Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра прикладной математики и информатики

«Утверждаю»
Проректор по учебно-методической работе
_________________________Ю.А. Устименко
«09» сентября 2021 г.

Рабочая программа дисциплины
Б1.О.14 Линейная алгебра

Направление подготовки: **11.03.01 Радиотехника**
Направленность (профиль): **Радиоэлектронные системы и комплексы**
Форма обучения: очная
Курс – 1
Семестр – 1
Всего зачетных единиц –3, часов – 108
Форма отчетности: экзамен – 1 семестр

Программу разработал: кандидат физико-математических наук, доцент Г.А. Банару

Одобрена на заседании кафедры
«02» сентября 2021 г., протокол № 1

Смоленск
2021

1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Линейная алгебра» входит в обязательную часть учебного плана по программе бакалавриата направления подготовки 11.03.01 Радиотехника, направленность (профиль): Радиоэлектронные системы и комплексы.

Требования к входным знаниям, умениям и навыкам студента формируются на основе программы среднего общего образования по математике.

Дисциплина «Линейная алгебра» является предшествующей для таких математических дисциплин, как Аналитическая геометрия, Теория оптимизации и численные методы. Приобретенные в результате изучения дисциплины знания, умения и навыки используются практически во всех профильных дисциплинах, так как методы линейной алгебры находят широчайшее применение практически во всех естественных науках, а также в различных областях техники.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
ОПК-1. Способен использовать положения, законы и методы естественных наук и математики для решения задач инженерной деятельности	**Знать**: фундаментальные законы природы, основные законы и методы математики. **Уметь**: применять законы и методы математики для решения задач теоретического и прикладного характера. **Владеть**: навыками использования основных теорий и методов математики при решении практических задач.

3. Содержание дисциплины

Теория матриц и определителей. Матрицы и действия над ними. Свойства суммы матриц, произведения матрицы на число, произведения матриц. Перестановки. Теорема об изменении чётности перестановки при транспозиции. Подстановка. Утверждение о сохранении чётности подстановки при различных её записях. Определение определителя. Свойства определителя. Теорема о разложении определителя по строке (столбцу). Ранг матрицы. Базисный минор. Теорема о существовании обратной матрицы. Утверждения о единственности матрицы, обладающей свойством единичной и о единственности обратной матрицы.

Системы линейных уравнений. Системы линейных уравнений. Элементарные преобразования линейной системы. Методы решения линейных систем с ненулевым главным определителем. Формулы Крамера. Теорема о существовании ненулевого решения однородной линейной системы в случае, когда количество неизвестных больше количества уравнений. Арифметическое $\boldsymbol{n}$-мерное векторное пространство. Критерий линейной зависимости. Утверждение о линейной зависимости системы элементов (из $\mathbf{R}^n$), содержащей линейно зависимые элементы. Утверждение о линейной зависимости системы $\boldsymbol{k}$ элементов (из $\mathbf{R}^n$) в случае, когда все они линейно выражаются через систему из $\boldsymbol{r}$ элементов ($\boldsymbol{r} < \boldsymbol{k}$). Теорема о ранге матрицы. Теорема Кронекера–Капелли.

Линейные пространства. Определение и свойства линейного пространства. Четыре утверждения о базисе. Теорема о невырожденности матрицы перехода. Теорема об изменении координат элемента при переходе к новому базису. Линейные подпространства. Критерий подпространства. Линейная оболочка элементов как подпространство. Пересечение подпространств как подпространство. Сумма подпространств как подпространство. Линейное пространство как прямая сумма подпространств. Линейный оператор. Нахождение координат элемента под действием на него линейного оператора. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису. Действия с линейными операторами. Матрицы суммы линейных операторов, произведения линейного оператора на число, произведения линейных операторов. Образ, ранг, ядро, дефект линейного оператора. Критерий собственного значения линейного оператора. Множество всех собственных векторов, отвечающих одному собственному значению как подпространство. Теорема о линейной независимости собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям.

