков, производительность дробильных установок и стоимость перевозки 1 т от дробильных установок до строительных площадок приведены в таблице.

	Участок №1	Участок №2	Участок №3	Производительность дробильной установки
От установки №1	3	7	4	290
От установки №2	5	6	5	170
От установки №3	2	1	6	130
Потребность в щебне строительного участка	300	250	100	

Определите оптимальный план закрепления строительных площадок за дробильными установками с учетом минимальной стоимости перевозок.

2. Менеджер только что получил прогноз заказов и данные об ожидаемом наличии товара на следующий месяц. В следующих таблицах представлены данные о прибыли от поставок, заказах и наличии товара на складах.

Прибыль, в тыс.д.е.	Клиент 1	Клиент 2	Клиент 3	Клиент 4	Клиент 5	Клиент 6	Клиент 7	Клиент 8
Склад 1	345	340	360	360	350	355	335	340
Склад 2	335	360	355	355	345	345	350	355
Склад 3	350	340	340	345	350	345	350	345
Склад 4	350	335	350	340	360	360	365	360

Прогноз заказов:

	Клиент 1	Клиент 2	Клиент 3	Клиент 4	Клиент 5	Клиент 6	Клиент 7	Клиент 8
Заказы, шт.	26	14	28	17	13	18	34	54

Прогноз наличия товара на складах:

	Склад 1	Склад 2	Склад 3	Склад 4
Запасы, шт.	45	78	63	62

Решите задачу о перевозках с максимальной прибылью.

1) Какова ожидаемая прибыль?
2) Сколько единиц товара должно остаться на складах?

Задания для самостоятельной работы

Постройте математическую модель задачи и решите ее средствами MS Excel (системе компьютерной математики):

1. Компания, занимающаяся добычей железной руды, имеет четыре карьера C_1, C_2, C_3, C_4. Производительность карьеров соответственно 170, 150, 190 и 200 тыс.т ежемесячно. Железная руда направляется на три принадлежащие этой компании обогатительные фабрики S_1, S_2, S_3, мощности которых соответственно 250, 150 и 270 тыс.т в месяц. Транспортные затраты на перевозку 1 тыс.т руды с карьеров на фабрики указаны в таблице:

b_j \ a_i	S_1	S_2	S_3
C_1	7	3	8
C_2	5	4	6
C_3	4	5	9
C_4	6	2	5

Определите план перевозок железной руды на обогатительные фабрики, который обеспечивает минимальные совокупные транспортные издержки.

Ответьте на вопросы:

1) Сколько руды следует перевозить с карьера C_1 на обогатительную фабрику S_2?
2) Сколько руды следует перевозить с карьера C_4 на обогатительную фабрику S_3?
3) Какова общая минимальная стоимость перевозок?
4) Позже стало известно, что поставки с карьера C_1 на обогатительную фабрику S_2 нужно ограничить объемом 50 тыс.т. К тому же из-за плохого состояния дороги перевозки с карьера C_4 на обогатительную фабрику S_3 невозможны. Определите новый план перевозок, учитывающий эти условия. На сколько возрастет стоимость перевозок? Сколько руды следует перевозить с карьера C_4 на обогатительную фабрику S_2?

Многокритериальные модели

Теоретические вопросы

1. Какова постановка многокритериальной задачи? Приведите примеры.
2. В чем состоит метод уступок? Приведите примеры.
3. Сформулируйте алгоритм метода уступок.
4. В чем состоит метод равных и наименьших отклонений? В чем его отличие от метода уступок?
5. Каков алгоритм метода равных и наименьших отклонений?

Задания для аудиторной работы

1. Найдите неотрицательные значения переменных $x\ ,x$, удовлетворяющих системе ограничений

$$\begin{cases} x + \ x \geq \ , \\ x - \ x \leq \ , \\ -x + x \leq \ , \\ x \leq \ , \end{cases}$$

обращающих в максимум функцию $z = x + x$ с отклонением от экстремального значения на 40%, и в минимум функцию $z = x + \ x$. Составьте задачу, соответствующую приведенной математической модели.

2. Найдите неотрицательные значения переменных $x\ ,x$, удовлетворяющих системе ограничений

$$\begin{cases} x + \ x \geq \ , \\ x \leq \ , \\ x \leq \ , \end{cases}$$

обращающих в максимум функцию $z = x + \ x$ и — в минимум функцию $z = x + x$. Составьте задачу, соответствующую приведенной математической модели.

3. Предприятие изготавливает два вида продукции: А и Б,– располагая при этом производственными мощностями четырех видов в следующем количестве: первого вида – не менее 12, а остальных не более 10, 6 и 7. Нормы затрат каждого вида на единицу продукции А составляют 3, 1, 1 и 0 соответственно, а на единицу продукции Б – 4, 1, 0 и 1. Прибыль от сбыта товара А равна 3 у.е., Б – 5 у.е. Чистый доход от реализации одной единицы А равен 3 у.е., а Б – 1 у.е. Затраты на производство единицы продукции А составляют 2 у.е., продукции Б – 1 у.е. Найдите компромиссный план производства продукции обоих видов, считая наиболее предпочтительным критерием прибыль с отклонением от максимального значения 20%, чистый доход с отклонением 40% и менее важным – критерий затрат.

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. Найдите компромиссное решение задачи

$$\begin{cases} x + x \le \ , \\ x + x \ge \ , \\ x \le \ , \\ x \le \ , \\ x , x \ge \ , \end{cases}$$

$z = \ x + \ x \to max,$

$z = x + x \to min,$

считая второй критерий наиболее предпочтительным. Его отклонение от минимального значения 20%.

2. Решите задачу

$$\begin{cases} x + x \le \ , \\ -x + \ x \le \ , \\ x + x \ge \ , \\ x , x \ge \ , \end{cases}$$

$z = \ x + \ x \to max,$

$z = x + \ x \to min$❑

методом равных и наименьших отклонений.

3. Имеются ноутбуки модели А и Б фирмы IBM и ноутбуки В и Г фирмы Toshiba. Производительность моделей А и Б составляет 100 единиц, а моделей В и Г – 80 единиц. Стоимость ноутбуков А, Б, В и Г равна 2500, 1500, 1200 и 1000 у.е. Найдите модель ноутбука максимальной производительности и минимальной стоимости, считая, что оба критерия являются независимыми.

