Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»
Проректор по учебно-методической работе
____________Ю.А. Устименко
«08» сентября 2020 г.

Рабочая программа дисциплины
Б1.В.27 ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Направление подготовки: **09.03.03 Прикладная информатика**
Направленность (профиль): **Прикладная информатика в логистике**
Форма обучения: очная
Курс – 2
Семестр – 4
Всего зачетных единиц – 3, часов – 108
Форма отчетности: экзамен – 4 семестр

Программу разработала:
Старший преподаватель Богданова Н.Н.

Одобрена на заседании кафедры
«01» сентября 2020 г., протокол № 1

Заведующий кафедрой _____________

Смоленск
2020

1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Дифференциальные и разностные уравнения» входит в часть блока 1«Дисциплины (модули)» учебного планабакалавриата по направлению подготовки 09.03.03 «Прикладная информатика» (профиль «Прикладная информатика в логистике»), формируемую участниками образовательных отношений; изучается в 4 семестре.

Дисциплина «Дифференциальные и разностные уравнения» относится к дисциплинам вариативной части учебного плана данного направления подготовки и является основой для изучения таких дисциплин таких, как теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, имитационное моделирование, экономико-математические методы и модели в логистике и других. Для успешного освоения данной дисциплины необходимы компетенции студентов, сформированные при изучении математического анализа и алгебры.

Изучение курса основано на традиционных методах высшей школы, тесной взаимосвязи со смежными курсами, а также на использовании современной учебной, методической литературы, информационных и образовательных технологий.

Необходимыми условиями для освоения дисциплины являются: знания в области основных элементарных функций, их свойств и графиков; умения выполнять алгебраические и тригонометрические преобразования, решать алгебраические и тригонометрические уравнения и неравенства.

В настоящее время математические методы исследования проникают во все области человеческой деятельности. Это повышает интерес к математике со стороны смежных наук, использующих различный объем математических знаний. Кроме того, развитие информационных технологий и систем компьютерной математики, которые применяются для решения многих математических задач, требует алгоритмической четкости при изучении математических дисциплин. Поэтому курс дифференциальных и разностных уравнений занимает важное место в ОП направления подготовки «Прикладная информатика».

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	**Знать:** основные принципы и требования системного подхода к решению поставленных задач; **Уметь:** осуществлять поиск, отбор информации, интерпретировать ее для решения поставленных задач, формировать собственные суждения и убедительно обосновать их; **Владеть:** навыками сбора, критического анализа и синтеза информации в соответствии с поставленной проблемой.
ПК-2.Способен проводить описание прикладных процессов и информационного обеспечения и проектировать информационные системы в логистике	**Знать:** основные принципы и методы описания и анализа прикладной области, информационных потребностей, формирования требований к информационным системам, методы формализации и структурирования данных, основные методы и технологии проектирования информационных систем, возможности типовых ИС, архитектуру, устройство и функционирование вычислительных сетей, коммуникационное оборудование и сетевые протоколы, теорию баз данных и основы программирования. **Уметь:** проводить анализ предметной области, выявлять информационные потребности и разрабатывать требования к информационным системам, формализовывать и структурировать полученную информацию, осуществлять сравнительный анализ и выбор информационно-коммуникационной технологии для решения поставленных задач, проектировать информационные системы. **Владеть:** навыками сбора и анализа информации,

	необходимой для решения поставленных производственных задач, навыками по формализации и структурированию данных, навыками работы с прикладным программным обеспечением для проектирования современных информационных систем.

3. Содержание дисциплины

1. **Обыкновенные дифференциальные уравнения.** Понятие дифференциального уравнения. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши. Теорема Коши. Понятие общего, частного и особого решения дифференциального уравнения первого порядка. Геометрическая интерпретация дифференциального уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения первого порядка (уравнения с разделяющимися переменными, линейные, Бернулли, однородные, в полных дифференциалах). Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Теорема Коши. Уравнения, допускающие понижения порядка. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Метод вариации произвольных постоянных и метод неопределенных коэффициентов. Системы дифференциальных уравнений.
2. **Дифференциальные уравнения с частными производными.** Понятие дифференциального уравнения с частными производными и его общего решения. Квазилинейные дифференциальные уравнения второго порядка и их канонические формы. Основные уравнения математической физики. Метод Фурье.
3. **Элементы теории функциональных уравнений.** Функциональные уравнения, не содержащие свободных переменных. Функциональные уравнения, содержащие свободные переменные. Разностные уравнения. Линейные разностные уравнения первого и второго порядка с постоянными коэффициентами. Системы разностных уравнений.

4. Тематический план

№ п/п	Темы	Всего часов	Формы занятий			
			Лек-ции	Практи-ческие занятия	Лабо-ратор-ныера бо-ты	Самос-тоятель-ная работа
1.	Обыкновенные дифференциальные уравнения.Основные понятия.Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши.	7	2	2	-	3
2.	Дифференциальные уравнения первого порядка (уравнения с разделяющимися переменными, линейные, Бернулли)	10	2	4	-	4
3.	Дифференциальные уравнения первого порядка (однородные, в полных дифференциалах).	10	2	4	-	4
4.	Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Уравнения, допускающие понижения порядка	7	2	2	-	3
5.	Линейные дифференциальные	12	2	6	-	4

	уравнения второго порядка. Метод вариации произвольных постоянных и метод неопределенных коэффициентов					
6.	Контрольная работа	3	-	2	-	1
7.	Дифференциальные уравнения с частными производными. Основные уравнения математической физики	11	2	6	-	3
8.	Функциональные уравнения. Основные понятия	4	2	-	-	2
9.	Линейные разностные уравнения первого и второго порядка с постоянными коэффициентами	14	2	6	-	6
10.	Контрольная работа	3	-	2	-	1
	Экзамен	**27**	**-**	**-**	**-**	**27**
	Всего за семестр	**108**	**16**	**34**	**-**	**31+27**

5. Виды образовательной деятельности

Занятия лекционного типа

Лекция 1.«Обыкновенные дифференциальные уравнения. Основные понятия. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши»: понятие дифференциального уравнения; дифференциальное уравнение первого порядка и его решение;задача Коши и теорема Коши для дифференциального уравнения первого порядка;понятие общего, частного и особого решения дифференциального уравнения первого порядка;геометрическое истолкование дифференциального уравнения первого порядка.

Лекция 2. «Дифференциальные уравнения первого порядка (уравнения с разделяющимися переменными, линейные, Бернулли)»: дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными; линейное дифференциальное уравнение первого порядка;уравнение Бернулли;примеры.

