Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»
Проректор по учебно-методической работе
____________ Ю.А. Устименко
«23» июня 2022 г.

**Рабочая программа дисциплины по выбору**
**Б1.В.ДВ.03.01 Интеграл типа Коши**

Направление подготовки: **44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)**
Направленность (профиль): **Математика, Информатика**
Форма обучения: очная
Курс – 4
Семестр –7
Всего зачетных единиц – 2, часов – 72
Форма отчетности: зачет – 7 семестр

Программу разработал
доктор физ.-мат. наук, профессор Расулов К.М.

Одобрена на заседании кафедры
«16» июня 2022 г., протокол №10
Заведующий кафедрой _____________ К.М. Расулов

Смоленск
2022

## 1. Место дисциплины в структуре ОП

Настоящая дисциплина по выбору относится к той части учебного плана бакалавриата направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки: Математика. Информатика), которая формируется участниками образовательных отношений В ней устанавливается, что интеграл типа Коши является основным математическим инструментом при решении основных линейных краевых задач современной теории аналитических функций комплексного переменного. При этом для решения рассматриваемых краевых задач используются теоретические основы практически всех основных математических дисциплин (математического анализа, алгебры, геометрии, теории функций действительного переменного, теории функций комплексного переменного, теории дифференциальных уравнений, уравнений математической физики), предусмотренных в учебном плане данного направления подготовки. Главное назначение данного спецкурса – научить студентов на основе свойств интеграла типа Коши построить теорию разрешимости двух основных линейных краевых задач комплексного анализа – задачи Римана и задачи Гильберта.

Поскольку краевые задачи Римана и Гильберта для аналитических функций находят многочисленные применения в различных прикладных науках (теория упругости, теория фильтрации, механика сплошной среды и др.), то настоящая дисциплина по выбору преследует две основные цели:

1) комплексное повторение всех ранее изученных студентами математических дисциплин (математического анализа, алгебры, геометрии, теории функций действительного переменного, теории функций комплексного переменного, теории дифференциальных уравнений, уравнений математической физики);

2) практическое применение полученных математических знаний при построении математических моделей сложных явлений, происходящих в окружающем нас мире.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

| Компетенция | Индикаторы достижения |
|---|---|
| **ПК-5.** Способен использовать научные знания в предметной области (математика) в процессе формирования предметной компетенции обучающихся в рамках реализации основной общеобразовательной программы | **Знать**: основные законы естественнонаучных дисциплин, базовый аппарат математики, необходимые для осуществления профессиональной деятельности;<br>**Уметь**: применять знания в области естественнонаучных и математических дисциплин для проведения теоретических и экспериментальных исследований в профессиональной деятельности;<br>**Владеть**: методами комплексного анализа и моделирования, навыками в области естественнонаучного знания, позволяющими осуществлять исследования в профессиональной деятельности. |
| **ПК-7.** Способен математически корректно ставить естественнонаучные задачи и классические задачи математики, строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата | **Знать**: основные свойства интеграла типа Коши, а также постановки и методы решения краевых задач Римана и Гильберта для аналитических функций комплексного переменного в односвязных областях;<br>**Уметь**: использовать свойства интеграла типа Коши для решения конкретных краевых задач типа Римана и типа |

| | |
|---|---|
| | Гильберта для аналитических функций в круговых областях;<br>**Владеть:** техникой вычисления интегралов типа Коши и методами решения краевых задач Римана и Гильберта в односвязных круговых областях. |

## 3. Содержание дисциплины

**Раздел 1. Класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера. Интеграл типа Коши и его основные свойства.** Гладкие, кусочно-гладкие и аналитические кривые на комплексной плоскости и их свойства. Классы функций $C(L)$, $C^1(L)$ и $H_\mu(L)$. Понятие интеграла типа Коши и его основные свойства.

**Раздел 2. Особый (сингулярный) интеграл с ядром Коши и его вычисление.** Особый (сингулярный) интеграл с ядром Кошии его вычисление. Граничные свойства интеграла типа Коши и формулы Сохоцкого-Племели. Формулы обращения особого интеграла с ядром Коши.

**Раздел 3. Основные теоремы комплексного анализа, используемые в теории краевых задач.** Теорема об аналитическом продолжении**,** теорема Лиувилля**,** принцип симметрии, принцип аргумента. Понятие индекса непрерывной функции и его геометрический смысл. Методы вычисления индекса.

**Раздел 4. Однородная краевая задача Римана для аналитических функций в односвязных областях и метод ее решения.** Задача о скачке. Однородная задача Римана и метод ее решения в классах ограниченных (исчезающих) на бесконечности функций.

**Раздел 5. Неоднородная краевая задача Римана для аналитических функций в односвязных областях и метод ее решения.** Постановка неоднородной задачи Римана. Метод решения неоднородной задачи Римана в классах ограниченных (исчезающих) на бесконечности функций.

**Раздел 6. Сингулярные интегральные уравнения с ядром Коши и их связь с краевой задачей Римана.** Характеристическое сингулярное интегральное уравнение и метод его решения. Теоремы Нетера.

**Раздел 7. Краевая задача Гильберта для аналитических функций и методы ее решения.** Постановка краевой задачи Гильберта для аналитических функций в односвязных областях. Метод конформного отображения при решении задачи Гильберта. О решении задачи Гильберта в круговых областях. О решении краевых задач Дирихле и Неймана для гармонических функций.

**Раздел 8. Комплексные методы решения краевых задач Дирихле и Неймана для гармонических функций двух действительных переменных в единичном круге.** Постановки краевых задач Дирихле и Неймана для гармонических функций в односвязных областях. Связь гармонических функций двух действительных переменных с аналитическими функциями комплексного переменного. Решение краевых задач Дирихле и Неймана для гармонических функций как частных случаев задачи Гильберта для аналитических функций.

## 4. Тематический план

| № п/п | Темы | Всего часов | Формы занятий | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | Лекции | Практические занятия | Самостоятельная работа |
| 1. | Класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера. Интеграл типа Коши и его основные свойства | 8 | 2 | 2 | 4 |
| 2. | Особый (сингулярный) интеграл и его вычисление. Граничные свойства интеграла типа Коши и формулы Сохоцкого-Племели | 8 | 2 | 2 | 4 |
| 3. | Основные теоремы комплексного анализа, используемые в теории краевых задач. Понятие индекса непрерывной функции. | 8 | 2 | 2 | 4 |
| 4. | Однородная краевая задача Римана для аналитических функций в односвязных областях и метод ее решения | 10 | 2 | 2 | 6 |
| 5. | Неоднородная краевая задача Римана для аналитических функций в односвязных областях и метод ее решения | 10 | 2 | 2 | 6 |
| 6. | Сингулярные интегральные уравнения и их связь с краевой задачей Римана | 10 | 2 | 2 | 6 |
| 7. | Краевая задача Гильберта для аналитических функций и методы ее решения в круговых областях | 10 | 2 | 2 | 6 |
| 8. | Комплексные методы решения краевых задач Дирихле и Неймана для гармонических функций двух действительных переменных в единичном круге | 8 | 2 | 2 | 4 |
| | Итого: | 72 | 16 | 16 | 40 |

## 5. Виды образовательной деятельности

*Лекции*

**Лекция 1. Класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера. Интеграл типа Коши и его основные свойства.** Классы функций $C(L)$, $C^1(L)$ и $H_\mu(L)$. Понятие интеграла типа Коши и его основные свойства.