Нелинейное программирование

<u>Теоретические вопросы</u>

1. Сформулируйте определение выпуклого множества. Приведите примеры.
2. Дайте определение выпуклой (вогнутой) функции. Приведите примеры.
3. Сформулируйте задачу нелинейного программирования.
4. В чем состоит задача безусловной оптимизации?
5. Сформулируйте необходимое условие оптимальности в задаче безусловной оптимизации.
6. Сформулируйте достаточное условие оптимальности в задаче безусловной оптимизации. Приведите примеры.

7. Как записать функцию Лагранжа для задачи нелинейного программирования?
8. В чем состоит метод Лагранжа решения задачи нелинейного программирования?
9. Сформулируйте теорему Куна-Таккера.
10. Каков алгоритм графического способа решения задачи нелинейного программирования?

<u>Заданиядля аудиторной работы</u>

1. Найдите решение задачи нелинейного программирования

   $x + x = \ ,$

   $z = x + \ x \ \to max$ ❑

   графически и методом Лагранжа.
2. Автосалон реализует автомобили оптом и в розницу. При розничной продаже x автомобилей издержки автосалона равны $4x+x^2$ у.е. При оптовой реализации y автомобилей расходы составляют y^2 у.е. Найдите оптимальный план продажи автомобилей, минимизирующий суммарные расходы, если общее число автомобилей, имеющихся в автосалоне, равно 200.
3. Предприятие располагает ресурсами двух видов сырья и рабочей силы, необходимыми для производства двух видов продукции. Затраты ресурсов на изготовление одной тонны каждого продукта, прибыль, получаемая предприятием от реализации тонны продукта, а также запасы ресурсов указаны в следующей таблице:

Ресурс	Расход ресурса		Запас ресурса
	на продукт 1	на продукт 2	
Сырье 1, т	3	5	120
Сырье 2, т	6	4	150
Трудозатраты, ч	14	12	400
Прибыль единицы продукта, тыс.руб./т	72	103	

   Стоимость одной тонны вида сырья 1 определяется по формуле $(\ - \quad r \ )$, а сырья 2 — по формуле $(\ - \quad r \ )$, где $r \ , r$ — затраты сырья на производство продукции. Ответьте на следующие вопросы
   1) Сколько продукта 1 и продукта 2 следует производить для того, чтобы обеспечить максимальную прибыль?
   2) Какова максимальная прибыль?
   3) На какую величину возрастет максимальная прибыль, если запасы сырья 2 увеличатся на 10 тонн?
   4) На какую величину возрастет максимальная прибыль, если допустимый объем трудозатрат увеличится с 400 ч до 500 ч?

<u>Заданиядля самостоятельной работы</u>

1. На молочном комбинате помимо других продуктов производится также сырковая масса трех наименований: “Изюминка”, “Ваниль” и “Орешек” жирности соответственно 6%, 5% и 3%. В качестве основных исходных продуктов используются творог жирности 8%, 7%, 2%, объемы суточных поставок которого составляют по 200 кг каждого вида, и сахар, имеющийся в количестве 70 кг в сутки. По технологии для получения 1 кг сырковой массы «Изюминка» требуется сахара 30 г, для «Ваниль» — 40 г и для «Орешек» — 60 г. Цена сырковой массы «Изюминка» равна 36 руб./ кг, «Ваниль» 35 руб./ кг и «Орешек» 33 руб./ кг. Закупочная цена творога 8%-й жирности определяется зависимостью $(\ - \quad x)$ руб./кг, где x — объем закупки (кг). Аналогичные зависимости для творога 7%-й жирности $(\ - \quad x)$ руб./кг и для творога 2%-й жирности $(\ - \quad x)$ руб./кг. Минимальный выпуск сырковой массы: «Изюминка» — 100 кг, «Ваниль» — 50 кг, «Орешек» — 50 кг. Постройте производственную программу, максимизирующую общую суточную прибыль. Ответьте на следующие вопросы

1) Какова максимальная прибыль?
2) Каков оптимальный объем производства сырковой массы «Орешек», «Ваниль» и «Изюминка»?
3) Каковы размеры оптимальных затрат?
4) На сколько рублей изменится прибыль, если ресурс творога жирности 8% уменьшится на 3%?

Модели Марковица

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте задачу об инвестиционном портфеле.
2. Какие модели задач об инвестиционном портфеле Вам известны?
3. Что называется матрицей ковариаций?
4. В чем состоит метод парных сравнений? Приведите примеры.

Заданиядля аудиторной работы

1.По открытым данным сформируйте набор активов и значения их стоимостей за последние 3 месяца. Постройте одну из моделей Марковица оптимального портфеляценных бумаг, используя в качестве критерия оптимизации доходность портфеля.

Заданиядля самостоятельной работы

1.По данным задачи аудиторной работы постройте одну из моделей Марковица оптимального портфеляценных бумаг, используя в качестве критерия оптимизации риск портфеля.

Динамическое программирование

Теоретические вопросы

1. При решении каких задач используется метод динамического программирования?
2. Приведите примеры многошаговых задач.
3. Сформулируйте принцип оптимальности и запишите уравнение Беллмана.
4. Сформулируйте алгоритм нахождения оптимального решения задачи динамического программирования.

Задания для аудиторной работы

1. Решите задачу распределения инвестиций между предприятиями.

Имеется производственная фирма, в состав которой входят 3 предприятия. Руководство фирмы принимает решение о выделении 50 млн руб. для осуществления инновационных мероприятий на всех предприятиях фирмы в течение года. Функции дохода *f*заданы для каждого объема инвестиций *x* в табличной форме.

Объем инвестиций x (млн руб.)	Прирост дохода		
	f_1	f_2	f_3
0	0	0	0
10	3	6	4
20	5	8	5
30	9	9	11

40	11	15	12
50	17	19	18

2. Требуется перевезти груз из города А в город Б. Сеть дорог, связывающих эти города, задана таблицей, в которой строки и столбцы соответствуют городам, а заполненные клетки – наличию дорог и стоимости перевозки груза.

	А	2	3	4	5	6	7	8	9	Б
А		4	11	3						
2					3	4				
3					1	6				
4					4	6	4			
5								9	8	
6									5	
7								1	12	
8										5
9										3
Б										

Найдите маршрут, связывающий города А и Б, для которого суммарные затраты на перевозку груза были бы наименьшими.

Задания для самостоятельной работы

1. На предприятии установлено новое оборудование. В таблице приведены зависимости производительности предприятия и затрат на обслуживание оборудования от возраста этого оборудования.