Лекция3. «Дифференциальные уравнения первого порядка (однородные, в полных дифференциалах)»: однородное уравнение первого порядка; уравнение в полных дифференциалах; понятие интегрирующего множителя; примеры.

Лекция4. «Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Уравнения, допускающие понижения порядка»:определение дифференциального уравнения высшего порядка; задача и теорема Коши для дифференциального уравнения высшего порядка; уравнения, допускающие понижение порядка.

Лекция 5. «Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Метод вариации произвольных постоянных и метод неопределенных коэффициентов»:линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка; понятие фундаментальной системы частных решений; построение общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка; линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами; линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка; структура общего решения; метод Лагранжа; линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами;метод неопределенных коэффициентов.

Лекция 6. «Дифференциальные уравнения с частными производными. Основные уравнения математической физики»: уравнения в частных производных; основные понятия; основные уравнения математической физики; классификация квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка; задача о струне;метод Фурье решения уравнений математической физики.

Лекция7. «Функциональные уравнения. Основные понятия»: функциональные уравнения, не содержащие свободных переменных; функциональные уравнения, содержащие свободные переменные; примеры.

Лекция8. «Линейные разностные уравнения первого и второго порядка с постоянными коэффициентами»: разностные уравнения; основные понятия теории разностных уравнений; линейные разностные уравнения первого и второго порядка с постоянными коэффициентами.

Занятия семинарского типа

Практическое занятие 1. Понятие дифференциального уравнения. Задача Коши для дифференциальных уравнений первого порядка

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение дифференциального уравнения. Приведите примеры.
2. Какое дифференциальное уравнение называется обыкновенным?
3. Как определяется порядок дифференциального уравнения?
4. Сформулируйте определение решения дифференциального уравнения n-го порядка. Приведите примеры.
5. Что называется интегральной кривой дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$?
6. В чем состоит задача Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$? Каков ее геометрический смысл?
7. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $y' = f(x, y)$.
8. Сформулируйте определение общего решения (интеграла) дифференциального уравнения первого порядка. Приведите примеры.
9. Что называется частным решением (интегралом) дифференциального уравнения первого порядка? Приведите примеры.
10. Что такое особое решение дифференциального уравнения первого порядка? Приведите примеры.

Задания для аудиторной работы

1) Какие из следующих уравнений являются *дифференциальными:*

а) $x^2 - 5y = 0$; б) $3y'' + y = 0$;

в) $\dfrac{\partial\phi(x,y)}{\partial x} - 7\dfrac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x\partial y} = 0$; г) $\Phi(x, y, z) = 0$?

2) Проверьте, являются ли следующие функции решениями для указанного дифференциального уравнения (C – произвольная постоянная):

а) $y = \sqrt{x^2 + C}$, $yy' = x$; б) $y = x\displaystyle\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$, $xy' = y + x\sin x$;

в) $y = x + Ce^y$, $(x - y + 1)y' = 1$; г) $\begin{cases} x = t\ln t, \\ y = t^2(2\ln t + 1), \end{cases}$ $y'\ln\dfrac{y'}{4} = 4x$.

3) Пусть $y=\varphi(x)$ – интегральная кривая дифференциального уравнения $y'=y\cos(x-1)+\ln x$, проходящая через точку $P(1,3)$. Найдите значения $\varphi'(1), \varphi''(1)$.

4) Для данных дифференциальных уравнений выделите области, в которых выполняются условия теоремы Коши о существовании и единственности решения:

а) $y'=x^2+y^2-9$; б) $y'=y+3\sqrt[3]{y}$; в) $y'=\dfrac{y}{\cos x}$.

5) Проверьте, является ли семейство функций $y=x\left(1-\dfrac{1}{\ln x+C}\right)$, где C – произвольная постоянная, *общим решением* дифференциального уравнения $y'=\dfrac{y^2}{x^2}-\dfrac{y}{x}+1$ в полуплоскости $G_+=\{(x,y)\in R^2 \mid x>0, \quad -\infty<y<+\infty\}$. Будет ли функция $y=x$ *особым решением* данного дифференциального уравнения?

6) Зная общие решения (общие интегралы) дифференциальных уравнений, найдите их частные решения (частные интегралы), удовлетворяющие заданным начальным условиям:

а) $y=Cx^2, \qquad y\big|_{x=2}=3$;

б) $\ln^2(x+y)+y\ln x=C,$

$y\big|_{x=1}=e-1;$ здесь e - основание натурального логарифма.

Задания для самостоятельной работы

1) Какие из следующих уравнений являются *дифференциальными:*

а) $y=xy'-(y')^2$; б) $3y^2+y=0$;

в) $\dfrac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial y^2}=0$; г) $x^2+y^2=1$?

2) Проверьте, являются ли для заданного дифференциального уравнения следующие функции его решениями (C – произвольная постоянная):

а) $y^2-x^2-2xyy'=0, \qquad y=\sqrt{2Cx-x^2}$;

б) $y'-y=e^{x+x^2}, \quad y=e^x\int\limits_0^x e^{t^2}dt+Ce^x$; в) $xy'=y\cdot tg(\ln y), \quad y=e^{\arcsin Cx}$.

3) Верно ли, что существует единственное решение дифференциального уравнения $y'=x+y$, удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=1}=5$? Ответ обосновать.

4) Составьте интегральное уравнение, эквивалентное следующей задаче Коши: $y'=y^2+xy+x^2, \quad y\big|_{x=0}=1.$

5) Для данных дифференциальных уравнений выделите области, в которых выполняются условия теоремы Коши о существовании и единственности решения:

а) $y'=\sqrt{x-4y^2}$; б) $y'=y\cdot tgx$.

Практическое занятие 2. Уравнения с разделяющимися переменными. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения первого порядка

Теоретические вопросы

1. Уравнение какого вида называется уравнением с разделенными переменными? Приведите примеры.
2. Как задается общий интеграл уравнения с разделенными переменными?
3. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением с разделяющимися переменными? Приведите примеры.
4. Каков общий интеграл дифференциального уравнения с разделяющимися переменными?
5. В чем состоит геометрическая интерпретация дифференциального уравнения $y' = f(x,y)$? Приведите примеры.

Задания для аудиторной работы

1) Найдите общий интеграл уравнения
$$xdx + (1+y)dy = 0.$$
2) Найдите общее и особые решения дифференциального уравнения
$$(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0.$$
3)Найдите частное решение уравнения $y' = 2\sqrt{y}\ln x$, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=e} = 1$.

