Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»
Проректор по учебно-методической работе

______________________Ю.А. Устименко

«09» сентября 2021 г.

Рабочая программа дисциплины

Б1.О.16 Дифференциальные уравнения

Направление подготовки: **11.03.01 Радиотехника**
Направленность (профиль): **Радиоэлектронные системы и комплексы**
Форма обучения: очная
Курс – 2
Семестр – 3
Всего зачетных единиц – 3, часов – 108
Форма отчетности: экзамен – 3 семестр

Программу разработал: доктор физико-математических наук, профессор К.М. Расулов

Одобрена на заседании кафедры
«02» сентября 2021 г., протокол № 1

Смоленск
2021

1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Дифференциальные уравнения» относится к обязательной части учебного плана бакалавриата по направлению подготовки 11.03.01 Радиотехника (профиль: Радиоэлектронные системы и комплексы) и изучается в 3 семестре.

Для успешного освоения данной дисциплины необходимы компетенции, сформированные у обучающихся при изучении дисциплины «Математический анализ». Данная дисциплина необходима для дальнейшего изучения дисциплины «Уравнения математической физики».

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы
ОПК-1. Способен использовать положения, законы и методы естественных наук и математики для решения задач инженерной деятельности	**Знать**: фундаментальные законы природы, основные законы и методы математики. **Уметь**: применять законы и методы математики для решения задач теоретического и прикладного характера. **Владеть**: навыками использования основных теорий и методов математики при решении практических задач.

3. Содержание дисциплины

1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Понятие дифференциального уравнения. Порядок и решение обыкновенного дифференциального уравнения. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Задача Коши и теорема Коши-Пикара (о существовании и единственности решения) для уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$. Понятия общего, частного и особого решений дифференциального уравнения. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ и его решений. Дифференциальное уравнение первого порядка в симметричной форме. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли и Риккати. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Дифференциальное уравнение первого порядка, однородное относительно x и y. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Методы интегрирования дифференциальных уравнений вида $F(x,y,y')=0$. Уравнения Лагранжа и Клеро. Составление дифференциального уравнения первого порядка по его общему интегралу.

3. Понятие об устойчивости решений уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$. Теорема непрерывной зависимости решений уравнения от начальных условий. Понятие устойчивости решений уравнения $y'=f(x,y)$. Примеры.

4. Обыкновенные дифференциальные уравнения высшего порядка. Задача Коши и теорема Коши-Пикара для дифференциальных уравнений высшего порядка. Понятия общего и частного решений дифференциального уравнения высшего порядка. Некоторые классы дифференциальных уравнений высшего порядка, допускающие понижение порядка.

5. Линейные уравнения высших порядков. Понятие линейного дифференциального уравнения высшего порядка. Теорема Коши-Пикара для линейных уравнений высшего порядка. Построение общего решения для линейных однородных уравнений. Структура общего решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений. Отыскание частного решения линейного уравнения методом вариации произвольных постоянных. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Построение общего решения. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнение Эйлера.

6. Нормальные системы дифференциальных уравнений. Нормальная система дифференциальных уравнений. Задача Коши и теорема Коши-Пикара о существовании и единственности решения. Сведение дифференциальных уравнений n-го порядка к нормальной системе дифференциальных уравнений.

7. Системы линейных дифференциальных уравнений. Системы линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка. Фундаментальная система решений. Формула Остроградского-Лиувилля. Структура общего решения системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений. Метод Лагранжа. Матричный метод интегрирования линейных систем дифференциальных уравнений. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера.

8. Общие свойства решений и теория устойчивости для нормальных систем дифференциальных уравнений. Непрерывная зависимость решений от начальных условий и параметров. Первые интегралы нормальной системы дифференциальных уравнений. Симметричная форма систем дифференциальных уравнений. Автономные системы дифференциальных уравнений. Понятие устойчивости по Ляпунову. Простейшие типы точек покоя для системы двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Исследование устойчивости решений с помощью функций Ляпунова. Исследование на устойчивость по первому приближению.