	Возраст оборудования					
	0	1	2	3	4	5
Производительность (у.е.)	80	75	65	60	60	55
Затраты на обслуживание (у.е.)	20	25	30	35	45	55

Замена текущего оборудования на новое стоит предприятию 40 у.е., старое оборудование при этом списывается. Найдите оптимальный план замены оборудования в течение 5 лет, чтобы общая прибыль предприятия за этот период была максимальной.

Основные понятия теории антагонистических игр

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение игры (игроков).
2. Какие формы представления игр Вам известны?
3. Дайте классификацию игр. Приведите примеры.
4. Сформулируйте определение антагонистической игры. Приведите примеры.
5. Как строится платежная матрица игры?
6. Сформулируйте определение верхней (нижней) цены игры.
7. Какая игра называется матричной игрой с седловой точкой? Приведите пример.
8. Сформулируйте определение оптимальной стратегии.

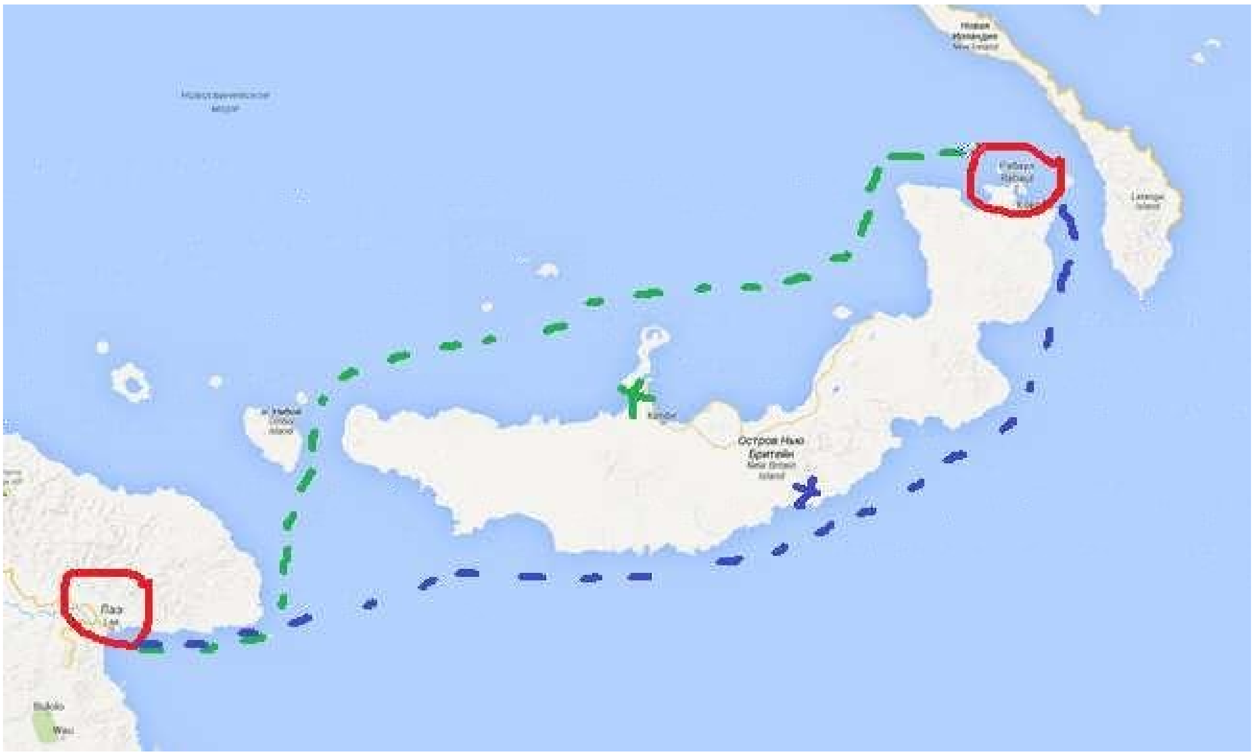
9. Дайте определение решения игры с седловой точкой.
10. Какая стратегия каждого из игроков называется доминирующей?

Задачи для аудиторной работы

1. В игру играют двое. Оба игрока одновременно показывают один, два или три пальца. Если сумма чисел, показанная пальцами, четна, то первый игрок выигрывает соответствующее число очков, а второй – проигрывает. Если же сумма нечетна, то выигрыш распределяется наоборот. Для данной игры:
   - определите чистые стратегии игроков;
   - составьте платежную матрицу игры;
   - найдите верхнюю и нижнюю цены игры;
   - упростите платежную матрицу, если это возможно; • выясните, имеет ли игра решение в чистых стратегиях.

2. Каждый игрок показывает один или два пальца и называет число пальцев, которое, по его мнению, показал его противник (ни один из игроков не знает, какое число пальцев на самом деле показывает его противник). Если один из игроков угадывает правильно, он выигрывает сумму, равную сумме числа пальцев, показанных им и его противником. В противном случае – ничья. Если оба угадали, то в результате также ничья. Для данной игры:
   - определите чистые стратегии игроков;
   - составьте платежную матрицу игры;
   - найдите верхнюю и нижнюю цены игры;
   - упростите платежную матрицу, если это возможно; • выясните, имеет ли игра решение в чистых стратегиях.

3. В феврале-марте 1943 года японский конвой судов собрался в Рабауле (остров Новая Британия), чтобы двигаться затем в Лае (остров Новая Гвинея) (см. карту). Американское командование решило перехватить этот конвой средствами авиации и нанести ему максимальный урон. У японского командующего Имамуры был выбор: послать конвой либо севернее Новой Британии, либо южнее этого острова. Каждый переход занимал три дня. У американского адмирала Кенни было две возможности. Он мог сконцентрировать свои самолеты либо на одном, либо на другом пути. Оба командующих располагали одинаковыми сведениями о состоянии погоды и мобильности войск противника. Перелет с одной части острова Новая Британия на другую занимает один день. При этом из-за плохой видимости на северном пути было возможно осуществлять бомбардировку лишь в течение двух дней. Представьте данную ситуацию в виде матричной игры. Для данной игры:
   - определите чистые стратегии игроков;
   - составьте платежную матрицу игры;
   - найдите верхнюю и нижнюю цены игры;
   - упростите платежную матрицу, если это возможно;
   - выясните, имеет ли игра решение в чистых стратегиях.