4) Решите уравнение $y' = \sin(x-y)$, используя замену переменной.

5) Решите дифференциальные уравнения:

а) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$; б) $(y + \sqrt{x^2 + y^2})dx - xdy = 0$.

6) Выделите интегральные кривые, проходящие через точку М(1; 1), для следующих уравнений: а) $y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$; б) $xy' = x\sin\dfrac{y}{x} + y$.

7) Решите дифференциальное уравнение $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$.

8) Решите дифференциальное уравнение
$$(2x + y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0.$$

Задания для самостоятельной работы

1) Найдите общее и особые решения дифференциальных уравнений:

а) $ye^{2x}dx - (1 + e^{2x})dy = 0$; б) $yy' = \dfrac{1-2x}{y}$.

2) Найдите частное решение дифференциального уравнения $y'tgx - y = 1$, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1$.

3) Решите дифференциальные уравнения:

а) $xy'\cos\dfrac{y}{x} = y\cos\dfrac{y}{x} - x$; б) $y' = \dfrac{y}{x}\ln\dfrac{y}{x}$.

4) Найдите интегральную кривую уравнения $xydy - y^2dx = (x+y)^2 e^{-\frac{y}{x}}dx$, проходящую через точку М(1; 1).

5) Найдите интегральную кривую уравнения $(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy=0$, проходящую через точку P(0; 2).

6) Найдите кривую, проходящую через точку M(-1; 1), если угловой коэффициент касательной к ней в любой точке равен квадрату ординаты точки касания.

7) Решите дифференциальное уравнение

$$(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0.$$

Практическое занятие 3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнение Бернулли

Теоретические вопросы

1. Как задается общее решение уравнения $y'=f(x)$?
2. Сформулируйте определение линейного дифференциального уравнения первого порядка. Приведите примеры.
3. Сформулируйте теорему Коши для уравнения $y'+p(x)y=q(x)$.
4. Какие методы решения линейного дифференциального уравнения первого порядка Вам известны?
5. Какова структура общего решения уравнения $y'+p(x)y=q(x)$?
6. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением Бернулли? Приведите примеры.
7. Какие способы решения уравнения Бернулли Вам известны?
8. Имеет ли уравнение Бернулли особые решения? Приведите примеры.
9. Каков вид общего интеграла уравнения Бернулли?

Задания для аудиторной работы

1) Найдите общие решения дифференциальных уравнений:

а) $xy'+2y=x^2$; б) $y'+y=\cos x$.

2) Найдите частные решения следующих дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

а) $y'-ytgx=\frac{1}{\cos x}$, $y|_{x=0}=1$; б) $y'+x^2y=x^2$, $y|_{x=2}=1$.

3) Решите уравнение, линейное относительно переменной x:

$$y'=\frac{1}{x\cos y+\sin 2y}.$$

4) За сколько минут тело, нагретое до 100°, охладится до 25° в комнате с температурой 20°, если до 60° оно охлаждается за 10 минут? (По закону Ньютона скорость охлаждения пропорциональна разности температур).

5) Решите дифференциальное уравнение $y'+2xy=2x^3y^3$.

6) Найдите общее и особые решения дифференциального уравнения $xy'-4y=x^2\sqrt{y}$

Задания для самостоятельной работы

1) Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'+2xy=2xe^{-x^2}$.

2) Найдите частные решения следующих дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

а) $xy' - \dfrac{y}{x+1} = x, \quad y\big|_{x=1} = 1;$ б) $y' - 2xy = 0, \quad y\big|_{x=0} = 5$.

3) Решите уравнение, линейное относительно переменной x:

$$(x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0.$$

4) Закон распада радия состоит в том, что скорость распада пропорциональна наличному количеству радия. Известно, что половина его первоначального запаса распадается по истечении 1600 лет. Определите количество нераспавшегося радия по истечении 100 лет, если первоначальное его количество равно 1 *кг*.

5) Найдите общее и особые решения дифференциального уравнения $xy' + y = y^2 \ln x$.

Практическое занятие 4. Уравнения в полных дифференциалах

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение решения уравнения

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0. \qquad (1)$$

Приведите примеры.

2. В каком случае уравнение вида (1) называется уравнением в полных дифференциалах?
3. Каково необходимое и достаточное условие того, чтобы уравнение вида (1) было уравнением в полных дифференциалах? Приведите примеры.
4. Какие методы решения уравнения в полных дифференциалах Вам известны?
5. В каком случае функция $\mu(x,y)$ называется интегрирующим множителем уравнения (1)? Приведите примеры.
6. Каковы достаточные условия существования интегрирующего множителя для уравнения (1)?

Задания для аудиторной работы

1) Найдите особые точки следующих дифференциальных уравнений:

а) $y' = \dfrac{x+3y-5}{x-2y}$; б) $y' = \dfrac{x^3 + y^3 - 28}{x+y-4}$.

2) Методом изоклин приближенно постройте интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = y - x^2$.

3) Сколько решений дифференциального уравнения $(x-1)\dfrac{dy}{dx} + y = 0$ определяет соотношение $y(x-1) = C$ при каждом фиксированном значении $C \in \boldsymbol{R}$?

4) Решите дифференциальное уравнение $\left(\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx = \dfrac{2y}{x^3}dy$.

5) Выделите интегральную кривую уравнения $\dfrac{x}{x^2+y^2}dy = \left(\dfrac{y}{x^2+y^2} - 1\right)dx$, проходящую через точку M(1; 1).

6) Найдите кривую, для которой площадь, ограниченная этой кривой, осью абсцисс и двумя прямыми, параллельными оси *OY*, пропорциональна отношению абсциссы к ординате правой концевой точки дуги кривой.

Задания для самостоятельной работы

1) Решите дифференциальные уравнения:

а) $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0$; б) $(\sin xy + xy\cos xy)dx + x^2\cos xy dy = 0$.

2) Выделите интегральную кривую уравнения

$(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (6xy + x^2 + 3)dy = 0$,проходящую через точку М(0; 1).

3) Найдите особые точки дифференциального уравнения

$$y' = \frac{x^2 + y^2 - 13}{xy - 6}.$$

4) Методом изоклин приближенно постройте интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = \dfrac{y}{2x}$.

5) Найдите три последовательных приближения решения следующей задачи Коши: $\dfrac{dy}{dx} = x + y$, $y(0) = 1$.