**Лекция 2. Особый (сингулярный) интеграл и его вычисление.** Особый (сингулярный) интеграл с ядром Кошии его вычисление. Граничные свойства интеграла типа Коши и формулы Сохоцкого-Племели. Формулы обращения особого интеграла с ядром Коши.

**Лекция 3. Основные теоремы комплексного анализа, используемые в теории краевых задач. Индекс непрерывной функции.** Теорема об аналитическом продолжении**,** теорема Лиувилля**,** принцип симметрии, принцип аргумента. Методы вычисления индекса непрерывной функции.

**Лекция 4. Однородная краевая задача Римана для аналитических функций в односвязных областях и метод ее решения.** Задача о скачке. Однородная задача Римана в классах ограниченных (исчезающих) на бесконечности функций.

**Лекция 5. Неоднородная краевая задача Римана для аналитических функций в односвязных областях и метод ее решения.** Постановка неоднородной задачи Римана. Метод решения неоднородной задачи Римана в классах ограниченных (исчезающих) на бесконечности функций.

**Лекция 6. Сингулярные интегральные уравнения и их связь с краевой задачей Римана.** Интегральные уравнения Фредгольма второго рода и теоремы Фредгольма. Характеристическое сингулярное интегральное уравнение и метод его решения. Понятие о полных сингулярных интегральных уравнениях и теоремы Нетера.

**Лекция 7. Краевая задача Гильберта для аналитических функций и методы ее решения.** Постановка краевой задачи Гильберта для аналитических функций в односвязных областях. Метод конформного отображения при решении задачи Гильберта. О решении задачи Гильберта в круговых областях.

**Лекция 8. Комплексные методы решения краевых задач Дирихле и Неймана для гармонических функций двух действительных переменных в единичном круге.** Постановки краевых задач Дирихле и Неймана для гармонических функций в односвязных областях. Задачи Дирихле и Неймана для гармонических функций – частные случаи краевой задачи Гильберта для аналитических функций.

## *Практические занятия*

### Практическое занятие №1
### Тема. *Класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера. Интеграл типа Коши и его основные свойства*

### Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение класса функций, удовлетворяющих условию Гельдера на множестве $L$.

2. Пусть $C(L)$ – класс *непрерывных* на множестве $L$ функций, $H_\mu(L)$ – класс функций, удовлетворяющих на множестве $L$ *условию Гельдера*, а $C^1(L)$ – класс *непрерывно дифференцируемых* на множестве $L$ функций. Докажите соотношение: $C^1(L) \subset H_\mu(L) \subset C(L)$.

3. Дайте определение интеграла типа Коши с непрерывной плотностью по замкнутой простой кусочно-гладкой кривой.

4. В каких точках комплексной плоскости является аналитической функция, определяемая интегралом типа Коши?

5. Сформулируйте теорему о дифференцируемости интеграла типа Коши.

6. Верно ли утверждение: *если* $f(z)$ – *аналитическая функция в некоторой области* $D$*, то* $f'(z)$ *также является аналитической в этой области*? Ответ обоснуйте.

7. Докажите, что интеграл типа Коши обращается в нуль в точке $z=\infty$.

8. Докажите справедливость следующего утверждения: *если функция* $f(z)$ *является аналитической в односвязной области* $D$*, то для любой замкнутой простой гладкой кривой* $\gamma \subset D$ *имеет место формула*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t)dt}{t-z}=\begin{cases} f(z), & \textit{если } z\in G^{+}, \\ \frac{1}{2}f(z), & \textit{если } z\in \gamma, \\ 0, & \textit{если } z\in D\setminus(G^{+}\cup\gamma), \end{cases}$$

*где* $G^{+}$ *– конечная область, ограниченная кривой* $\gamma$ *.*

**Задачи и упражнения для аудиторной работы**

1.1. Докажите, что непрерывная на отрезке $\left[0;\frac{1}{2}\right]$ функция

$$g(x)=\begin{cases} \frac{1}{\ln x}, & \textit{если } x\neq 0, \\ 0, & \textit{если } x=0, \end{cases}$$

не удовлетворяет на этом отрезке условию Гельдера.

1.2. Пользуясь формулой для производных высших порядков аналитических функций, вычислите следующие интегралы:

а) $\oint\limits_{L}\frac{\cos z}{z^{2}}dz$, где $L=\{z:\ |z|=1\}$;

б) $\oint\limits_{L}\frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^{3}}dz$, где $L=\{z:\ |z-i|=4\}$.

1.3. Найдите первообразные функций:

а) $e^{az}$;

б) $\sin az$;

в) $e^{az}\cos bz$, где $a$ и $b$ – отличные от нуля константы.

1.4. Вычислите следующие интегралы типа Коши:

а) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{(\cos\tau-3\tau^{5}-\tau^{-6})d\tau}{\tau-z}$, где $L=\{\tau:\ |\tau|=1\}$;

б) $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{(\tau e^{\tau}+5\tau^{-2})d\tau}{\tau-z}$, где $L=\{\tau:\ |\tau+i|=5\}$.

**Задания для самостоятельной работы**

1.5. Приведите пример функции, удовлетворяющей на некотором множестве $L$ условию Гельдера, но не дифференцируемой на этом множестве.

1.6. Пользуясь формулой для производных высших порядков аналитических функций, вычислите следующие интегралы:

а) $\oint\limits_{L}\frac{\cos z}{(z-i)^{3}}dz$, где $L=\{z:\ |z-i|=1\}$;

б) $\oint\limits_{L}\frac{e^{z}}{(z-1)^{3}}dz$, где $L=\{z: |z-1|=1\}$.

1.7. Найдите первообразные следующих функций, где $a$ – отличная от нуля константа:
а) $\cos az$;
б) $ze^{az}$;
в) $z\cos az$.