4. В конфликтной ситуации участвуют две стороны: A – государственная налоговая инспекция, B – налогоплательщик с определенным годовым доходом, налог с которого составляет T д.е. У стороны A два возможных способа поведения. Один из них состоит в контролировании дохода налогоплательщика B и взимания с него:
   - налога в размере T, если доход заявлен и соответствует действительному;
   - налога в размере T и штрафа в размере W, если заявленный в декларации доход меньше действительного, или в случае сокрытия всего дохода.

Второй способ поведения – не контролировать доход налогоплательщика B вовсе. У стороны B – три стратегии поведения: заявить о действительном доходе; заявить доход, меньший действительного (следовательно, налог C с заявленного дохода будет меньше T); скрыть доход (тогда не надо будет платить налог).
Составьте платежную матрицу – матрицу выигрышей игрока A. Имеет ли игра решение в чистых стратегиях?

5. Два цветочных магазина могут продавать хризантемы по 100, 120 или 140 рублей. Каждый день покупатели приобретают в этих магазинах 100 хризантем. Если цена будет одинаковая, то в обоих магазинах купят равное количество цветов. Если разница в ценах будет 20 рублей, то более дешевые хризантемы купят 70% покупателей, а если 40 рублей – 90% покупателей. Представьте данную ситуацию в виде матричной игры. Для данной игры:
   - определите чистые стратегии игроков;
   - составьте платежную матрицу игры, отражающую разность доходов магазинов;
   - найдите верхнюю и нижнюю цены игры;
   - упростите платежную матрицу, если это возможно;
   - выясните, имеет ли игра решение в чистых стратегиях.

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. Первый игрок прячет в кулаке одну из двух монет: 1 руб. или 5 руб. по своему выбору и незаметно от другого игрока, а второй игрок пытается угадать, какая монета спрятана, и

если угадывает, то получает эту монету, в противном случае платит первому игроку 3 руб. Для данной игры:

- определите чистые стратегии игроков;
- составьте платежную матрицу игры;
- найдите верхнюю и нижнюю цены игры;
- упростите платежную матрицу, если это возможно;
- имеет ли игра решение в чистых стратегиях.

2.В конфликтной ситуации участвуют две стороны: *А* – государственная налоговая инспекция, *В* – налогоплательщик с годовым доходом 180 тыс. руб. У стороны *А* два возможных способа поведения. Один из них состоит в контролировании дохода налогоплательщика *В* и взимания с него:

- налога в размере 13%, если налогоплательщик заявил свой действительный доход 180 тыс.руб.;
- налога в размере 13% от 180 тыс.руб. и штрафа в размере 10% от незаявленной налогоплательщиком суммы, если заявленный в декларации доход меньше действительного, или в случае сокрытия всего дохода.

Второй способ поведения – не контролировать доход налогоплательщика *В* вовсе. Налогоплательщик при декларировании своего дохода использует одну из трех стратегий поведения: заявить о действительном доходе в размере 180 тыс.руб.; заявить доход в 90 тыс.руб.; скрыть доход.

Составьте платежную матрицу – матрицу выигрышей игрока *А*.

Какая из двух указанных стратегий государственной налоговой инспекции гарантирует взимание с налогоплательщика налога, не меньше 23400 руб., при любой из трех отмеченных стратегий налогоплательщика?

Какая из трех отмеченных стратегий налогоплательщика гарантирует уплату налога не больше 23400 руб.?

3.Рассматриваются две конкурирующие финансовые компании *А* и *В*. Компания *В* ведет переговоры с инициаторами трех инвестиционных проектов B_1, B_2, B_3 на предмет инвестирования, причем инвестиционный договор она может заключить только с одним из инициаторов проектов. Задача компании *В* – положительный результат переговоров с каким-либо из инициаторов проектов. Компания *А* ставит своей задачей свести переговоры компании *В* к отрицательному результату с тем, чтобы занять место компании *В* в инвестировании. Компания *А* для достижения своей цели может применить одно из двух средств:

A_1 – предложить инициаторам проектов более выгодные условия по сравнению с компанией *В*;

A_2 – предоставить материалы, компрометирующие компанию *В*. Действие A_1 приводит к отрицательному результату переговоров компании *В* с инициаторами проектов B_1, B_2, B_3 соответственно с вероятностями 0,7; 0,5; 0,3, а действие A_2 – с вероятностями 0,6; 0,9; 0,4.

Смоделируйте данную ситуацию, применяя в качестве модели антагонистическую игру. Для данной игры: •определите чистые стратегии игроков;

- составьте платежную матрицу игры;
- найдите верхнюю и нижнюю цены игры;
- упростите платежную матрицу, если это возможно;
- имеет ли игра решение в чистых стратегиях.

4.*«Утро вечера мудренее»*. Предположим, что у вас дома отключили холодную воду. У вас нет ее необходимого запаса на утро. При этом дорога от дома до магазина и обратно, где можно купить воду, занимает 30 минут. Утром воду могут включить, а могут и не включить. Стоит ли ехать за водой вечером? Представьте ситуацию в виде игры. Для данной игры:

- определите чистые стратегии игроков;
- составьте платежную матрицу игры;
- найдите верхнюю и нижнюю цены игры;
- упростите платежную матрицу, если это возможно;
- выясните, имеет ли игра решение в чистых стратегиях.

Решение матричных игр сведением к задачам линейного программирования

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте аффинное правило для матричной игры. Приведите пример.
2. Как построить модель матричной игры для каждого из игроков в терминах задач линейного программирования?
3. Каким свойством обладают задачи линейного программирования, построенные для каждого игрока?

Задания для аудиторной работы

Решите следующие игры путем сведения к задачам линейного программирования средствами MS Excel (системе компьютерной математики):

1. В игру играют двое. Оба игрока одновременно показывают один, два или три пальца. Если сумма чисел, показанная пальцами, четна, то первый игрок выигрывает соответствующее число очков, а второй – проигрывает.

Если же сумма нечетна, то выигрыш распределяется наоборот.

2. Игра «Камень-ножницы-бумага».
3. Две фирмы A и B проводят на предполагаемых рынках сбыта (в двух соседних городах) рекламную компанию. У фирмы A имеются средства, чтобы оплатить в этих городах четыре способа проведения рекламной компании, а у фирмы B – три способа. Победу каждой фирмы в каждом из городов будем оценивать в условных единицах (очках) следующим образом:
   - если у фирмы A больше способов рекламы, чем у противника, то в качестве выигрыша она получает число очков, равное числу способов рекламы, примененных противником в данном городе, с добавлением одного очка за победу;
   - если у A – меньше способов рекламы, чем у противника, то она проигрывает число очков, равное числу способов рекламы, примененных ею в данном городе, и минус одно очко – за проигрыш;
   - если число способов рекламы в городе у обеих фирм одинаковое, токаждая из них получает ноль очков.