Евклидовы пространства. Скалярное произведение в действительном Евклидовом пространстве. Неравенство Коши-Буняковского. Норма в Евклидовом пространстве. Угол между элементами. Утверждение о том, что ортонормированный базис является базисом. Скалярное произведение в ортонормированном базисе. Процесс ортогонализации. Ортогональное дополнение подпространства как подпространство. Евклидово пространство как прямая сумма своего подпространства и ортогонального дополнения к нему. Теорема об изоморфности Евклидовых пространств одной размерности. Скалярное произведение в комплексном Евклидовом пространстве и его свойства. Неравенство Коши–Буняковского в комплексном Евклидовом пространстве. Линейное пространство операторов. Утверждение о том, что в случае взаимно однозначного оператора любой элемент пространства является образом некоторого элемента. Критерий существования обратного оператора (взаимная однозначность). Критерий того, что ядро оператора состоит только из нулевого элемента (взаимная однозначность оператора). Критерий того, что ядро оператора состоит только из нулевого элемента (линейное пространство является образом оператора). Размерность пространства как сумма размерностей ядра и образа.

4. Тематический план

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий		
			лекции	практические занятия	самостоятельная работа
1	Теория матриц и определителей	25	8	12	5
2	Системы линейных уравнений	22	8	10	4
3.	Линейные пространства	18	8	6	4
4.	Евклидовы пространства	16	8	4	4
	Экзамен	27	–	–	27
	Итого	**108**	**32**	**32**	**44**

5. Виды образовательной деятельности

Занятия лекционного типа

Лекция 1. Матрицы и действия над ними. Свойства суммы матриц, произведения матрицы на число, произведения матриц.

Лекция 2. Определение определителя матрицы. Свойства определителя.

Лекция 3. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема о разложении определителя по строке.

Лекция 4. Теорема существования обратной матрицы. Утверждения о единственности матрицы, обладающей свойством единичной и о единственности обратной матрицы.

Лекция 5. Системы линейных уравнений. Основные элементарные преобразования линейной системы. Методы решения линейных систем с ненулевым главным определителем (метод Гаусса, матричный метод). Метод Крамера.

Лекция 6. Утверждение о существовании ненулевого решения однородной линейной системы в случае, когда количество неизвестных больше количества уравнений. Арифметическое n-мерное векторное пространство. Критерий линейной зависимости.

Лекция 7. Утверждение о линейной зависимости системы элементов (из $\mathbf{R^n}$), содержащей линейно зависимые элементы. Утверждение о линейной зависимости системы $\boldsymbol{k}$ элементов (из $\mathbf{R^n}$) в случае, когда все они линейно выражаются через систему из $\boldsymbol{r}$ элементов ($\boldsymbol{r < k}$).

Лекция 8. Теорема о ранге матрицы. Теорема Кронекера–Капелли.

Лекция 9. Определение и свойства линейного пространства. Четыре утверждения о базисе. Теорема о невырожденности матрицы перехода.

Лекция 10. Теорема об изменении координат элемента при переходе к новому базису. Линейные подпространства. Критерий подпространства. Линейная оболочка элементов как подпространство. Пересечение подпространств как подпространство. Сумма подпространств как подпространство. Линейное пространство как прямая сумма подпространств.

Лекция 11. Линейный оператор. Матрица линейного оператора. Нахождение координат элемента под действием на него линейного оператора. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.

Лекция 12. Действия с линейными операторами. Матрицы суммы линейных операторов, произведения линейного оператора на число, произведения линейных операторов. Образ, ранг, ядро, дефект линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.

Лекция 13. Скалярное произведение в действительном Евклидовом пространстве. Неравенство Коши–Буняковского. Норма в Евклидовом пространстве. Угол между элементами. Утверждение о том, что ортонормированный базис является базисом. Скалярное произведение в ортонормированном базисе.

Лекция 14. Процесс ортогонализации. Ортогональное дополнение подпространства как подпространство. Евклидово пространство как прямая сумма своего подпространства и ортогонального дополнения к нему. Теорема об изоморфности Евклидовых пространств одной размерности.