Практическое занятие 5. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение однородной функции k -го измерения в области $D \subset R^2$. Приведите примеры.
2. Каково определение однородного дифференциального уравнения первого порядка? Приведите примеры.
3. В чем состоит метод решения однородного дифференциального уравнения первого порядка?
4. Может ли однородное уравнение иметь особые решения?

Задания для аудиторной работы

Решите следующие дифференциальные уравнения:

1) $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$

2) $xy' - y = xtg\dfrac{y}{x}$

3) $(x + y)y' + y = 0$

4) $y^2 + x^2y' = xyy'$

5) $y' = \dfrac{5x^2 - xy + y^2}{x^2}$

6) $4y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 10\dfrac{y}{x} + 5$

7) $(y^2 - 2xy)dx + x^2dy = 0$

8) $xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y$

Задания для самостоятельной работы

Решите следующие дифференциальные уравнения:

1) $(2\sqrt{xy} - y)dx + xdy = 0$

2) $(2x + y)\,dx - xdy = 0.$

3) $xy' = y \ln \frac{y}{x}.$

4) $(xy + y^2)\,y' = y^2.$

5) $y' = \frac{y}{x} - \frac{x}{y}.$

6) $(x^3 + xy^2)\,y' = y^3.$

7) $y' = \frac{2x+1}{3y+x+2}.$

8) $y' = \frac{x-y+3}{x-y}.$

Практическое занятие 6. Дифференциальные уравнения высших порядков

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение обыкновенного дифференциального уравнения высшего порядка. Приведите примеры.
2. В чем состоит задача Коши для дифференциального уравнения
$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)? \tag{2}$$
3. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения (2).
4. В чем состоит геометрический смысл задачи Коши для уравнения $y'' = f\left(x, y, y'\right)$?
5. Сформулируйте определение общего решения (интеграла) уравнения (2). Приведите примеры.
6. Каково определение частного решения (интеграла) уравнения (2)? Приведите примеры.
7. Какой вид имеет общее решение дифференциального уравнения $y^{(n)} = f(x)$? Приведите примеры.
8. Какой подстановкой достигается понижение порядка уравнения $F\left(x, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$? Приведите примеры.
9. С помощью какой подстановки достигается понижение порядка уравнения $F\left(y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$? Приведите примеры.

Задания для аудиторной работы

1) Найти все решения данных дифференциальных уравнений.

а) $(y')^2 - y^2 = 0$

б) $y(y')^3 + x = 1$

в) $x(y')^2 - 2yy' + x = 0$

2) Решить дифференциальные уравнения методом введения параметра.

а) $x = (y')^3 + y'$

б) $y=(y')^2+2(y')^3$
в) $(y')^2-(y')^3=y^2$
г) $2xy'-y=y'\ln yy'$

Задания для самостоятельной работы

1) Найти все решения данных дифференциальных уравнений.
а) $8(y')^3=27y$
б) $(y')^2-4y^3=0$

2) Решить дифференциальные уравнения методом введения параметра.
а) $x=y'\sqrt{(y')^2+1}$
б) $y=\ln(1+(y')^2)$

Практическое занятие 7. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение линейного однородного дифференциального уравнения (ЛОДУ) второго порядка. Приведите примеры.
2. Что называется фундаментальной системой решений ЛОДУ второго порядка?
3. Какова структура общего решения ЛОДУ второго порядка?
4. Что называется определителем Вронского системы функций?
5. Какая система функций называется линейно независимой (зависимой) на некотором промежутке? Приведите примеры.
6. Какова связь между определителем Вронского и фундаментальной системой решения ЛОДУ второго порядка?
7. Сформулируйте определение характеристического уравнения для ЛОДУ второго порядка. Приведите примеры.
8. Как построить фундаментальную систему решений для ЛОДУ второго порядка с постоянными коэффициентами?

Задания для аудиторной работы

1) Исходя из определения, докажите, что следующая система функций линейно независима на $(-\infty;+\infty)$: $y_1=e^{2x}\sin 3x;\ y_2=e^{2x}\cos 3x$.

2) Исследуйте, являются ли данные три функции линейно зависимыми или нет: $y_1=x;\ y_2=2x;\ y_3=x^2$.

3) Покажите, что функции $y_1=\begin{cases}x^2, -1\le x\le 0,\\ 0,\ 0<x\le 1\end{cases}$ и $y_2=\begin{cases}0, -1\le x\le 0,\\ x^2,\ 0<x\le 1\end{cases}$ линейно независимы, а соответствующий определитель Вронского тождественно равен нулю.

4) Составьте линейное дифференциальное уравнение по заданной фундаментальной системе решений: $e^x,\ xe^x$.

5) Покажите, что система функций e^{2x}, e^{-3x} является фундаментальной для уравнения $y''+y'-6y=0$, и запишите соответствующее общее решение этого уравнения.

Задания для самостоятельной работы

1) Найдите определитель Вронского для системы функций: $\frac{1}{x},\ e^{\frac{1}{x}}$.

2) Покажите, что функции

$$y_1=\begin{cases}0, & 0\le x\le\frac{1}{2},\\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2, & \frac{1}{2}<x\le 1,\end{cases}\qquad y_2=\begin{cases}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2, & 0\le x\le\frac{1}{2},\\ 0, & \frac{1}{2}<x\le 1,\end{cases}$$

линейно независимы, а соответствующий определитель Вронского тождественно равен нулю. Постройте графики этих функций.

3) Составьте однородное линейное дифференциальное уравнение, если задана его фундаментальная система решений: $y_1=e^{-x},\ y_2=e^{x}$.

4) Методом степенных рядов найдите общее решение уравнения $y''+xy=0$.

Практическое занятие 8. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод Лагранжа

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение линейного неоднородного дифференциального уравнения (ЛНДУ) второго порядка. Приведите примеры.
2. Какова структура общего решения ЛНДУ второго порядка? В какой области определено это решение?
3. В чем заключается сущность метода Лагранжа нахождения общего решения ЛНДУ второго порядка?