В качестве общих выигрышей каждой из фирм принимаем суммы ее очков по двум городам в различных ситуациях. Представьте модель конфликта в виде матричной игры, составив платежную матрицу – матрицу выигрышей фирмы A.

4. Группа из пяти индейцев осадила лагерь, охраняемый четырьмя белыми. У лагеря два входа E_1 и E_2. Белый разведчик установил, что перед входом E_1 находится как минимум один индеец, а перед входом E_2 как минимум два индейца. Остальное распределение неизвестно. Командир осажденных может распределить своих людей около E_1 и E_2, причем у каждого входа должен быть, по крайней мере, один человек. Предполагается, что численно превосходящая (у каждого входа) группа берет в плен всю группу противника без собственных потерь, в то время как при равенстве сил перед каким-либо входом потерь с обоих сторон нет. В качестве платежа (выигрыша) выступает разность числа пленных.

а) Определите все чистые стратегии обоих противников.

б) Постройте платежную матрицу игры, считая первым игроком обороняющуюся сторону.
в) Найдите оптимальные стратегии сторон.

Задания для самостоятельной работы

Решите следующие игры путем сведения к задачам линейного программирования средствами MS Excel (системе компьютерной математики):

1. Игра из задачи №2 лабораторной работы №18 и игра из задачи №1 самостоятельной работы №18.
2. Два предприятия A и B производят аналогичную продукцию и поставляют ее на рынок, являясь ее единственными поставщиками в регионе. Каждое из предприятий может производить свою продукцию с применением одной из трех различных технологий. В зависимости от качества продукции, произведенной по каждой технологии, предприятия могут устанавливать цену за единицу продукции на уровне 10, 6 и 2 д.е. при различных затратах на производство единицы продукции (см. таблицу 1)

Таблица 1.

Технология	Цена реализации единицы продукции, д.е.	Полная себестоимость единицы продукции, д.е.	
		Предприятие 1	Предприятие 2
I	10	5	8
II	6	3	4
III	2	1,5	1

В результате маркетингового исследования рынка региона была определена функция спроса на эту продукцию: $q = 6 - 0{,}5p$,
где q – количество продукции, которое приобретет население региона (тыс.ед.), а p – средняя цена продукции, определенная по ценам, которые установлены предприятиями региона. Данные о спросе на продукцию в зависимости от цен реализации, установленных предприятиями, приведены в таблице 2.

Таблица 2.

Цена реализации единицы продукции, д.е.		Средняя цена реализации единицы продукции, д.е.	Спрос на продукцию, тыс.ед.	Доля продукции предприятия 1, купленной населением
Предприятие 1	Предприятие 2			
10	10	10	1	0,31
10	6	8	2	0,33
10	2	6	3	0,18
6	10	8	2	0,70
6	6	6	3	0,30
6	2	4	4	0,20
2	10	6	3	0,92
2	6	4	4	0,85
2	2	2	5	0,72

Указанные в таблице значения долей продукции предприятия 1, приобретенной населением, зависят от соотношения цен на продукцию предприятия 1 и предприятия 2. Эти значения были вычислены по результатам маркетингового исследования. Поскольку на рынке региона действует только два предприятия, то долю продукции второго предприятия, приобретенной населением, в зависимости от соотношения цен можно определить из условия, что сумма соответствующих долей предприятий равна единице.

Какое предприятие в описанных условиях окажется в выигрышном положении? Составьте матрицу выигрышей игрока A – предприятия 1. Коэффициенты выигрышей в матрице определять как значение разницы прибыли предприятий 1 и 2 от производства продукции. Если эта разница положительная, то выигрывает предприятие 1, если отрицательная – предприятие 2.

Статистические игры. Принятие решений в условиях неопределенности и риска

Теоретические вопросы

1. Дайте определение природы.
2. Какие игры называются статистическими?
3. В чем особенность ситуаций принятия решений в условиях неопределенности (риска)?
4. Сформулируйте алгоритмы применения основных критериев принятия решений в условиях неопределенности и риска.

Задания для аудиторной работы

1. Сезонный торговец прохладительными напитками продает напитки в сезон (в августе), а заказать их поставку от оптовика и оплатить заказ он должен уже в марте. Оптовик поставляет прохладительные напитки только малыми (1000 л), средними (2000 л) или крупными (3000 л) партиями.

   Торговец закупает напитки в марте по цене 1 ден. ед./л, продает их в августе по цене 1,5 ден. ед./л, а если к концу сезона (к сентябрю) у него остаются нераспроданные напитки, он возвращает их оптовику, но уже по цене 0,7 ден. ед./л. По своему прошлому опыту торговец знает, что объемы продаж прохладительных напитков зависят от состояния погоды в августе. Так, если в августе будет холодно, то объем продаж составит скорей всего 500 л, если прохладно — 900 л, если тепло — 2000 л и если жарко — 2800 л.

   Торговцу необходимо принять решение о том, какую партию прохладительных напитков ему следует заказать у оптовика в марте, чтобы получить наибольшую прибыль от их продажи в августе. Определите наилучшее решение торговца, если он пользуется различными критериями принятия решений в условиях неопределенности. Каким будет наилучшее решение торговца прохладительными напитками, если вероятности наступления холодной, прохладной, теплой и жаркой погоды в августе равны 0,1; 0,2; 0,4 и 0,3 соответственно, а торговец использует: а) критерий максимальной ожидаемой прибыли; б) критерий минимального ожидаемого риска; в) критерий Лапласа.

   2. Менеджер оптового склада хозяйственных товаров должен решить, сколько газонокосилок заказать для наступающего сезона. Каждая газонокосилка, проданная в сезон, дает 100 д.е. прибыли, а каждая непроданная – приносит убыток в размере 150 д.е. Менеджер может разместить заказ только на целое число сотен косилок и продавать их дилерам собирается по сотням. Вероятности различных значений спроса, которые определяются имеющимися у менеджера статистическими данными, представлены в таблице:

Спрос	100	200	300	400	500	600	700
Вероятности	0,03	0,08	0,17	0,27	0,3	0,11	0,04

Постройте платежную матрицу. Применяя различные критерии в условиях риска и неопределенности, определите наилучшую величину заказа.