Лекция 15. Скалярное произведение в комплексном Евклидовом пространстве и его свойства. Неравенство Коши-Буняковского в комплексном Евклидовом пространстве. Линейное пространство операторов. Утверждение о том, что в случае взаимно однозначного оператора любой элемент пространства является образом некоторого элемента.

Лекция 16. Критерий существования обратного оператора (взаимная однозначность). Критерий того, что ядро оператора состоит только из нулевого элемента (взаимная однозначность оператора). Критерий того, что ядро оператора состоит только из нулевого элемента (линейное пространство является образом оператора). Размерность пространства как сумма размерностей ядра и образа.

Занятия семинарского типа (практические занятия)

Занятие 1. *Матрицы, действия над ними*

<u>Теоретические вопросы</u>

1. Определение суммы матриц, произведения матрицы на число, произведения матриц.
2. Свойства суммы матриц, произведения матрицы на число, произведения матриц.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 1.1 а)-г), 1.2 а)-г), 1.3, 1.5 а)-в), 1.7, 1.8 а)-г).

Задания для самостоятельной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 1.1 д)-ж), 1.2 д)-ж), 1.4, 1.5 г)-д), 1.6, 1.8 д)-ж).

Занятие 2. *Определение определителя*

Теоретические вопросы

1. Перестановка. Утверждение об изменении чётности перестановки при транспозиции.
2. Подстановки. Утверждение о сохранении чётности подстановки при различных её записях.
3. Определение определителя матрицы.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

А.М. Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 2.1 а)-в), е)-ж). Найти определители по определению.

Задания для самостоятельной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 2.1 г)-д), з)-и). Найти определители по определению.

Занятие 3. *Нахождение определителя по методу Гаусса*

Теоретические вопросы

1. Свойства определителя.
2. Метод Гаусса.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 2.1 а)-в), е)-ж). Найти определители по методу Гаусса. Задача 2.2. Задачи 2.3 а)-г). Найти определители по методу Гаусса.

Задания для самостоятельной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 2.1 г)-д), з)-и). Найти определители по методу Гаусса. Задачи 2.3 д)-з). Найти определители по методу Гаусса.

Занятие 4. *Нахождение определителя разложением по строке (столбцу).*

Теоретические вопросы

1. Миноры и алгебраические дополнения.
2. Теорема о разложении определителя по строке.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 2.1 а)-в), е)-ж). Найти определители разложением по строке (столбцу).

Задачи 2.3 а)-г). Найти определители разложением по строке (столбцу).

Задания для самостоятельной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 2.1 г)-д), з)-и). Найти определители разложением по строке (столбцу).

Задачи 2.3 д)-з). Найти определители разложением по строке (столбцу).

Занятие 5. *Ранг матрицы.*

Теоретические вопросы

1. Миноры и алгебраические дополнения.
2. Определение ранга матрицы.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 2.4 а), г), е)-з).

Задания для самостоятельной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 2.4 б)- в), д), и)-к).

Занятия 6. *Обратная матрица.*

Теоретические вопросы

1. Определение обратной матрицы.
2. Теорема существования обратной матрицы. Утверждения о единственности матрицы, обладающей свойством единичной и о единственности обратной матрицы.
3. Методы нахождения обратной матрицы.
4. Матричные уравнения.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 3.1 а)-б, д), ж). Найти обратную матрицу по формуле и приведением к единичной матрице. Задачи 3.2 а)-ж), 3.3.

Задания для самостоятельной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 3.1 в)-г, е). Найти обратную матрицу по формуле и приведением к единичной матрице. Задачи 3.2 з)-н).

Занятие 7. *Метод Гаусса решения линейных систем.*

Теоретические вопросы

1. Системы линейных уравнений. Основные элементарные преобразования линейной системы.
2. Методы решения линейных систем с ненулевым главным определителем.
3. Метод Гаусса.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 4.1 а), в)- д), ж).

Задания для самостоятельной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 4.1 б), е), з).