1.8. Вычислите следующие интегралы типа Коши:
а) $\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{(16\tau - 2\tau^{-5})d\tau}{\tau - z}$, где $L = \{\tau : \ |\tau| = 8\}$;
б) $\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{(4e^{\tau} - 5\cos\tau + \tau^{-4})d\tau}{\tau - z}$, где $L = \{\tau : \ |\tau - 2i| = 3\}$.

## Практическое занятие №2

**Тема.** ***Особый (сингулярный) интеграл и его вычисление. Граничные свойства интеграла типа Коши и формулы Сохоцкого-Племели***

### Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение главного значения сингулярного интеграла с ядром Коши и непрерывной (в смысле Гельдера) плотностью.

2. Какова асимптотика интеграла типа Коши вблизи концевых точек кривой интегрирования?

3. По каким формулам определяются граничные значения интеграла типа Коши с плотностью из класса Гельдера?

4. Докажите справедливость следующего утверждения: *если $\Gamma$ – замкнутый гладкий контур и $\varphi(\tau) \in H^{(m)}(\Gamma)$, $m \in \mathbf{N}$, то справедливы формулы*:

$$\Phi^{(m)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \neq \Gamma, \tag{2.1}$$

$$[\Phi^{(m)}(t)]^{+} = [\Phi^{+}(t)]^{(m)} = \frac{1}{2}\varphi^{(m)}(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad t \in \Gamma, \tag{2.2}$$

$$[\Phi^{(m)}(t)]^{-} = [\Phi^{-}(t)]^{(m)} = -\frac{1}{2}\varphi^{(m)}(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad t \in \Gamma. \tag{2.3}$$

5. Напишите формулы обращения сингулярного интегрального оператора с ядром Коши по замкнутой кривой.

### Задачи и упражнения для аудиторной работы

2.1. Пусть $0 < a < c < b < +\infty$, а $n$ – нечетное натуральное число. Показать, что особый интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(x - c)^n}$, определенный как главное значение, существует.

2.2. Докажите, что всякую функцию $\varphi(t) \in H_{\mu}(L)$, где $L = \{t: \ |t| = 1\}$, можно представить в виде $\varphi(t) = \Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t)$, где $\Phi^{+}(t)$ и $\Phi^{-}(t)$ – граничные значения аналитических функций в областях $D^{+} = \{z: \ |z| < 1\}$ и $D^{-} = \{z: \ |z| > 1\}$ соответственно.

2.3. Пусть $T^{+}$– конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым гладким контуром $\Gamma$, а $T^{-} = \overline{\boldsymbol{C}}_{z} \setminus (T^{+} \cup \Gamma)$. Показать, что для любой функции $\varphi(\tau) \in H(\Gamma)$ равенство

$$-\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = 0, \quad t \in \Gamma, \tag{2.4}$$

служит *необходимым* и *достаточным* условием для того, чтобы функция $\varphi(t)$ являлась граничным значением аналитической в области $T^{+}$ функции $\Phi^{+}(z)$.

2.4. Пусть $\gamma = \{t: \ |t| = \rho\}, \quad \rho > 0$. Вычислите значение сингулярного интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{(\tau^{2} - \tau^{-1})d\tau}{\tau - t}.$$

2.5. Вычислите граничные значения следующих интегралов типа Коши:

а) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{(16\tau - 2\tau^{-5})d\tau}{\tau - z}$, где $L = \{\tau: \ |\tau| = 8\}$;

б) $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{(4e^{\tau} - 5\cos\tau + \tau^{-4})d\tau}{\tau - z}$, где $L = \{\tau: \ |\tau - 2i| = 3\}$.

**Задания для самостоятельной работы**

2.6. Пусть $0 < a < c < b < +\infty$, а $n$– нечетное натуральное число и функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию $|\varphi(x) - \varphi(c)| \le A|x - c|^{\lambda}$, где $n - 1 < \lambda < n$. Показать, что при указанных условиях особый интеграл $\displaystyle\int_{a}^{b}\frac{\varphi(x)}{(x - c)^{n}}dx$, определенный как главное значение, существует.

2.7. Докажите, что для всякой функции $\varphi(t) \in H_{\mu}(L)$, где $L = \{t: \ |t| = 1\}$, сингулярный интеграл Коши с плотностью $\varphi(t)$ можно представить в виде суммы $\Phi^{+}(t) + \Phi^{-}(t)$, где $\Phi^{+}(t)$ и $\Phi^{-}(t)$ – граничные значения аналитических функций в областях $D^{+} = \{z: \ |z| < 1\}$ и $D^{-} = \{z: \ |z| > 1\}$ соответственно.

2.8. Пусть $T^{+}$– конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым гладким контуром $\Gamma$, а $T^{-} = \overline{\boldsymbol{C}}_{z} \setminus (T^{+} \cup \Gamma)$. Показать, что для любой функции $\varphi(\tau) \in H(\Gamma)$ равенство

$$\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = 0, \quad t \in \Gamma, \tag{2.5}$$

служит *необходимым* и *достаточным* условием для того, чтобы функция $\varphi(t)$ являлась граничным значением аналитической в области $T^-$ функции $\Phi^-(z)$, исчезающей на бесконечности.

2.9. Пусть $\gamma = \{t: \ |t| = \rho\}, \quad \rho > 0$. Вычислите значение сингулярного интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{(\sin\tau - \tau^{-3})d\tau}{\tau - t}.$$

2.10. Вычислите граничные значения следующих интегралов типа Коши:

а) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{(\tau^2 - 7\tau^{-4})d\tau}{\tau - z}$, где $L = \{\tau: \ |\tau| = 2\}$;

б) $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{(3\tau - 5\sin^2\tau - \tau^{-7})d\tau}{\tau - z}$, где $L = \{\tau: \ |\tau - 5i| = 7\}$.

## Практическое занятие №3

### Тема. *Основные теоремы комплексного анализа, используемые в теории краевых задач. Индекс непрерывной функции.*

### Контрольные вопросы и задания

1. В каком случае функция $F(z)$ называется аналитическим продолжением функции $f(z)$. Приведите примеры.

2. Сколькими способами можно аналитически продолжить функцию с заданного множества, имеющего предельную точку?

3. В чем состоит суть теоремы Лиувилля для аналитических функций?

4. Сформулируйте принцип симметрии для аналитических функций.

5. В чем состоит принцип аргумента для мероморфных функций?

6. Сформулируйте теорему Руше. Приведите примеры ее использования.

7. Дайте определение индекса непрерывной функции по замкнутому простому гладкому контуру.

8. По какой формуле вычисляется индекс функции, являющейся граничным значением аналитической функции?