Задания для аудиторной работы

1) Найдите общее решение дифференциального уравнения:

$$x^2y''-2xy'+2y=x^2+1 \ (\text{при } x>0).$$

2) Известно частное решение соответствующего однородного уравнения: y1=x. Найдите общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$(\ln x-1)\,y''-\frac{y'}{x}+\frac{y}{x^2}=\frac{(\ln x-1)^2}{x},\ (x>e).$$

3) Решите дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами методом вариации постоянных Лагранжа: $y''+2y'+y=e^{-x}\sqrt{x+1}$

4) Найдите методом Лагранжачастное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядкас непрерывными на $(e,\ \infty)$ коэффициентами и непрерывной правой частью

$$y''+\frac{1}{x(1-\ln x)}y'-\frac{1}{x^2(1-\ln x)}y=\frac{1-\ln x}{x^3},$$

Задания для самостоятельной работы

1) Решите дифференциальное уравнение методом вариации постоянных Лагранжа:

$$y'' + y = \operatorname{tg} x$$

2) Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' - 4y = 6xe^{-x}$

3) Найдите общее решение дифференциального уравнения второго порядка $y'' - 4y' + 5y = \dfrac{e^{2x}}{\cos x}$

4) Решите дифференциальное уравнение методом Лагранжа $y'' + 4y = ctg 2x$

Практическое занятие 9. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение линейного неоднородного дифференциального уравнения (ЛНДУ) второго порядка. Приведите примеры.
2. Какова структура общего решения ЛНДУ второго порядка? В какой области определено это решение?
3. В каких случаях и в каком виде может быть найдено частное решение ЛНДУ второго порядка с постоянными коэффициентами методом неопределенных коэффициентов? Приведите примеры.

Задания для аудиторной работы

1) Составьте линейное однородное дифференциальное уравнение, зная его характеристическое уравнение: $k^2 + 3k + 2 = 0$.

2) Зная корни характеристического уравнения $k_1 = 3 - 2i,\ k_2 = 3 + 2i$, найдите общее решение однородного уравнения.

3) Найдите частное решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$ при условии, что $y(0) = 3,\ y'(0) = -1$.

4) Найдите частное решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(\pi) = \pi e^{\pi}$, $y'(\pi) = e^{\pi}$.

5) Определите вид частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения, если известны корни его характеристического уравнения $k_1 = -2$, $k_2 = 2$ и правая часть $f(x) = 5xe^{2x}$.

Задания для самостоятельной работы

1) Составьте линейное однородное дифференциальное уравнение, зная его характеристическое уравнение: $3k^2 - k - 2 = 0$.

2) Решите дифференциальное уравнение $y'' + y' - 2y = 0$.

3)Найдите частное решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 7$, $y'(0) = 8$.

4) Составьте общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения вида $5y'' - 6y' + 5y = f(x)$, для чего предварительно найдите его частное решение либо подбором, либо методом вариации произвольных постоянных, если $f(x) = e^{\frac{3}{5}x}\cos x$.

5) Определите вид частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения, если известны корни его характеристического уравнения $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$ и правая часть $f(x) = A\sin 2x + B\cos 2x$, где $A = const, \quad B = const$.

Практическое занятие 10. Контрольная работа

Образец контрольной работы№1 представлен в соответствующем разделе рабочей программы.

Практическое занятие 11. Дифференциальные уравнения с частными производными. Основные понятия

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение дифференциального уравнения с частными производными. Приведите примеры.
2. Как определяется порядок дифференциального уравнения с частными производными?
3. Каков общий вид дифференциального уравнения с частными производными второго порядка относительно неизвестной функции $u = u(x, y)$?
4. Сформулируйте определение решения дифференциального уравнения с частными производными. Приведите примеры.

Задания для аудиторной работы

1) Проверьте, является ли функция $u(x,y)=\varphi(x^2+y^2)$, где φ — произвольная дифференцируемая функция, *общим* решением уравнения

$$x\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}-y\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=0.$$

2) Найдите решение уравнения $\frac{\partial u}{\partial x}=x^2$, удовлетворяющее условию $u(x,y)\big|_{x=0}=y^2$.

3) Найдите общие решения уравнений: а) $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}=0$; б) $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}=x+y$.

4) Пусть дано квазилинейное уравнение 2-го порядка

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+7\frac{\partial u}{\partial x}+4\frac{\partial u}{\partial y}-2u(x,y)=0.$$

5) Выясните, к какому виду приводится данное уравнение с помощью замены переменных: $\begin{cases}\xi=y-x\\ \eta=2y-x.\end{cases}$

Найдите области (множества) гиперболичности, параболичности и эллиптичности для следующего уравнения:

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2}-2xy\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x\partial y}-(1+y^2)\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2}+5U(x,y)=0.$$

Задания для самостоятельной работы

1) Проверьте, является ли функция $\exp(x^2+y^2)(\varphi(x)+\psi(y))$, где $\varphi(x),\psi(y)$ — произвольные дважды дифференцируемые функции, решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}-y\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}-x\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}+xyu=0.$$

2) Найдите решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=x+y-xy$, удовлетворяющее условию $u(x,y)\big|_{x=0}=y^2$.

3) Найдите общее решение уравнения $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}=x^2+y^2-xy$.

4) Пусть дано линейное уравнение 2-го порядка

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-32u(x,y)=0.$$

5) Выясните, к какому виду приводится данное уравнение с помощью замены переменных: $\begin{cases}\xi=y-x\\ \eta=2x.\end{cases}$

Найдите области (множества) гиперболичности, параболичности и эллиптичности для следующего уравнения:

$$(x^2-1)\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial x\partial y}+(y^2-1)\frac{\partial^2 U(x,y)}{\partial y^2}+3x^6y\cdot U(x,y)=0.$$

Практическое занятие 12. Канонические формы квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение квазилинейного (линейного) дифференциального уравнения второго порядка. Приведите примеры.

2. Сформулируйте определение дискриминанта квазилинейного (линейного) дифференциального уравнения второго порядка.
3. Какие типы квазилинейных (линейных) дифференциальных уравнений второго порядка Вам известны? Приведите примеры.
4. Сформулируйте определение уравнения характеристик для квазилинейного (линейного) дифференциального уравнения второго порядка.
5. Как определяется замена переменных при сведении квазилинейного (линейного) дифференциального уравнения второго порядка гиперболического (параболического, эллиптического) типа к канонической форме?
6. Какова каноническая форма квазилинейного (линейного) дифференциального уравнения второго порядка гиперболического (параболического, эллиптического) типа?

<u>Задания для аудиторной работы</u>

1) Найдите общие решения следующих дифференциальных уравнений:

а) $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2x \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$;

б) $x^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x 2x \dfrac{\partial u}{\partial y} + 4 = 0$.

2) Следующие уравнения приведите к канонической форме в каждой из областей, где сохраняется тип рассматриваемого уравнения:

а) $y \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; б) $xy^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x^2 y \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^3 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - y^2 \dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$;

в) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xy \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

<u>Задания для самостоятельной работы</u>

1) Приведите к канонической форме дифференциальные уравнения:

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 3\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$;

б) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (1+y^2)^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y(1+y^2)\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$.