Занятие 8. *Метод обратных матриц решения линейных систем.*

Теоретические вопросы

1. Системы линейных уравнений. Основные элементарные преобразования линейной системы.
2. Методы решения линейных систем с ненулевым главным определителем.
3. Метод обратных матриц.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 4.2 а)-б), 4.3 в)-г).

Задания для самостоятельной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 4.2 в)-г), 4.3 е).

Занятие 9. *Правило Крамера решения линейных систем.*

Теоретические вопросы

1. Системы линейных уравнений. Основные элементарные преобразования линейной системы.
2. Методы решения линейных систем с ненулевым главным определителем.

3. Правило Крамера.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.
Задачи 4.4 а)-б), 4.5 в)-г).

Задания для самостоятельной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.
Задачи 4.4 в)-г), 4.5 е).

Занятия 10. *Решение линейных систем общего вида.*

Теоретические вопросы

1. Системы линейных уравнений. Основные элементарные преобразования линейной системы.
2. Теорема Кронекера-Капелли.
3. Приведение основной матрицы системы к «ступенчатому» виду.
4. Приведение расширенной матрицы системы к «ступенчатому» виду.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.
Задачи 5.1 а)-е).

Задания для самостоятельной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.
Задачи 5.1 ж)-к).

Занятия 11. *Решение линейных систем общего вида с помощью нахождения фундаментальной системы решений.*

Теоретические вопросы

1. Системы линейных уравнений. Основные элементарные преобразования линейной системы.
2. Теорема Кронекера-Капелли.
3. Линейная независимость строк.
4. Фундаментальная система решений.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 5.1 а)-е). Найти фундаментальную систему решений однородной системы. Составить общее решение данной системы.

Задания для самостоятельной работы

А.М.Зуев. Линейная алгебра. Задачник-практикум., Смоленск, СмолГУ, 2007.

Задачи 5.1 ж)-к). Найти фундаментальную систему решений однородной системы. Составить общее решение данной системы.

Занятие 12. *Определение и свойства линейного пространства.*

Теоретические вопросы

1. Определение линейного пространства.
2. Свойства линейного пространства.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Доказать, что множество всех матриц размера $n \times m$ с заданными естественным образом операциями суммы матриц и умножения матрицы на число образует линейное пространство.

2. Является ли линейным пространством множество квадратных матриц порядка n, если операции заданы следующим образом: $A \oplus B = A \cdot B$, $\lambda \odot A = \lambda A$?

3. Является ли линейным пространством множество диагональных матриц порядка n с нулевым определителем, если операции заданы следующим образом: $A \oplus B = A \cdot B$, $\lambda \odot A = \lambda A$?

4. Является ли линейным пространством множество всех вещественных функций, принимающих положительные значения на (-∞;+∞), если операции заданы следующим образом: $f(x)\oplus g(x)=f(x)\cdot g(x)$, $\lambda\odot f(x)= f^{\lambda}(x)$?

5. Является ли линейным пространством множество всех нечетных функций, заданных на [-1;1], если операции заданы следующим образом : $f(x)\oplus g(x)=f(x)+g(x)$, $\lambda\odot f(x)= \lambda f(x)$?

Задания для самостоятельной работы

1. Является ли линейным пространством множество всех целых чисел, если операции заданы следующим образом: $a\oplus b=a+b$, $\lambda\odot a=[\lambda a]$?

2. Является ли линейным пространством множество всех положительных чисел, если операции заданы следующим образом: $a\oplus b=a\cdot b$, $\lambda\odot a=a^{\lambda}$?

Занятие 13. *Линейная зависимость и независимость системы элементов линейного пространства.*

Теоретические вопросы

1. Определение линейной зависимости и независимости системы элементов линейного пространства.
2. Критерий линейной зависимости.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Исследовать на линейную зависимость систему элементов из линейного пространства матриц размера 1×3:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & -3 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & -1 & 10\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}1 & 4 & 3\end{pmatrix}$.

2. Исследовать на линейную зависимость систему элементов из линейного пространства матриц размера 2×2:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

3. Исследовать на линейную зависимость систему элементов из линейного пространства функций, определенных на (0;+∞): $f(x)=\ln x$, $g(x)=\sin x$, $h(x)=e^{x}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Исследовать на линейную зависимость систему элементов из линейного пространства функций, определенных на $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$: $f(x)=\mathrm{tg}^2\, x$, $g(x)=\frac{2}{\cos^2 x}$, $h(x)=3$.