### Задачи и упражнения для аудиторной работы

3.1. Докажите, что функция $F(z) = \dfrac{1}{1-i}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n$ является аналитическим продолжением функции $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

3.2. Может ли функция $f(z) = i\sin 2z$ быть ограниченной по модулю на комплексной плоскости? Ответ обоснуйте.

3.3. Пусть функция $\Phi^{+}(z)$ является аналитической в единичном круге $T^{+}=\{z:|z|<1\}$ и непрерывной в замкнутом круге $\bar{T}^{+}=\{z:|z|\le 1\}$. Докажите, что тогда функция вида $\Phi^{-}(z)=\overline{\Phi^{+}\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \quad z\in T^{-}=\{z:|z|>1\}$ будет аналитической в области $T^{-}$.

3.4. Найдите число нулей функции $f(z)=e^{z}+3z^{4}-1$ в единичном круге.

3.5. Пусть $L=\{t:|t|=1\}$. Вычислите индексы следующих функций по контуру $L$:

а) $w=\dfrac{t^{3}}{t^{2}+4i}$; б) $w=\dfrac{\operatorname{Re}t}{\operatorname{Im}t}$; в) $w=\dfrac{t+2i}{t-2i}$; г) $w=5\overline{t^{2}}$.

## Задания для самостоятельной работы

3.6. Докажите, что функция $F(z)=\dfrac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{z^{n}}{4^{n}}$ является аналитическим продолжением функции $f(z)=\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\dfrac{(z+1)^{n}}{3^{n}}$.

3.7. Может ли функция $f(z)=\cos z+5i$ быть ограниченной по модулю на комплексной плоскости? Ответ обоснуйте.

3.8. Найдите число нулей функции $f(z)=z^{8}-7z^{5}-3z^{4}+1$ в единичном круге.

3.9. Пусть $L=\{t:|t|=1\}$. Вычислите индексы следующих функций по контуру $L$:

а) $w=\dfrac{3t^{2}}{t^{2}-4i}$; б) $w=\operatorname{Re}t+\operatorname{Im}t$; в) $w=\dfrac{t^{4}+16}{t}$; г) $w=\dfrac{2i}{t^{4}}$.

## Практическое занятие №4

**Тема.** ***Однородная краевая задача Римана для аналитических функций комплексного переменного в односвязных областях***

### Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте задачу Римана (задачу сопряжения) для аналитических функций в случае гельдеровых коэффициентов и гладкого контура.
2. Какова структура общего решения неоднородной задачи Римана?
3. Как решается задача о скачке для аналитических функций?
4. Дайте определение канонической функции однородной задачи Римана.
5. Какова формула факторизации коэффициента однородной задачи Римана?
6. В чем состоит основная логическая схема метода решения однородной задачи Римана для аналитических функций ?
7. Сколько линейно независимых (над полем $\boldsymbol{C}$) решений имеет однородная задача Римана в классе ограниченных на бесконечности функций, если ее индекс равен 5 ?
8. Сформулируйте теорему Ф.Д. Гахова о разрешимости однородной задачи Римана в классе исчезающих на бесконечности функций.

## Задачи и упражнения для аудиторной работы

4.1. Найдите решение следующей задачи о скачке в классе ограниченных на бесконечности функций:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = 2e^t + \frac{1}{t^5}, \quad t \in L,$$

где $L = \{t : |t| = 1\}$.

4.2. Решите следующие однородные задачи Римана в классе функций, ограниченных на бесконечности:

а) $\Phi^+(t) = \frac{5+t}{t}\Phi^-(t), \ t \in L$; б) $\Phi^+(t) = \frac{t(t-2i)}{t^2+3}\Phi^-(t), \quad t \in L$,

где $L = \{t : |t| = 1\}$.

4.3. Решите следующие однородные задачи Римана в классе функций, исчезающих на бесконечности:

а) $\Phi^+(t) = \frac{t^3}{t^3+9}\Phi^-(t), \ t \in L$; б) $\Phi^+(t) = \frac{t^2(t-4i)}{2t-1}\Phi^-(t), \quad t \in L$,

где $L = \{t : |t| = 1\}$.

4.4. Пусть $L = \{t : |t| = 1\}$. При каких значениях параметра $a$ однородная задача Римана

$$\Phi^+(t) = \frac{t}{t^2+a}\Phi^-(t), \ t \in L,$$

в классе ограниченных на бесконечности функций имеет (ненулевые) решения ? Ответ обоснуйте.

## Задания для самостоятельной работы

4.5. Найдите решение следующей задачи о скачке в классе ограниченных на бесконечности функций:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = 3i\sin t - \frac{\sqrt{2}}{t^2}, \quad t \in L,$$

где $L = \{t : |t| = 1\}$.

4.6. Решите следующие однородные задачи Римана в классе функций, ограниченных на бесконечности:

а) $\Phi^+(t) = \frac{t}{t-3}\Phi^-(t), \ t \in L$; б) $\Phi^+(t) = \frac{t^3(t-5i)}{t^2-2}\Phi^-(t), \quad t \in L$,

где $L = \{t : |t| = 1\}$.

4.7. Решите следующие однородные задачи Римана в классе функций, исчезающих на бесконечности:

а) $\Phi^+(t) = \frac{t+2}{t^2-9}\Phi^-(t), \ t \in L$; б) $\Phi^+(t) = \frac{t^8}{4t-1}\Phi^-(t), \quad t \in L$,

где $L = \{t : |t| = 1\}$.

4.8. Пусть $L = \{t : |t| = 1\}$. При каких значениях параметра $a$ однородная задача Римана

$$\Phi^{+}(t) = \frac{t^2 - a}{t^2 + a}\Phi^{-}(t), \quad t \in L,$$

в классе ограниченных на бесконечности функций имеет (ненулевые) решения? Ответ обоснуйте.

## Практическое занятие №5

## Тема. *Метод решения неоднородной краевой задачи Римана для аналитических функций комплексного переменного*

### Контрольные вопросы и задания

1. Сформулируйте постановку неоднородной задачи Римана (задачи сопряжения) для аналитических функций в случае гельдеровых коэффициентов и гладкого контура.
2. Что называется индексом неоднородной задачи Римана для аналитических функций?
3. Какова структура общего решения неоднородной задачи Римана?
4. В чем состоит основная логическая схема метода решения неоднородной задачи Римана для аналитических функций ?
5. Сформулируйте теорему Ф.Д. Гахова о разрешимости неоднородной задачи Римана в классе ограниченных (исчезающих) на бесконечности функций.
6. Изложите суть «упрощенного» метода решения неоднородной задачи Римана в односвязных областях в случае, когда коэффициент краевого условия есть рациональная функция, не имеющая нулей и полюсов на контуре.