Маркетинговое агентство предлагает провести специальное исследование для уточнения спроса на данный вид товара в наступающем сезоне. Стоимость исследования 8000 д.е. Стоит ли менеджеру воспользоваться услугами агентства?

Решите задачу с использованием средств MS Excel или системы компьютерной математики.

3. Сельскохозяйственное предприятие планирует засеять поле площадью 5000 га двумя различающимися потреблением влаги во время вегетационного периода сортами ржи. Проанализировав погодные условия, выделены 4 состояния погоды (S1, S2, S3, S4), отличающиеся режимом осадков, и найдены статистические вероятности каждого состояния$q =$, $q =$, $q =$, $q =$. Средняя урожайность (ц/га) каждого сорта на всем участке для каждого состояния погоды приведены в таблице:

	S_1	S_2	S_3	S_4
Сорт 1	23	29	31	37
Сорт 2	36	33	28	24

Возможны варианты посева:

1) сорт 1 посадить на 100% площади;
2) сорт 1 посадить на 75% площади, сорт 2 посадить на 25% площади;
3) сорт 1 посадить на 50% площади, сорт 2 посадить на 50% площади;
4) сорт 1 посадить на 25% площади, сорт 2 посадить на 75% площади; 5)сорт2 посадить на100% площади.

Постройте платежную матрицу, матрицу рисков. Определите наилучшую стратегию с помощью критериев принятия решений в условиях риска.

4. Владелец частной стоматологической клиники «Счастливая улыбка» решает вопрос об открытии детского отделения. Если рождаемость в городке будет продолжать расти, то большое отделение могло бы принести прибыль в 150 тыс.д.е. Если будет открыто небольшое отделение, то оно ежегодно может приносить прибыль в 60 тыс.д.е. при условии, что рождаемость будет увеличиваться. Если рождаемость в городке не будет увеличиваться, то открытие большого детского отделения принесет клинике убыток в 85 тыс.д.е., открытие небольшого отделения – в 45 тыс.д.е. К сожалению, у владельца клиники нет информации о том, как будет изменяться рождаемость в городке. Постройте дерево решений.

1) Определите наилучшее решение, пользуясь методом обратного пересчета, если вероятность роста рождаемости составит 0,3. Чему равно значение максимальной ожидаемой прибыли для наилучшей альтернативы?
2) Определите наилучшее решение, пользуясь критерием Лапласа. Чему равно значение максимальной ожидаемой прибыли для наилучшей альтернативы?

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1. Продавец сувениров должен принять решение, какой объем партии сувениров ему необходимо закупить у оптового поставщика в январе, чтобы продавать их в августе.
   Он знает, что объемы продаж в августе очень сильно зависят от погоды. Оптовый поставщик поставляет сувениры по цене 20 ден. ед. за одну шт. и только тремя партиями: 300 шт., 850 шт. и 1500 шт. Продавец сувениров продает сувениры по цене 60 ден. ед. за одну шт.Продавец сувениров предполагает, что если в августе будет холодно, то объем продаж сувениров составит 300 шт., если прохладно — то 900 шт., если тепло — то 1200 шт. и если жарко — то 1500 шт.
   1) Составьте платежную матрицу продавца сувениров, отражающую сто прибыль и убытки от продажи сувениров.
   2) Составьте матрицу рисков.
2. В городе планируется строительство кинотеатра. Имеются проекты на 250, 400, 500 и 600 мест. Затраты на содержание кинотеатра составляют 20000 руб. в день и дополнительно 2000 руб. за каждые сто мест (свыше 300). В день можно дать 6 сеансов,

стоимость билета составляет в среднем 80 руб. По оценкам экспертов количество посетителей в день может составить 2000, 2500 или 3000 человек.

1) Определите состояния природы, возможные альтернативы ЛПР.
2) Составьте платежную матрицу, матрицу рисков.
3) Определите наилучшее решение, применяя различные критерии. Решите задачу с использованием средств MS Excel.

3. Продавец газет покупает у поставщика газеты сегодня, чтобы продать их завтра. Он закупает газеты по 30 ден. ед. за пачку, а продает по 50 ден. ед. Ему необходимо принять решение о том, сколько пачек газет ему следует закупить у поставщика сегодня, чтобы продать их завтра.

Объем продаж газет зависит от спроса на них, который продавец оценивает как отсутствие спроса, низкий спрос, средний спрос и высокий спрос. При отсутствии спроса на газеты он не продаст ни одной пачки, при низком спросе он продаст 1 пачку газет, при среднем — 2 пачки, при высоком — 3 пачки газет.

1) Составьте платежную матрицу продавца газет, отражающую его прибыль и убытки от продажи газет.
2) Составьте матрицу рисков.
3) Каким будет оптимальное решение продавца газет, т. е. сколько пачек газет (1,2 или 3) ему следует закупить у поставщика, если спрос на газеты на завтра ему неизвестен и он использует для принятия решения: а) критерий Лапласа, б) максиминный критерий Вальда, в) максимаксный критерий, г) кри терий минимаксного риска Сэвиджа?
4) Каким будет оптимальное решение продавца газет при известных вероятностях спроса на газеты на завтра: отсутствие спроса 0,1, низкий спрос 0,3, средний, спрос 0,4 и высокий спрос 0,2, если продавец использует критерий минимального ожидаемого риска?
5) Постройте дерево решений и определите оптимальное решение методом сворачивания дерева.

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Текущая аттестация включает по две контрольные работы в каждом семестре.

Данные об объёмах производства за предыдущие 2 года приведены в файле-приложении.
В качестве функции, которая должна выражать зависимость между затратами производственных фондов и трудовых ресурсов, вам было предложено использовать функцию Кобба—Дугласа.
Постройте соответствующую функцию и вычислите основные показатели производства:

1. средние и предельные производительности каждого ресурса;
2. эластичность выпуска по каждому ресурсу;
3. предельную норму замещения производственных фондов трудовыми ресурсами и трудовых ресурсов производственными фондами.

Постройте график изокванты для выпуска, наблюдаемого последним. Найдите значения всех ранее найденных характеристик в точке последнего наблюдаемого выпуска.
Директор завода сообщил вам, что он хочет повысить уровень производства на k по сравнению с предыдущим месяцем (последний месяц в наблюдении). При этом он поставил перед вами задачу снижения издержек для повышения общей эффективности завода. В планово-финансовом управлении вам сообщили, что стоимость одной единицы ресурса

производственных фондов составляет 1100 тыс. руб., а одной единицы ресурса трудовых фондов — 350 тыс. руб. Решите поставленную перед вами задачу, найдите требуемые для данного уровня производства затраты ресурсов и величину издержек.