2. Исследовать на линейную зависимость систему элементов из линейного пространства, заданного в задаче № 2 занятия №1: $a=2$, $b=7$.

Занятие 14. *Базис линейного пространства.*

Теоретические вопросы

1. Определение базиса линейного пространства.
2. Четыре утверждения о базисе.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Образует ли базис система элементов из линейного пространства матриц размера 1×3:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\end{pmatrix}$?

2. Образует ли базис система элементов из линейного пространства матриц размера 2×2:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$?

3. Найти какой-нибудь базис и определить размерность линейного пространства решений системы:

а) $\begin{cases}7x_1+2x_2-x_3-2x_4+2x_5=0\\ x_1-3x_2+x_3-x_4-x_5=0\\ 2x_1+5x_2+2x_3+x_4+x_5=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3+4x_4+x_5=0\\ 2x_1-x_2+3x_3+x_4-5x_5=0\\ x_1+3x_2-x_3-6x_4-x_5=0\end{cases}$.

Задания для самостоятельной работы

1. Образует ли базис система элементов из линейного пространства матриц размера 1×3: $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\end{pmatrix}$?

2. Образует ли базис система элементов из линейного пространства матриц размера 2×2:

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}, D=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$?

3. Найти какой-нибудь базис и определить размерность линейного пространства решений системы:

а) $\begin{cases}2x_1+x_2-x_3-x_4=0\\ 3x_1+x_2+x_3-x_4=0\end{cases}$; б) $\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3-x_4-x_5-2x_6=0\\ 4x_1+6x_2+8x_3-2x_4-2x_5-4x_6=0\end{cases}$.

Занятие 15. *Процесс ортогонализации.*

Теоретические вопросы

1. Алгоритм процесса ортогонализации.
2. Основные формулы процесса ортогонализации.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

С помощью процесса ортогонализации получите ортонормированный базис из следующих элементов: *(1,2,0,3), (2,0,-1,1), (1,1,1,1),(-1,0,1,0).*

Задания для самостоятельной работы

С помощью процесса ортогонализации получите ортонормированный базис из следующих элементов: *(2,0,3), (0,-1,1), (1,1,1).*

Занятие 16. *Скалярное произведение в комплексном Евклидовом пространстве.*

Теоретические вопросы

1. Скалярное произведение в комплексном Евклидовом пространстве и его свойства.
2. Неравенство Коши-Буняковского в комплексном Евклидовом пространстве.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

Выясните, являются ли следующие множества Евклидовыми пространствами. Если да, найдите норму указанных элементов *а, в* и *с*.

1. Рассмотрим линейное пространство комплексных матриц размера $n\times m$ с заданными естественным образом операциями суммы матриц и умножения матрицы на число. Скалярное произведение – определитель произведения двух матриц. *а* – единичная матрица, *в=а, с*— матрица из единиц.

2. Множество квадратных комплексных матриц порядка *n*, операции заданы следующим образом: $A\oplus B=A\cdot B$, $\lambda\odot A=\lambda A$. Скалярное произведение – определитель произведения двух матриц. *а* – единичная матрица, *в=а, с*—матрица из единиц.

3. Множество диагональных комплексных матриц порядка *n* с нулевым определителем, операции заданы следующим образом: $A\oplus B=A\cdot B$, $\lambda\odot A=\lambda A$. Скалярное произведение – определитель произведения двух матриц. *a* – единичная матрица, *в=a, c*—матрица из единиц.

Задания для самостоятельной работы

Выясните, являются ли следующие множества Евклидовыми пространствами. Если да, найдите норму указанных элементов *a, в* и *c*.