### Задачи и упражнения для аудиторной работы

5.1. Пусть $L = \{t : |t| = 1\}$. Решите следующие краевые задачи Римана в классе кусочно аналитических функций, ограниченных на бесконечности:

а) $\Phi^{+}(t) = \dfrac{5+t}{t}\Phi^{-}(t) + t^3 - \dfrac{\sqrt{3}}{t}, \ \ t \in L;$

б) $\Phi^{+}(t) = \dfrac{t(t-2i)}{t^2+3}\Phi^{-}(t) - 21t^5 + \dfrac{7}{t^5}, \ \ t \in L;$

в) $\Phi^{+}(t) = \dfrac{3}{t^3}\Phi^{-}(t) + t^6 - \dfrac{11}{t^{10}}, \ \ t \in L.$

5.2. Решите следующие неоднородные задачи Римана в классе функций, исчезающих на бесконечности:

а) $\Phi^{+}(t) = \dfrac{t^3}{t^3+9}\Phi^{-}(t) + 4t - \dfrac{6}{t^2}, \ \ t \in L;$

б) $\Phi^{+}(t) = \dfrac{t^2(t-4i)}{2t-1}\Phi^{-}(t) + 8t^3, \ \ t \in L;$

где $L = \{t : |t| = 1\}$.

5.3. Требуется решить неоднородную задачу Римана в классе функций, исчезающих на бесконечности, если ее краевое условие имеет вид

$$\Phi^{+}(t) = \frac{t}{t^2-1}\Phi^{-}(t) + \frac{t^3 - t^2 + 1}{t^3 - t}, \quad t \in L,$$

где $L$ - произвольный простой замкнутый гладкий контур следующего вида:
а) контур $L$ содержит внутри себя точку $z_0 = 0$ и не содержит точек $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$;
б) контур $L$ содержит внутри себя точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$, и не содержит точки $z_0 = 0$.

5.4. Требуется найти все исчезающие на бесконечности кусочно аналитические функции $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ с линией скачков $L = \{t : |t| = 1\}$, удовлетворяющие на $L$ соотношению

$$\Phi^+(t) - t\Phi^-(t) - \left(\frac{1}{2} - t\right)\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^+(\tau)d\tau}{\tau} = 3t^3 + \frac{1}{2}t^2 .$$

### Задания для самостоятельной работы

5.5. Пусть $L = \{t : |t| = 1\}$. Решите следующие краевые задачи Римана в классе кусочно аналитических функций, ограниченных на бесконечности:

а) $\Phi^+(t) = t^2\Phi^-(t) + t^{10} - \dfrac{1}{t}$, $t \in L$;

б) $\Phi^+(t) = \dfrac{(t-5i)}{t^2}\Phi^-(t) - 2t^4 + \dfrac{8}{t^5}$, $t \in L$;

в) $\Phi^+(t) = \dfrac{t+3}{t^5}\Phi^-(t) + t^2 - \dfrac{2}{t^4}$, $t \in L$.

5.6. Решите следующие неоднородные задачи Римана в классе функций, исчезающих на бесконечности:

а) $\Phi^+(t) = \dfrac{t}{t^2+9}\Phi^-(t) + t^3 - \dfrac{1}{t^2}$, $t \in L$;

б) $\Phi^+(t) = \dfrac{t^3(t-8)}{4t-1}\Phi^-(t) + 3t^3 - \dfrac{\sqrt{2}}{t^2}$, $t \in L$,

где $L = \{t : |t| = 1\}$.

5.7. Требуется решить неоднородную задачу Римана в классе функций, исчезающих на бесконечности, если ее краевое условие имеет вид

$$\Phi^+(t) = \frac{t}{t^2-1}\Phi^-(t) + \frac{t^3 - t^2 + 1}{t^3 - t}, \quad t \in L,$$

где $L$ - произвольный простой замкнутый гладкий контур следующего вида:

а) контур $L$ содержит внутри себя точки $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ и не содержит точки $z_2 = -1$;

б) контур $L$ содержит внутри себя точки $z_0 = 0$, $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$.

5.8. Требуется найти все кусочно аналитические функции $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ с линией скачков $L = \{t : |t| = 1\}$, имеющие на бесконечности нуль второго порядка и удовлетворяющие на $L$ условию

$$\Phi^+(t) - t^2\Phi^-(t) + \frac{(1-t^{-1})}{4\pi i}\int_\Gamma \frac{\Phi^+(\tau)}{\tau^2}d\tau = t - \frac{1}{t^3} .$$

## Практическое занятие №6

**Тема.** ***Сингулярные интегральные уравнения и их связь с краевой задачей Римана для аналитических функций комплексного переменного***

### Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение однородного (неоднородного) интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода.
2. Что называется собственными значениями (собственными функциями) однородного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода?
3. Какое уравнение называется союзным с данным однородным интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода?
4. Сформулируйте три основные теоремы Фредгольма о разрешимости интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода.
5. Что называется спектром интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода?
6. Сформулируйте теорему о спектре интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода.
7. Может ли заданному собственному значению однородного интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода соответствовать бесконечное множество собственных функций?
8. Изложите логическую схему решения интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода с вырожденными ядрами?
9. Дайте определение полного сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши.
10. Что называется характеристической частью (регулярной частью) полного сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши?
11. Какое уравнение называется характеристическим сингулярным интегральным уравнением с ядром Коши?
12. Какая связь между краевой задачей Римана для аналитических функций и характеристическим сингулярным интегральным уравнением с ядром Коши?
13. В чем состоит основной метод решения характеристического сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши?
14. Сформулируйте три основные теоремы Нетера о разрешимости сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши.

### Задачи и упражнения для аудиторной работы

6.1. Пусть $L=\{t:|t|=1\}$. Решите следующие интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода:

а) $\varphi(t)+\int\limits_L\left(\dfrac{2t}{\tau}+5\tau^{-2}\right)\varphi(\tau)d\tau=3t+1$,

б) $\varphi(t)-\int\limits_L\left(\dfrac{t^2}{\tau^2}+2\tau\right)\varphi(\tau)d\tau=t^2-\dfrac{1}{t}$;

в) $\varphi(t)-\int\limits_L(\tau-t)\varphi(\tau)d\tau=5t^2-t^3-\dfrac{4}{t}$.

6.2. Решите следующие характеристические сингулярные интегральные уравнения:

а) $t(t-2)\varphi(t)+\dfrac{t^2-6t+8}{\pi i}\int\limits_L\dfrac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\dfrac{1}{t}$, где $L=\{t:|t|=1\}$;

б) $(t^2-2)\varphi(t)+\dfrac{3t}{\pi i}\int\limits_L\dfrac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\dfrac{2t}{t^2+1}$, где $L=\{t:|t-2i|=2\}$;

в) $t\varphi(t)-\dfrac{t-2}{\pi i}\int\limits_L \dfrac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=2(t^2+1)$, где $L=\{t:|t-1|=2\}$.