2) Следующие уравнения приведите к канонической форме в каждой из областей, где сохраняется тип рассматриваемого уравнения:

а) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0$; б) $x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$;

в) $x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (x-1)\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Практическое занятие 13. Метод Фурье решения задач математической физики

<u>Теоретические вопросы</u>

1. Какие уравнения обычно называются уравнениями математической физики? Приведите примеры.
2. Сформулируйте задачу о свободных колебаниях конечной струны.
3. В чем состоит основная идея метода Фурье для решения задачи о свободных колебаниях конечной струны?
4. Каковы достаточные условия существования решения задачи о свободных колебаниях конечной струны?
5. Сформулируйте задачу Дирихле для уравнения Лапласа.

Задания для аудиторной работы

1) Найдите общее решение уравнения $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = x + y$.

2) Решите задачу Коши: $\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = 0$; $z = 3y$ при $x = 0$.

3) Найдите закон колебания конечной струны длины l, расположенной на отрезке $[0,l]$, если в начальный момент ($t = 0$) струне придана форма кривой $U = H\sin\frac{2\pi}{l}x$, а затем струна отпущена без начальной скорости. Концы струны закреплены, внешние силы отсутствуют.

4) Найдите решение дифференциального уравнения $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$ (здесь $a = const$), удовлетворяющее начальным условиям:

$$u(x,0) = 0; \quad u'_t(x,0) = \begin{cases} v_0 & при\ |x - l/2| < h/2, \\ 0 & при\ |x - l/2| > h/2 \end{cases}$$

и однородным краевым условиям: $u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, \quad t > 0$.

Задания для самостоятельной работы

1) Проверьте, является ли функция $\exp(x^2 + y^2)(\varphi(x) + \psi(y))$, где $\varphi(x), \psi(y)$ - произвольные дважды дифференцируемые функции, решением уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} - y\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - x\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} + uyx = 0.$$

2) Найдите решение уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = x + y - xy$, удовлетворяющее условию $u(x,y)|_{x=0} = y^2$.

3) Найдите общее решение уравнения $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y} = x^2 + y^2 - xy$.

4) Решите задачу Коши: $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{x+y}{x}\frac{\partial z}{\partial y} = 0$; $z = y$ при $x = 1$.

5) Найти закон движения $U(t,x)$ однородной струны, закреплённой в точках $x = 0$ и $x = l$, по данным начальным условиям:

$$U|_{t=0} = f(x) = \begin{cases} \frac{4h}{l}x & при\ 0 \le x \le \frac{l}{4}, \\ \frac{4h}{3l}(l - x) & при\ \frac{l}{4} \le x \le l; \end{cases} \qquad U'|_{t=0} = F(x) \equiv 0.$$

Практическое занятие 14. Разностные уравнения. Основные понятия теории разностных уравнений

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение конечных разностей первого (второго, p-го) порядка функции $f(x)$.
2. Дайте определение разностного уравнения n-ого порядка. Приведите примеры.
3. Что такое порядок разностного уравнения?

Задания для аудиторной работы

1) Решить разностное уравнение: $y(x+2)-4y(x+1)+4y(x)=2x$

2) Найти общее решение линейного разностного неоднородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

$y(x+2)-4y(x+1)-12y(x)=6\cdot 6xy(x+2)-4y(x+1)-12y(x)=6\cdot 6x.$

3) Решить разностное уравнение третьего порядка

$y(x+3)-16y(x+2)+83y(x+1)-140y(x)=0, y(0)=3, y(1)=18, y(2)=120.$

4) Найти частное решение однородного разностного уравнения:

$y(x+3)-6y(x+2)+11y(x+1)-6y(x)=0, y(0)=0, y(1)=2, y(2)=8.$

Задания для самостоятельной работы

Решите задачу Коши с начальными условиями x(0)=1, x(2)=0.

1. $x_{n+2}-4x_{n+1}+3x_n = 2\cdot(-1)^n+n+3$
2. $x_{n+2}+6x_{n+1}+5x_n = 3\cdot(-1)^n+2n-3$
3. $x_{n+2}+6x_{n+1}+5x_n = 2\cdot(-5)^n+3n-1$
4. $x_{n+2}+5x_{n+1}+4x_n = -(-1)^n-n+1$
5. $x_{n+2}+4x_{n+1}-5x_n = 2\cdot(-5)^n+n-4$

Практическое занятие 15. Линейные разностные уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение линейного разностного уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами.
2. Дайте определение решения линейного разностного уравнения первого порядка. Приведите примеры.
3. Какие методы решения линейных разностных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами Вам известны?

Задания для аудиторной работы

1) Решите линейные однородные разностные уравнения:

а) $f(x+2) - f(x+1) + 2f(x) = 0;$

б) f (x + 2) + 8 f (x +1) +16 f (x) = 0;
в) f (x + 2) − 2 f (x +1) + 4 f (x) = 0;
2. Найдите частные решения линейных однородных разностных уравнений:
а) f (x +1)− 4 f (x) = 0 , еслиf (1) = 4;
б) f (x +1) − f (x) − f (x −1) = 0, еслиf (1) =1, f (2) =1.
3) Найдите общее решение линейного неоднородного разностного уравнения:
f (x + 2) − 2 f (x +1) + 2 f (x) =1− 5x.

Задания для самостоятельной работы

1) Решите линейные однородные разностные уравнения:
а) f (x + 3) − 3 f (x + 2) + 3 f (x +1) − f (x) = 0;
б) f (x + 3) − 8 f (x) = 0.
2) Найдите частное решение линейного однородного разностного уравнения:
f (x + 2) + 4 f (x +1) + 3 f (x) = 0, еслиf (1) = −1, f (2) = 7.
3) Найдите общее решение линейного неоднородного разностного уравнения:
f (x + 2) − 2 f (x +1) + 2 f (x) =1− 5x.

Практическое занятие 16. Линейные разностные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение линейного разностного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
2. Дайте определение решения линейного разностного уравнения второго порядка. Приведите примеры.
3. Какие методы решения линейных разностных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами Вам известны?

Задания для аудиторной работы

Найдите решение разностной задачи Коши:

1) $y(k+2)-2y(k+1)+4y(k)=(7k-3)(-1)^k$, $y(0)=0$, $y(1)=2\cos\frac{\pi}{3}$.