1. Множество всех комплексных чисел с целыми действительными и мнимыми частями, операции заданы следующим образом: $a\oplus b=a+b$, $\lambda\odot(a+ib)=[\lambda a]+i[\lambda b]$. Скалярное произведение *a* и *в равно ав. a=2+i, в=3-i, c=8.*

2. Множество всех комплексных чисел с положительными действительными и мнимыми частями, операции заданы следующим образом: $a\oplus b=a\cdot b$, $\lambda\odot(a+ib)=a^{\lambda}+ib$. Скалярное произведение *a* и *в равно ав. a=2+i, в=3-i, c=8.*

Самостоятельная работа

Текущая самостоятельная работа студента направлена на углубление и закрепление знаний студентов и развитие их практических умений. Она заключается в работе с лекционными материалами, поиске и обзоре литературы и электронных источников, информации по заданным темам курса, опережающей самостоятельной работе, в изучении тем, вынесенных на самостоятельную проработку, подготовке к лабораторным занятиям.

Самостоятельная внеаудиторная работа студентов состоит в проработке лекционного материала, составлении конспекта лекций по темам, вынесенным на самостоятельное изучение; выполнении домашних заданий.

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$. б) $\begin{vmatrix} 1 & -4 & 7 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \end{vmatrix}$. в) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$.

2. Найти произведение матриц:

а) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -3 & -5 & -4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -7 & -2 \\ 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. в) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 6 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 8 \\ 3 & -5 & -2 \\ 9 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.

3. Дана матрица А. Найти матрицу A^{-1}, обратную данной. Сделать проверку, вычислив произведение $A\cdot A^{-1}$.

а) $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. б) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. в) $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}$.

4. Систему линейных уравнений решить методом Гаусса (методом последовательного исключения неизвестных). Сделать проверку.

а) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-x_3=4, \\ 3x_1+x_2-4x_3=0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6, \\ 2x_1+3x_2-4x_3=20, \\ 3x_1-x_2-5x_3=6. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3=9, \\ 2x_1+5x_2-3x_3=4, \\ 5x_1+6x_2-2x_3=18. \end{cases}$

5. Найти фундаментальную систему решений однородной системы уравнений:

а)
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 10x_3 - 8x_3 = 0. \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ -3x_1 + 10x_2 + x_3 - 7x_4 = 0. \end{cases}$$

6. Найти собственные значения и собственные векторы линейного преобразования, заданного в некотором базисе матрицей.

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. б) $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$. в) $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Образец контрольной работы

1. Вычислить определитель, разложив его по элементам первой строки
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ a & b & c & d \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Найти ранг матрицы
$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Найти все матрицы второго порядка, квадрат которых равны единичной матрице.

4. Решить матричное уравнение:
$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

5. Решите линейную систему со следующей расширенной матрицей:
$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}.$$

Критерии оценивания контрольной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно решено каждое задание	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

1. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Вопросы для подготовки к экзамену

1. Матрицы. Операции над ними. Свойства операций.
2. Перестановки. Утверждение об изменении чётности перестановки при транспозиции.
3. Подстановки. Утверждение о независимости чётности подстановки от её формы записи.
4. Определитель матрицы. Формулы для определителей квадратных матриц первого, второго и третьего порядков.
5. Свойства определителя.
6. Теорема о разложении определителя по строке.
7. Теорема существования обратной матрицы.
8. Утверждения о единственности матрицы, обладающей свойством единичной и о единственности обратной матрицы.
9. Методы решения линейных систем с ненулевым главным определителем.
10. Теорема о существовании ненулевого решения однородной линейной системы.
11. Критерий линейной зависимости элементов из арифметического n-мерного векторного пространства.
12. Три утверждения о линейной зависимости.
13. Теорема о ранге матрицы.
14. Теорема Кронекера– Капелли.
15. Критерий существования ненулевого решения однородной линейной системы.
16. Определение и свойства линейного пространства.
17. Четыре утверждения о базисе линейного пространства.
18. Теорема о невырожденности матрицы перехода.
19. Теорема о преобразовании координат элемента при переходе к новому базису.
20. Критерий линейного подпространства.
21. Линейная оболочка элементов как подпространство.
22. Пересечение подпространств как подпространство.
23. Сумма подпространств как подпространство.
24. Критерий того, что линейное пространство является прямой суммой подпространств.
25. Теорема о нахождении координат образа элемента при действии на него линейного оператора.
26. Теорема о преобразовании матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.
27. Действия с линейными операторами как линейные операторы.
28. Матрицы линейных операторов, являющихся результатом действий с линейными операторами.
29. Образ линейного оператора как подпространство. Ядро линейного оператора как подпространство.
30. Критерий собственного значения линейного оператора.
31. Множество всех собственных векторов, отвечающих одному собственному значению как подпространство.
32. Теорема о линейной независимости собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям.