1. Нормы оценивания: корректно построена производственная функция – 2 балла, вычислены основные показатели производства – 1 балл, решена задача оптимизации, построены изокванта и изокоста – 2 балла, с возможностью градации в 0,25 балла.
2. Шкала оценивания работы:

№ п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

Данные к задаче прилагаются отдельным файлом.

Модель без дефицита. При заводе функционирует собственный магазин для реализации холодильников. Известно, что месячный спрос на них примерно в x раза ниже темпов производства. Также известно, что ежемесячные издержки на хранение одного холодильника на складе составляют x от его цены.

От вас требуется определить наиболее экономичный объём партии производства холодильников для собственного магазина и составить план запуска производственных циклов на ближайшие x лет (количество циклов и временной интервал между циклами), считая дефицит товара на складе недопустимым.

Модель с дефицитом. Тариф аренды склада состоит из фиксированного платежа и платы в размере x от цены размещенного на складе холодильника. Имеется прогноз по ежемесячным потерям прибыли от дефицита за единицу товара в месяц.

Вам нужно найти объём отправляемой партии холодильников и частоту отправки таких партий на ближайшие x лет так, чтобы издержки функционирования нового магазина были минимальны.

Стохастическая модель. Спрос является случайным с нормальным законом распределения с известными ожиданием и дисперсией.

Требуется определить объём партии холодильников для отправки в другой регион, чтобы издержки от её реализации были наименьшими. Данные по издержкам хранения и потерь от отсутствия товара также известны.

1. Нормы оценивания: корректно построена модель с производством – 2 балла, корректно построена модель с дефицитом – 2 балла, корректно построена стохастическая модель – 1 балл, с возможностью градации в 0,25 балла.
2. Шкала оценивания работы:

№ п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

Торговое предприятие планирует организовать продажу четырех видов товара (A, B, C и D), используя при этом только два вида ресурсов: рабочее время продавцов в количестве 840 ч и площадь торгового зала 180 м^2. При этом известны плановые нормативы затрат этих ресурсов на единицу каждого товара и прибыль от их продажи, которые приведены в таблице.

Показатели	Товар				Общее количество ресурсов
	A	*B*	*C*	*D*	
Расход рабочего времени на единицу товара (ч)	0,6	0,8	0,6	0,4	840
Использование площади торгового зала на единицу товара (м^2)	0,1	0,2	0,4	0,1	180
Прибыль от продажи единицы товара	5	8	7	9	

Требуется определить оптимальную структуру товарооборота, обеспечивающую торговому предприятию максимум прибыли. Проанализируйте модель на чувствительность по ресурсам и ценам. Постройте и решите двойственную задачу.

1. Нормы оценивания: корректно построена математическая модель задачи, найдено её решение – 2 балла, корректно проведён анализ на чувствительность – 2 балла, правильно построена и решена двойственная задача – 1 балл, с возможностью градации в 0,25 балла.
2. Шкала оценивания работы:

№ п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

Предприятие производит два вида паркета из дуба, которые отличаются друг от друга толщиной и формой деталей. Ресурсами для производства служат пропитка и дубовая доска, их имеющиеся запасы равны 150 кг и 20 м^3 соответственно. Для производства 1 м^2 паркета вида 1 требуется 0,01 м^3 досок и 0,05 кг пропитки. Для производства 1 м2 паркета вида 2 требуется 0,02 м^3 досок и 0,15 кг пропитки.
Затраты на 1 м^3 дубовой доски равны $(\quad - r)$ руб., где r – объём дубовых досок, использованных при производстве. Затраты на 1 кг пропитки равны $(\quad - \quad r)$ руб., где r – количество пропитки, использованной при производстве.
Цены на паркет каждого вида взаимосвязаны и равны: на паркет вида 1 – $\quad - \quad x - \quad x$ руб/м^2; на паркет вида 2 – $\quad - \quad x - \quad x$, где x, x – объемы производства паркета соответственно вида 1 и вида 2.
Определите оптимальную суточную схему производства предприятия, чтобы его прибыль была наибольшей.

1. Нормы оценивания: корректно построена математическая модель задачи– 3 балла, найдено верное решение задачи – 2 балла, с возможной градацией в 0,25 балла.
2. Шкала оценивания работы:

№ п/п	Оценка	Количество баллов

1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация включает экзамен по итогу 5 семестра и зачет по итогу 6 семестра.

1. Понятия модели. Классификация моделей. Основные этапы математического моделирования.
2. Классификация экономико-математических моделей социально-экономических систем.Основные математические методы и модели в различных направлениях экономической деятельности.
3. Формулировка задач балансового анализа. Модель Леонтьева многоотраслевой экономики.
4. Линейная модель международной торговли.
5. Функции в экономике и социологии. Функции спроса и предложения. Функции Торнквиста.
6. Предельные величины в экономике.
7. Понятие об эластичности функции. Эластичность спроса и предложения.
8. Кривые Лоренца. Коэффициент Джини.
9. Производственные функции. Виды производственных функций. Предельные показатели экономики.
10. Задача оптимизации производственных издержек.
11. Функция полезности. Виды функций полезности. Кривые безразличия.
12. Задача потребительского выбора.
13. Модель естественного роста. Модель Мальтуса. Модель Ферхюльста.
14. Модель Эванса установления равновесной цены. Паутинообразная модель рынка.
15. Модель экономического цикла Самуэльсона-Хикса.
16. Основные определения и понятия, связанные с моделями управления запасами.
17. Статическая детерминированная модель без дефицита.
18. Статическая детерминированная модель управления запасами без дефицита с количественными скидками.
19. Статическая детерминированная модель с дефицитом.
20. Понятие стохастической модели управления запасами.
21. Методы определения кратчайших расстояний между пунктами транспортной сети.
22. Построение графа наименьшей длины.
23. Задачи обслуживания: задача коммивояжера.
24. Задачи обслуживания: задача инспекции дорог.
25. Задача о нахождении наибольшего потока в сети.
26. Задача о размещении регулярного пункта обслуживания.
27. Задача о размещении экстренного пункта обслуживания.

Экзамен состоит из двух частей: тест из 15 вопросов и практическая задача.