2) $y(k+2)-5y(k+1)+4y(k)=4^k\cos\pi k-5^k$, $y(2)=0$, $y(3)=0$.

3) $y(k+2)+2y(k+1)+2y(k)=10\cdot 14^k+\sin\pi k$, $y(1)=0$, $y(2)=0$.

4) $y(k+2)+13y(k+1)+22y(k)=(10-k)\cdot 3^k$, $y(2)=0$, $y(3)=0$.

5) $y(k+2)-2y(k+1)+10y(k)=2^{k+2}(3k+2)$, $y(1)=0$, $y(2)=2\cos\frac{\pi}{2}$.

Задания для самостоятельной работы

Решите разностную задачу Коши:

1) $y(k+2)+3y(k)=36\cdot 7^k+\cos\pi k$, $y(0)=15\sin\pi$, $y(1)=0$.

2) $y(k+2)-8y(k+1)+19y(k)=\sin\pi k-2^k(2k-3)$, $y(2)=y(3)=0$.

3) $y(k+2)+12y(k+1)+122y(k)=(3k+1)\cdot 2^{k+1}$, $y(2)=18\sin 3\pi$, $y(3)=23\cos\frac{5\pi}{2}$.

4) $y(k+2)+3y(k+1)-18y(k)=80\cdot 11^k+3^k\cos\pi k$, $y(1)=y(2)=0$.

5) $y(k+2)+y(k+1)-42y(k)=(4k+1)(-7)^k$, $y(0)=\sin 13\pi$, $y(1)=2\cos\dfrac{13\pi}{3}$.

Практическое занятие 17. Контрольная работа

Образец контрольной работы№2 представлен в соответствующем разделе рабочей программы.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Текущая аттестация осуществляется на каждом практическом занятии в процессе фронтального опроса, выполнения заданий для аудиторной работы, в процессе проверки домашней самостоятельной работы.

С целью дифференциации уровня подготовки бакалавров и для ликвидации имеющихся при изучении дисциплины задолженностей студентам предлагаются индивидуальные дидактические задания и домашние лабораторные работы, которые выполняются в процессе внеаудиторной работы и сдаются на проверку преподавателю.

Проведение текущего контроля осуществляется также посредством проведения аудиторных контрольных работ и разноуровневых самостоятельных работ.

Оценочные средства

I.Контрольные вопросы для проверки теоретической подготовки к практическому занятию.

Перечень вопросов приводится в планах практических занятий.

II.Задания для самостоятельной работы.

Перечень практических заданий для самостоятельной работы приводится в планах практических занятий.

III.Контрольные работы по дисциплине.

Проведение текущего контроля осуществляется также посредством проведения аудиторных письменных контрольных работ (два раза в течение 4-го семестров).

Критерии оценивания качества теоретической подготовки к практическому занятию и выполнения заданий

Оценка	Показатели и критерии оценки
«отлично»	обучающийся отвечает на все вопросы преподавателя, самостоятельно выделяет необходимые для анализа параметры задачи, свободно использует теоретический материал при анализе задачи, строго придерживается логики анализа и решения задачи, использует научную лексику, может сформулировать суть возникшего при решении задачи затруднения
«хорошо»	обучающийся самостоятельно выделяет необходимые для анализа параметры задачи, привлекает необходимый теоретический материал, использует его (иногда при подсказке преподавателя) при анализе задачи, в целом соблюдает логику анализа и решения задачи, старается использовать профессиональную терминологию; не всегда осознает и может сформулировать суть возникшего при решении задачи затруднения
«удовлетворительно»	обучающийся отвечает не на все вопросы преподавателя,выделяет необходимые для анализа параметры задачи (иногда с подсказкой преподавателя), привлекает необходимый теоретический материал, но

	затрудняется в его использовании при анализе задачи, частично прибегает к ненаучной лексике, испытывает затруднения при формулировке решения
«неудовлетворительно»	обучающийся не выделяет необходимых для анализа параметров задачи, не реагирует на подсказки преподавателя, испытывает серьезные затруднения в привлечении теоретических знаний, необходимых для анализа условия задачи

<u>Образец контрольной работы №1</u>

1. Дайте определение решения дифференциального уравнения $F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$.
2. Докажите, что функция $y = e^x \sin x$ является решением дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 2y = 0$ на всей числовой прямой.
3. Найдите общее решение уравнения $y' - \frac{2x}{1+x^2} y = 0$.
4. Найдите частное решение уравнения $x \cdot y'' = y'$, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=1} = y'\big|_{x=1} = 1$.
5. Определите вид частного решения $y'' + y = 6\cos 2x + 3x \sin 2x$.

<u>Критерии оценивания контрольной работы</u>

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно реализован каждый метод решения	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	3,75-4
2	Хорошо	2,75-3,5
3	Удовлетворительно	2-2,5
4	Неудовлетворительно	менее 2

<u>Образец контрольной работы № 2</u>

1. Сформулируйте определение решения линейного разностного уравнения первого порядка. Приведите примеры.
2. Найдите общее решение уравнения: $f(k+2) - 6f(k+1) + 8f(k) = 0$.
3. Найдите решение разностной задачи Коши:

$$y(k+2) - 2y(k+1) + 4y(k) = (7k-3)(-1)^k, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 2\cos\frac{\pi}{3}.$$

<u>Критерии оценивания контрольной работы</u>

1. Нормы оценивания:

№ п/п	Структурная часть работы	Количество баллов (*)
1	Задание 1	1 балл
2	Задание 2	2 балла
3	Задание 3	2 балла

(*) с возможностью градации в 0,25 балла.
2. Шкала оценивания работы:

№ п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация осуществляется посредством проведения экзамена в 4 семестре.

Вопросы для подготовки к экзамену и образцы экзаменационных заданий.

4 семестр

Вопросы к экзамену

1. Понятие дифференциального уравнения. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.
2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Задача Коши и теорема Коши.
3. Понятие общего, частного и особого решения дифференциального уравнения первого порядка.
4. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения первого порядка. Метод изоклин.
5. Дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными.
6. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема Коши.
7. Уравнение Бернулли.
8. Уравнение в полных дифференциалах.
9. Однородное дифференциальное уравнение первого порядка.
10. Дифференциальные уравнения высших порядков. Понятие общего и частного решения.
11. Дифференциальные уравнения высших порядков. Задача Коши. Теорема Коши.
12. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.
13. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка. Структура общего решения.
14. Структура общего решения линейного неоднородного уравнения второго порядка.
15. Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа) отыскания частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка.
16. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
17. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов.
18. Дифференциальные уравнения с частными производными. Основные понятия.
19. Квазилинейные и линейные дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка и их классификация.
20. Канонические формы квазилинейных дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка.
21. Функциональные уравнения, не содержащие свободных переменных. Функциональные уравнения, содержащие свободные переменные. Метод подстановки.
22. Разностные уравнения. Основные понятия теории разностных уравнений.
23. Линейные однородные разностные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.
24. Линейные неоднородные разностные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Образец экзаменационного задания

1. Уравнение Бернулли.
2. Разностные уравнения. Основные понятия теории разностных уравнений.
3. Найдите частное решение уравнения $x \cdot y'' = y'$, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=1} = y'\big|_{x=1} = 1$.
4. Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 3y = x$.