**Задания для самостоятельной работы**

6.3. Пусть $L=\{t:|t|=1\}$. Решите следующие интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода:

а) $\varphi(t)+\int\limits_L\left(\dfrac{\tau}{t}+\dfrac{t}{\tau}\right)\varphi(\tau)d\tau=t^2-\dfrac{1}{t}$,

б) $\varphi(t)-\int\limits_L\left(\dfrac{t}{\tau^2}+2\tau\cdot t^2\right)\varphi(\tau)d\tau=4t+\dfrac{1}{t^2}$;

в) $\varphi(t)+\int\limits_L\left(\tau^2-t^2\right)\varphi(\tau)d\tau=t^2-t^3+\dfrac{1}{t}$.

6.4. Решите следующие характеристические сингулярные интегральные уравнения:

а) $t(t-2)\varphi(t)+\dfrac{t^2-6t+8}{\pi i}\int\limits_L \dfrac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\dfrac{1}{t}$, где $L=\{t:|t|=1\}$;

б) $(t^2-2)\varphi(t)+\dfrac{3t}{\pi i}\int\limits_L \dfrac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\dfrac{2t}{t^2+1}$, где $L=\{t:|t-2i|=2\}$;

в) $t\varphi(t)-\dfrac{t-2}{\pi i}\int\limits_L \dfrac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau=2(t^2+1)$, где $L=\{t:|t-1|=2\}$.

## Практическое занятие №7

**Тема.** ***Краевая задача Гильберта для аналитических функций комплексного переменного. Решение задачи Гильберта в единичном круге методом редукции к задаче Римана***

**Контрольные вопросы и задания**

1. Сформулируйте краевую задачу Гильберта для аналитических функций в случае гельдеровых коэффициентов и односвязных областей.
2. Какова комплексная форма записи краевого условия задачи Гильберта?
3. Пусть $D^+$ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z=x+iy$, ограниченная кривой Ляпунова $L$. Установите конформную эквивалентность задачи Гильберта для области $D^+$ задаче Гильберта для единичного круга.
4. В чем суть метода редукции внутренней краевой задачи Гильберта для аналитических функций комплексного переменного в единичном круге к краевой задаче Римана?
5. Что называется индексом краевой задачи Гильберта?
6. Изложите логическую схему решения внутренней однородной краевой задачи Гильберта методом Н.И. Мусхелишвили.
7. Дайте определение фундаментальной функции однородной задачи Гильберта.
8. Сформулируйте теорему Н.И. Мусхелишвили о разрешимости внутренней однородной задачи Гильберта в единичном круге.
9. В чем состоит основная суть решения внутренней неоднородной краевой задачи Гильберта в единичном круге методом Н.И. Мусхелишвили?
10. Сформулируйте основную теорему о разрешимости внутренней неоднородной задачи Гильберта в единичном круге.

11. Изложите логическую схему решения внешней задачи Гильберта для аналитических функций комплексного переменного в единичном круге.

## Задачи и упражнения для аудиторной работы

7.1. Требуется найти все аналитические в круге $T^{+}=\{z:|z|<1\}$ функции $\Phi^{+}(z)$, непрерывные в $T^{+}\cup\Gamma$ и удовлетворяющие на $\Gamma=\{t:|t|=1\}$ краевому условию

$$\operatorname{Re}\{\frac{1}{t}\Phi^{+}(t)\}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right).$$

7.2. Требуется найти аналитические в круге $T^{+}=\{z:|z|<1\}$ функции $\Phi^{+}(z)$, непрерывные в $T^{+}\cup\Gamma$ и удовлетворяющие на $\Gamma=\{t:|t|=1\}$ краевому условию

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{t}{t-2i}\Phi^{+}(t)\right\}=t^{3}+\frac{1}{t^{3}}.$$

7.3. Пусть $L=\{\mathrm{w}:\operatorname{Im}w=0\}$ и $\boldsymbol{C}_{+}=\{w:\operatorname{Im}w>0\}$. Найдите аналитическую в полуплоскости $\boldsymbol{C}_{+}$ функцию $\Phi^{+}(w)$, непрерывную в $\boldsymbol{C}_{+}\cup L$ и удовлетворяющую на $L$ краевому условию

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{\tau-i}{\tau+i}\Phi^{+}(\tau)\right\}=\frac{3\tau^{2}-1}{(\tau^{2}+1)^{2}}.$$

7.5. Пусть $D^{+}$ – конечная односвязная область на плоскости $\boldsymbol{C}_{w}$ комплексного переменного $w=\xi+i\eta$, ограниченная *улиткой Паскаля* $L$, т.е. замкнутой кривой, задаваемой параметрическим уравнением вида

$$w=\rho\left(e^{i\theta}+me^{i2\theta}\right),$$

где $\rho>0$, $0<m<\dfrac{1}{2}$ $0\le\theta\le 2\pi$. Требуется найти все аналитические в области $D^{+}$ функции $\Phi^{+}(z)$, непрерывные в $D^{+}\cup L$ и удовлетворяющие на $L$ краевому условию

$$\operatorname{Re}\{\overline{h(\tau)}\Phi^{+}(\tau)\}=q(\tau),$$

где $h(\tau)=a(\tau)+ib(\tau),\ q(\tau)$ – заданные на $L$ функции класса $H(L)$, причем $h(\tau)\neq 0$.

7.6. Пусть $T^{+}=\{z:|z|<1\}$, $\Gamma=\{t:|t|=1\}$ и $T^{-}=\overline{\boldsymbol{C}}_{z}\setminus(T^{+}\cup\Gamma)$. Найдите все аналитические в $T^{-}$ функции $\Phi^{-}(z)$, непрерывные в $T^{-}\cup\Gamma$ и удовлетворяющие на $\Gamma$ краевому условию

$$\operatorname{Re}\{\frac{1}{t}\cdot\Phi^{-}(t)\}=\frac{1}{2}\left(t^{2}+\frac{1}{t^{2}}\right).$$

## Задания для самостоятельной работы

7.7. Разрешима ли в единичном круге $T^{+}=\{(r,\varphi):\ 0<r<1,\ -\pi\le\varphi\le\pi\}$ задача Гильберта с краевым условием:

$$[5\cos\varphi+\sin 2\varphi]\cdot U(\cos\varphi,\sin\varphi)-[5\sin\varphi-\cos 2\varphi]\cdot V(\cos\varphi,\sin\varphi)=0\,?$$