33. Скалярное произведение в действительном Евклидовом пространстве. Неравенство Коши–Буняковского.
34. Норма в Евклидовом пространстве. Угол между элементами.
35. Утверждение о том, что ортонормированный базис является базисом.
36. Скалярное произведение в ортонормированном базисе.
37. Процесс ортогонализации.
38. Ортогональное дополнение подпространства как подпространство.
39. Евклидово пространство как прямая сумма своего подпространства и ортогонального дополнения к нему.
40. Теорема об изоморфности Евклидовых пространств одной размерности.
41. Скалярное произведение в комплексном Евклидовом пространстве и его свойства.
42. Неравенство Коши-Буняковского в комплексном Евклидовом пространстве.
43. Линейное пространство операторов.
44. Утверждение о том, что в случае взаимно однозначного оператора любой элемент пространства является образом некоторого элемента.
45. Критерий существования обратного оператора (взаимная однозначность).
46. Критерий того, что ядро оператора состоит только из нулевого элемента (взаимная однозначность оператора).
47. Критерий того, что ядро оператора состоит только из нулевого элемента (линейное пространство является образом оператора).
48. Размерность пространства как сумма размерностей ядра и образа.

Образец экзаменационного билета

1.Матрицы. Операции над ними. Свойства операций.
2. Критерий существования ненулевого решения однородной линейной системы.
3. Решите матричное уравнение:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Критерии оценивания ответа на экзамене

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Теоретический вопрос	2 балла
2	Математическая модель	1 балл
3	Реализация решения задачи	2 балла

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Основная литература

1. Бурмистрова Е. Б. Линейная алгебра: учебник и практикум для академического бакалавриата / Е.Б. Бурмистрова, С.Г. Лобанов. – М.: Издательство Юрайт, 2019. – 421 с. – Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/425852.

2. Кремер Н.Ш. Линейная алгебра: учебник и практикум для вузов / Н.Ш. Кремер, М.Н. Фридман, И.М. Тришин; под редакцией Н.Ш. Кремера. – М.: Издательство Юрайт, 2021. – 422 с. – Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/468737.

7.2. Дополнительная литература

1. Зуев А М. Линейная алгебра. Задачник-практикум, Смоленск, СмолГУ, 2007.
2. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Линейная алгебра. МЦНМО, 2009
3. Кострикин А.И. Основы алгебры. М., 2001.
4. Куликов Л.Я. Алгебра и теория чисел. М., 2000.

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Электронная библиотека «Юрайт» https://urait.ru.
2. Математика. URL: http://www.intuit.ru/department/mathematics/;
3. Общероссийский математический портал MATH-NET URL: www.mathnet.ru;
4. Национальная платформа открытого образования www.opened.ru.

8. Материально-техническое обеспечение

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, оснащенная стандартной учебной мебелью, мультимедиапроектором, ноутбуком, колонками и интерактивной доской.

Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенная стандартной учебной мебелью.

Помещение для самостоятельной работы – компьютерный класс с доступом к сети «Интернет» и ЭИОС СмолГУ.

9. Программное обеспечение

Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), лицензия 66975477 от 03.06.2016 (бессрочно).

Обучающимся обеспечен доступ к ЭБС «Юрайт», а также доступ в электронную информационно-образовательную среду университета.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 03B6A3C600B7ADA9B742A1E041DE7D81B0
Владелец: Артеменков Михаил Николаевич
Действителен: с 04.10.2021 до 07.10.2022