1. Для нахождения какого экономического показателя служит паутинообразная модель рынка?
2. Какая модель управления запасами называется стохастической?
   a. Функция пополнения запасов является возрастающей линейной функцией.
   b. Функции пополнения запасов и расхода — известные величины.
   c. Хотя бы одна из двух величин — пополнения запасов и расхода — является случайной.
   d. Функция пополнения запасов зависит от времени.
3. В любом неориентированном графе число вершин в нечётной степени

a. произвольно.
b. всегда нечётно.
c. всегда чётно.

Известно, что равновесная цена на некоторый товар равна 200 руб., равновесное количество – 1000 ед. в день. В точке равновесия эластичность спроса по цене равна –0,6 и эластичность предложения по цене равна 0,7. Определите функции спроса и предложения, считая их линейными.

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть	Количество баллов
1	Тест	Сумма баллов / 3
2	Задача	5 баллов (*)

(*) Возможна градация в 0,25 балла.
Итоговая оценка равна среднему между оценкой за тест и решение задачи.

2. Шкала оценивания:

№ п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

1. Основные формы задач линейного программирования. Примеры.
2. Графический метод решения задач линейного программирования.
3. Анализ модели на чувствительность. Пример.
4. Алгоритм симплекс-метода решения задач линейного программирования.
5. Понятие двойственных задач. Алгоритм построения двойственных задач.
6. Задача целочисленного программирования. Алгоритм метода ветвей и границ.
7. Дробно-линейные модели. Алгоритм сведения дробно-линейной модели к задаче линейного программирования. Некоторые дробно-линейные модели в экономике.
8. Транспортная задача. Основные понятия. Алгоритм отыскания опорного плана методом минимальной стоимости.
9. Транспортная задача. Алгоритм метода потенциалов.
10. Понятие многокритериальной задачи. Метод последовательных уступок.
11. Применение методов линейного программирования для решения задач маршрутизации перевозки грузов.
12. Общая постановка задач нелинейного программирования. Метод множителей Лагранжа.
13. Задачи выпуклого программирования. Теорема Куна–Таккера.
14. Модель Марковица инвестиционного портфеля.
15. Общая постановка задач динамического программирования. Моделирование многошаговых процессов. Принцип оптимальности Р. Беллмана.
16. Решениезадачи о нахождении кратчайших путей методом динамического программирования.
17. Модель динамического программирования, связанная с распределением средств между предприятиями.
18. Модель динамического программирования о замене оборудования (автотранспорта).

19. Понятие об игровых моделях. Платежная матрица. Нижняя и верхняя цена игры. Решение игр в смешанных стратегиях.
20. Игры с природой. Матрица рисков. Критерии принятия решений в условиях неопределенности.
21. Игры с природой. Матрица рисков. Критерии принятия решений в условиях риска.
22. Деревья решений. Метод обратного пересчета.
23. Пропускная способность транспортной сети. Задача о наибольшем потоке. Применение линейного программирования для решения задачи о наибольшем потоке.
24. Транспортная задача в сетевой постановке. Применение задачи о максимальном потоке к решению транспортной задачи по критерию времени.
25. Понятие критического пути. Методы отыскания критического пути в сетевом графике. Линейная диаграмма проекта.
26. Временные параметры событий и работ. Метод CPM. Пример.
27. Сетевое планирование в условиях неопределенности. Метод PERT.
28. Анализ и оптимизация сетевого графика. Коэффициент напряженности работы.
29. Оптимизация сетевого графика методом «время-стоимость».

Экзамен состоит из двух частей: тест из 15 вопросов и практическая задача

1. Выберите подразделы математического программирования
   a. Стохастическое программирование
   b. Функциональное программирование
   c. Динамическое программирование
   d. Циклическое программирование
   e. Целочисленное программирование
   f. Нелинейное программирование
   g. Объектно-ориентированное программирование
   h. Линейное программирование
2. Задача линейного программирования может иметь ровно два оптимальных плана.
   a. Верно.
   b. Неверно.

Молочный комбинат может выпускать два сорта творожной массы,используя три вида сырья – творог, наполнители (масло, сливки, сахар,ванилин) и специальные добавки (сухофрукты). Затраты творога на 1 кгмассы первого вида составляют 0,15 кг, а второго вида – 0,75 кг. Затратынаполнителей на 1 кг массы первого вида составляют 0,5 кг, а второго вида –0,25 кг. Затраты добавок на 1 кг массы первого вида составляют 0,35 кг, а припроизводстве второго вида творожной массы не используются. Запасытворога составляют 525 кг, наполнителей – 400 кг, добавок – 210 кг. Ценаодного килограмма первого вида творожной массы составляет 50 д.е.,второго вида – 75 д.е. Найдите план производства, при котором доход от продажи творожной массы наибольший. Определите величину дохода.

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть	Количество баллов
1	Тест	Сумма баллов / 3
2	Задача	5 баллов

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

Итоговая оценка равна среднему между оценкой за тест и решение задачи.

2. Шкала оценивания работы:

№	Оценка	Количество баллов

п/п		
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

1. Королев, А. В. Экономико-математические методы и моделирование : учебник и практикум для вузов / А. В. Королев. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 280 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-00883-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/470088.
2. Гармаш, А. Н. Экономико-математические методы и прикладные модели : учебник для бакалавриата и магистратуры / А. Н. Гармаш, И. В. Орлова, В. В. Федосеев ; под редакцией В. В. Федосеева. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 328 с.

2. Система дистанционного обучения СмолГУ https://cdo.smolgu.ru
3. Национальная платформа открытого образования https://openedu.ru

Для проведения занятий лекционного типа имеется аудитория с проектором и ноутбуком (нестационарными) – ауд. 409, для проведения занятий семинарского типа – ауд. 226, оборудованная ПК и выходом в Интернет, проектором и интерактивной доской; для самостоятельной работы –ауд. 235, оснащённая ПК с выходом в Интернет.

PTCMathcad 15.0 (Лицензия 449732)
Система дистанционного обучения СмолГУ. URL: http://www.cdo.smolgu.ru. (СДО Русский Moodle 3KLNorm с техническим обслуживанием, Акт на передачу прав №УТДЮ0001785 от 06.12.2016)
Microsoft Open License, лицензия 49463448 всоставе:
1. Microsoft Windows Professional 7 Russian.
2. Microsoft Office 2010 Russian.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 03B6A3C600B7ADA9B742A1E041DE7D81B0
Владелец: Артеменков Михаил Николаевич
Действителен: с 04.10.2021 до 07.10.2022