7.8. Пусть $T^{+}=\{z:|z|<1\}$, $\Gamma=\{t:|t|=1\}$ и $T^{-}=\overline{\boldsymbol{C}}_z\setminus(T^{+}\cup\Gamma)$. Найдите все аналитические в $T^{-}$ функции $\Phi^{-}(z)$, непрерывные в $T^{-}\cup\Gamma$ и удовлетворяющие на $\Gamma$ краевому условию

$$\operatorname{Re}\{t^{-2}\cdot\Phi^{-}(t)\}=\frac{1}{2}\left(t^{2}+\frac{1}{t^{2}}\right).$$

7.9. Требуется найти аналитические в круге $T^{+}=\{z:|z|<1\}$ функции $\Phi^{+}(z)$, непрерывные в $T^{+}\cup\Gamma$ и удовлетворяющие на $\Gamma=\{t:|t|=1\}$ краевому условию

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{t}{t-3i}\Phi^{+}(t)\right\}=t^{4}+\frac{1}{t^{4}}\,.$$

7.10. Пусть $\Gamma=\{t:|t|=1\}$. Выясните, при каком значении параметра $b$ внутренняя задача Гильберта с краевым условием вида

$$\operatorname{Re}\{t^{2}\cdot\Phi^{+}(t)\}=b\left(t-\frac{1}{t}\right)+\left(t^{2}+\frac{1}{t^{2}}\right),\ \ t\in\Gamma,$$

будет иметь решение. Решите задачу при найденном значении $b$.

7.11. Пусть $T^{+}=\{z:|z|<1\}$, $\Gamma=\{t:|t|=1\}$ и $T^{-}=\overline{\boldsymbol{C}}_z\setminus(T^{+}\cup\Gamma)$. Найдите все аналитические в $T^{-}$ функции $\Phi^{-}(z)$, непрерывные в $T^{-}\cup\Gamma$ и удовлетворяющие на $\Gamma$ краевому условию

$$\operatorname{Re}\{t\cdot\Phi^{-}(t)\}=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right).$$

## Практическое занятие №8

### Тема. *Методы решения краевых задач Дирихле и Неймана для гармонических функций двух действительных переменных в единичном круге*

### Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение гармонической функции двух действительных переменных в точке $M_0(x_0,y_0)$. Приведите примеры.
2. Когда функция $U(x,y)$ называется гармонической на множестве $D$?
3. Какая связь между гармоническими функциями двух действительных переменных и аналитическими функциями комплексного переменного?
4. Сформулируйте постановку внутренней краевой задачи Дирихле (задачи Неймана) для гармонических функций в односвязных областях.
5. Может ли задача Дирихле (задачи Неймана) для гармонических функций иметь более одного решения?
6. Сформулируйте постановку краевой задачи Шварца для аналитических функций комплексного переменного в круговых областях.
7. Какая связь между краевыми задачами Дирихле и Шварца?

8. Какие методы решения краевых задач Дирихле и Неймана в круговых областях Вы знаете?
9. Укажите практические приложения краевых задач Дирихле и Неймана для гармонических функций.

**Задачи и упражнения для аудиторной работы**

8.1. Проверьте, являются ли следующие функции гармоническими в своей области определения:

а) $U(x,y) = arctg\,\dfrac{y}{x}$; б) $\varphi(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$; в) $V(x,y) = x^3 + y^3$.

8.2. Существует ли аналитическая функция $f(z)$, у которой:

а) $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2$; б) $\operatorname{Im} f(z) = xy^2$; в) $\operatorname{Re} f(z) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$?

8.3. Напишите краевое условие $u(x,y)\big|_{\varGamma} = y^2 - x^2 - \dfrac{1}{2}y$, где $\varGamma = \{(x,y) : x^2 + y^2 = \rho^2\}$, в комплексной форме.

8.4. Найдите гармоническую в единичном круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функцию $U(x,y)$, если известно, что ее граничные значения на $\varGamma = \{t : |t| = 1\}$ удовлетворяют условию: $U\big|_{\varGamma} = 5 + t^2 + \dfrac{1}{t^2}$.

8.5. Внутри круга $D^+ = \{(x,y) : x^2 + y^2 < \rho^2\}$ найдите гармоническую функцию $u(x,y)$, принимающую на границе $\varGamma = \{(x,y) : x^2 + y^2 = \rho^2\}$ следующие значения: $u\big|_{\varGamma} = x^2 + 2xy - 4y^2$.

8.6. Внутри единичного круга $0 \le r \le 1$ найдите гармоническую функцию $u(r,\varphi)$, принимающую на границе $\varGamma$ данного круга значения: $u\big|_{\varGamma} = \pi^2 - \varphi^2, \quad -\pi \le \varphi \le \pi$.

8.7. Внутри круга $D^+ = \{(x,y) : x^2 + y^2 < \rho^2\}$ найдите гармоническую функцию $u(x,y)$, принимающую на границе $\varGamma$ данного круга следующие значения: $u\big|_{\varGamma} = A\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi$, где $A$ и $B$ - некоторые постоянные, а $-\pi \le \varphi \le \pi$.

8.8. Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, $\varGamma = \{t : |t| = 1\}$. Выясните, при каком значении параметра $a$ задача Неймана с краевым условием

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\varGamma} = 3a + t^3 + \frac{1}{t^3}, \quad t \in \varGamma,$$

где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к $\varGamma$, будет иметь решение. Решите задачу при найденном значении $a$.

## Задания для самостоятельной работы

8.9. Требуется найти аналитические в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функции $\Phi^+(z)$, непрерывные в $T^+ \cup \Gamma$ и удовлетворяющие на $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$ краевому условию $\mathrm{Re}\{\Phi^+(t)\} = t + \frac{1}{t} + 1$.

8.10. Напишите краевое условие $u(x,y)\big|_{\Gamma} = 2x^2 - 4xy$, где $\Gamma = \{(x,y) : x^2 + y^2 = \rho^2\}$, в комплексной форме.

8.11. Внутри круга $0 \le r \le \rho$ найдите гармоническую функцию $u(r,\varphi)$, принимающую на границе $\Gamma$ данного круга значения: $u\big|_{\Gamma} = \sin 2\varphi, \quad -\pi \le \varphi \le \pi$.

8.12. Внутри круга $D^+ = \{(x,y) : x^2 + y^2 < \rho^2\}$ найдите гармоническую функцию $u(x,y)$, принимающую на границе $\Gamma = \{(x,y) : x^2 + y^2 = \rho^2\}$ следующие значения: $u\big|_{\Gamma} = y^2 - x^2 - \frac{1}{2}y$.