5. Найдите решение разностной задачи Коши:

$$y(k+2) - 2y(k+1) + 4y(k) = (7k-3)(-1)^k, \qquad y(0) = 0, \qquad y(1) = 1.$$

Критерии оценивания ответа на экзамене

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Правильный ответ на вопрос	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25, 0,5 и 0,75 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Список основнойлитературы

1. Боровских, А. В. Дифференциальные уравнения в 2 ч. Часть 1: учебник и практикум для вузов / А. В. Боровских, А. И. Перов. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 327 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01777-9. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/451405 (дата обращения: 10.09.2020).
2. Боровских, А. В. Дифференциальные уравнения в 2 ч. Часть 2: учебник и практикум для вузов / А. В. Боровских, А. И. Перов. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 274 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02097-7. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/452068 (дата обращения: 10.09.2020).
3. Аксенов, А. П. Дифференциальные уравнения в 2 т: учебник и практикум для академического бакалавриата / А. П. Аксенов. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 601 с. — (Бакалавр.Академический курс). — ISBN 978-5-9916-5873-7. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/448107 (дата обращения: 8.09.2020).
4. Королев, А. В. Дифференциальные и разностные уравнения: учебник и практикум для вузов / А. В. Королев. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 280 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-9896-2. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/451251 (дата обращения: 8.09.2020).
5. Шипачев, В. С. Высшая математика: учебное пособие для вузов / В. С. Шипачев. — 8-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 447 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-12319-7. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/449732 (дата обращения: 17.06.2020).
6. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис Пресс, 2008. – Ч. 2.

7. Просветов Г. И.Функциональные уравнения: задачи и решения: учебно-практическое пособие. — М.: Издательство «Альфа-Пресс», 2010.

Список дополнительной литературы

1. Шипачев В.С. Задачник по высшей математике / В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 2003.
2.Матвеев Н.М. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – С.-Петербург: Специальная литература, 1996.
3. Курс дифференциальных уравнений и вариационного исчисления [Электронный ресурс] / В.К. Романко [и др.]; под ред. В.К. Романко. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015.
4.Сборник задач по дифференциальным уравнениям и вариационному исчислению[Электронный ресурс] / В.К. Романко [и др.]; под ред. В.К.Романко. – М.: БИНОМ.Лаборатория знаний, 2015.
5. Бродский Я.С., Слипенко А.К. Функциональные уравнения. – К.: Вища школа. Головное издательство. – 1983.

Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

1. Болотин И.Б. Математический анализ / И.Б. Болотин. – Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2010. – Ч. 3.

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

- Система дистанционного обучения Смоленского государственного университета http://cdo.smolgu.ru
- Электронно-библиотечная система университета http://biblioteka.smolgu.ru
- Национальный открытый университет http://www.intuit.ru
- Образовательный математический сайт http://exponenta.ru
- Общероссийский математический портал http://www.mathnet.ru

8. Материально-техническое обеспечение

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используется интерактивная доска; проектор; электронная библиотека кафедры, содержащая электронные учебники и задачники по различным главам математического анализа; система компьютерной математики Mathematica. Осуществляется поиск информации в WWW-пространстве; работа с Web-страницами и ресурсами сети Интернет.

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине в университете имеется следующая необходимая инструментальная база: учебные аудитории для проведения практических занятий; кабинеты, оборудованные проекторами и электронными досками для проведения лекционных занятий. Имеется кабинет ксерокопирования и кафедральный принтер для подготовки индивидуальных дидактических карточек, контрольных и экзаменационных материалов. Доступна электронная библиотека кафедры математического анализа.

Учебная аудитория для проведения лекционных и практических занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, для самостоятельной работы студентов оснащена следующим оборудованием: стандартная учебная мебель (количество учебных посадочных мест соответствует количеству студентов), стол и стул для преподавателя – по 1 шт., возможно кафедра для лектора – 1 шт., доска настенная – 1 шт., напольный мобильный проекционный экран DA-LITE – 1 шт., мультимедиапроектор BenQ – 1 шт., ноутбук/компьютер – 1шт., колонки Genius – 1 шт. (например, лекционные и практические занятия проводятся в аудитории 407 учебного корпуса № 2 или в аудитории 409 учебного корпуса № 2; эти же аудитории задействованы для самостоятельной работы студентов).

9.Программное обеспечение

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине используется Информационно-вычислительный центр физико-математического факультета (Положение о Центре утверждено приказом ректора №01-66 от 28.09.2015 г.).

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используются информационные технологии обработки данных с помощью прикладных программных продуктов MicrosoftExcel, MicrosoftPowerPoint. Осуществляется поиск информации в WWW-пространстве; работа с Web-страницами и социальными ресурсами сети Интернет.

Программное обеспечение: MicrosoftOpenLicense (WindowsXP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), Лицензия 66920993 от 24.05.2016, обновление раз в три года; MicrosoftOpenLicense (WindowsXP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), Лицензия 66975477 от 03.06.2016, обновление раз в три года; Dr. WebServer/DesktopSecuritySuite (Антивирус) ЛицензияEE4E-QN5S-6FG2-N76B (Ежегодноеобновление); KasperskyEndpointSecurity для бизнеса – Стандартный, Лицензия 1FB6151216081242, ежегодное обновление.

Электронные библиотечные системы и электронная информационно-образовательная среда: электронная библиотечная система «ЭБС ЮРАЙТ», Договор № 3074 от 15.11.2017, ежегодное обновление; СДО Русский Moodle 3KL Norm с техническим обслуживанием, Акт на передачу прав №УТДЮ0001785 от 06.12.2016, ежегодное обновление.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 03B6A3C600B7ADA9B742A1E041DE7D81B0
Владелец: Артеменков Михаил Николаевич
Действителен: с 04.10.2021 до 07.10.2022