8.13. Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$. Выясните, при каком значении параметра $b$ задача Неймана с краевым условием

$$\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right|_{\Gamma} = 10b + t^2 + \frac{1}{t^2}, \quad t \in \Gamma,$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к $\Gamma$, будет иметь решение. Решите задачу при найденном значении $b$.

## Самостоятельная работа

Задания для самостоятельной работы приводятся в планах практических занятий.

## 6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

### 6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Текущая аттестация осуществляется на каждом практическом занятии в процессе фронтального опроса, выполнения заданий для аудиторной работы, в процессе проверки домашней самостоятельной работы.

**Оценочные средства**

**I. Контрольные вопросы для проверки теоретической подготовки к практическому занятию.**

Перечень вопросов приводится в планах практических занятий.

**II. Задания для самостоятельной работы.**

Перечень практических заданий для самостоятельной работы приводится в планах практических занятий.

### 6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация осуществляется посредством проведения зачёта. Зачет выставляется по итогам практических занятий, а также на основе представленных обучающимися материалов самостоятельной работы в соответствии с Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации. Студенты, не выполнившие все задания для самостоятельной работы, предложенные в планах практических занятий, для получения зачета выполняют письменное зачетное задание, образец которого приводится ниже.

**Оценочные средства**

**I. Задания для итогового (зачетного) занятия.**

***Образец зачетного задания***

***Примечание.*** *Во всех заданиях значение параметра* $k$ *равно порядковому номеру студента в учебном журнале*

**1. Задача Римана.** Пусть $T^+$ - единичный круг на комплексной плоскости переменного $z = x + iy$, т.е. $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, а $T^- = \overline{C} \setminus (T^+ \cup L)$, где $L = \{t : |t| = 1\}$. Требуется найти две аналитические функции: $\Phi^+(z)$ - аналитическую в $T^+$ и $\Phi^-(z)$ - аналитическую в $T^-$ ($\Phi^-(\infty) = k$), если их граничные значения на $L$ удовлетворяют следующему условию:

$$\Phi^+(t) = t^{10-k}\Phi^-(t) + kt^k + (10-k)t^{-k}.$$

**2. Задача Гильберта.** Пусть $T^+$ - единичный круг на комплексной плоскости переменного $z = x + iy$, а $L = \{t : |t| = 1\}$ - граница этого круга. Требуется найти аналитическую в $T^+$ функцию $\Phi^+(z)$, если ее граничные значения на $L$ удовлетворяют следующему условию:

$$\mathrm{Re}\{t^{-1}\Phi^+(t)\} = \frac{1}{2i^k}\left(t^{10-k} + (-1)^k t^{k-10}\right),$$ где $i$ - мнимая единица.

<u>Критерии оценивания ответа на зачёте</u>

1. Нормы оценивания ответа

| №п/п | Структурная часть билета | Количество баллов |
|---|---|---|
| 1 | Правильное решение задачи 1 | 2,5 балла |
| 2 | Правильное решение задачи 2 | 2,5 балла |

(*) Возможна градация в 0,25, 0,5 и 0,75 балла.

2. Шкала оценивания работы:

| п/п | Оценка | Количество баллов |
|---|---|---|
| 1 | Зачтено | 3-5 |
| 2 | Незачтено | 2 и менее |

## 7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

### 7.1. Основная литература


1. *Расулов К.М.* Методы решения линейных краевых задач комплексного анализа: учебное пособие. – Смоленск: «Принт-Экспресс», 2019.

2 *Расулов К.М.* Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. – Смоленск: СмолГУ, 2013.


### 7.2. Дополнительная литература


3. *Агошков В.И., Дубовский П.Б., Шутяев В.П.* Методы решения задач математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
4. *Бицадзе А.В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М., Наука, 1984.
5. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – М., Наука, 1977.
6. *Зверович Э.И.* Линейные краевые задачи теории аналитических функций. – Минск: БГУ, 2015.
7. *Мартинсон Л.К., Малов Ю.И.* Дифференциальные уравнения математической физики. – М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1996.
8. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., Наука, 1968.
9. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М., Наука, 1966.
10. *Прусов И.А.* Двумерные краевые задачи фильтрации. – Минск, 1987. – 182 с.
11. *Расулов К.М.* Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СПГУ, 1998.
12. *Heinrich Begehr.* Boundary value problems in complex analysis I // Boletin de la Asociacion Matematica Venezolana. Vol. 12, No. 1 (2005). – P. 65-85.
13. *Heinrich Begehr.* Complex analytic methods for partial differential equations. – Singapure: World Scientific Publishing, 1994.


### 7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

- Система дистанционного обучения Смоленского государственного университета http://cdo.smolgu.ru
- Электронно-библиотечная система университета http://biblioteka.smolgu.ru
- Национальный открытый университет http://www.intuit.ru
- Образовательный математический сайт http://exponenta.ru
- Общероссийский математический портал http://www.mathnet.ru

## 8. Материально-техническое обеспечение

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используется интерактивная доска; проектор. Осуществляется поиск информации в WWW-пространстве; работа с Web-страницами и ресурсами сети Интернет.

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине в университете имеется следующая необходимая инструментальная база: учебные аудитории для проведения практических занятий; компьютерный класс, оборудованный персональными ЭВМ с необходимым математическим софтом и выходом в Интернет для проведения практических занятий; кабинеты, оборудованные проекторами и электронными досками для проведения лекционных занятий. Имеется кабинет ксерокопирования и кафедральный принтер для подготовки индивидуальных дидактических материалов.

## 9. Программное обеспечение

Для осуществления образовательного процесса используется Информационно-вычислительный центр физико-математического факультета (Положение о Центре утверждено приказом ректора №01-66 от 28.09.2015 г.), включающий компьютерные классы, оснащённые выходом в интернет и системой компьютерной математики Wolfram Mathematica в текущей модификации.

Программное обеспечение: Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), Лицензия 66920993 от 24.05.2016, обновление раз в три года; Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), Лицензия 66975477 от 03.06.2016, обновление раз в три года; Dr. Web Server/Desktop Security Suite (Антивирус) Лицензия EE4E-QN5S-6FG2-N76B (Ежегодное обновление); Kaspersky Endpoint Security для бизнеса – Стандартный, Лицензия 1FB6151216081242, ежегодное обновление.

Электронные библиотечные системы и электронная информационно-образовательная среда: электронная библиотечная система «ЭБС ЮРАЙТ», Договор № 3074 от 15.11.2017, ежегодное обновление; СДО Русский Moodle 3KL Norm с техническим обслуживанием, Акт на передачу прав №УТДЮ0001785 от 06.12.2016, ежегодное обновление.