4. Тематический план

№ п/п	Темы	Всего часов	Формы занятий		
			Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа
1.	Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка	14	2	8	4
2.	Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной	10	2	4	4
3.	Понятие об устойчивости решений уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$	8	2	2	4
4.	Обыкновенные дифференциальные уравнения высшего порядка	10	2	4	4
5.	Линейные уравнения высших порядков	8	2	2	4
6.	Нормальные системы дифференциальных уравнений	8	2	2	4
7.	Системы линейных дифференциальных уравнений	12	2	6	4
8.	Общие свойства решений и теория устойчивости для нормальных систем дифференциальных уравнений	13	2	6	5
	Экзамен	27	–	–	27
	Всего за семестр	**108**	**16**	**32**	**60**

5. Виды образовательной деятельности

Занятия лекционного типа

Лекция 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Понятие дифференциального уравнения. Порядок и решение обыкновенного дифференциального уравнения. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Задача Коши и теорема Коши-Пикара (о существовании и единственности решения) для уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$. Понятия общего, частного и особого решений дифференциального уравнения. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ и его решений. Дифференциальное уравнение первого порядка в симметричной форме. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Уравнения Бернулли и Риккати. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Дифференциальное уравнение первого порядка, однородное относительно x и y. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.

Лекция 2. Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной. Методы интегрирования дифференциальных уравнений вида $F(x,y,y')=0$. Уравнения Лагранжа и Клеро. Составление дифференциального уравнения первого порядка по его общему интегралу.

Лекция 3. Понятие об устойчивости решений уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$. Теорема непрерывной зависимости решений уравнения от начальных условий. Понятие устойчивости решений уравнения $y'=f(x,y)$. Примеры.

Лекция 4. Обыкновенные дифференциальные уравнения высшего порядка. Задача Коши и теорема Коши-Пикара для дифференциальных уравнений высшего порядка. Понятия общего и частного решений дифференциального уравнения высшего порядка. Некоторые классы дифференциальных уравнений высшего порядка, допускающие понижение порядка.

Лекция 5. Линейные уравнения высших порядков. Понятие линейного дифференциального уравнения высшего порядка. Теорема Коши-Пикара для линейных уравнений высшего порядка. Построение общего решения для линейных однородных уравнений. Структура общего решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений. Отыскание частного решения линейного уравнения методом вариации произвольных постоянных. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Построение общего решения. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами. Уравнение Эйлера.

Лекция 6. Нормальные системы дифференциальных уравнений. Нормальная система дифференциальных уравнений. Задача Коши и теорема Коши-Пикара о существовании и единственности решения. Сведение дифференциальных уравнений n-го порядка к нормальной системе дифференциальных уравнений.

Лекция 7. Системы линейных дифференциальных уравнений. Системы линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка. Фундаментальная система решений. Формула Остроградского-Лиувилля. Структура общего решения системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений. Метод Лагранжа. Матричный метод интегрирования линейных систем дифференциальных уравнений. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера.

Лекция 8. Общие свойства решений и теория устойчивости для нормальных систем дифференциальных уравнений. Непрерывная зависимость решений от начальных условий и параметров. Первые интегралы нормальной системы дифференциальных уравнений. Симметричная форма систем дифференциальных уравнений. Автономные системы дифференциальных уравнений. Понятие устойчивости по Ляпунову. Простейшие типы точек покоя для системы двух линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Исследование устойчивости решений с помощью функций Ляпунова. Исследование на устойчивость по первому приближению.

Занятия семинарского типа (практические занятия)

Занятие №1-2. Понятия дифференциального уравнения и его решения. Задача Коши и теоремы о существовании и единственности решения для дифференциальных уравнений 1-го порядка

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Дайте определение дифференциального уравнения. Когда дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*?
2. Что называется *порядком* дифференциального уравнения? Каков порядок дифференциального уравнения $yy' - 3\sin(xy''') = 0$?
3. Каков общий вид обыкновенного дифференциального уравнения *n*-го порядка?
4. Дайте определение *решения* обыкновенного дифференциального уравнения *n*-го порядка.
5. Что называется *интегральной кривой* обыкновенного дифференциального уравнения?
6. Сколько различных решений, определенных на одном и том же промежутке $\langle a, b \rangle$, может иметь заданное дифференциальное уравнение?
7. Сформулируйте задачу Коши для дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.
8. В чем состоит геометрический смысл задачи Коши для дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?
9. Объясните смысл следующего предложения: «Функция $f(x, y)$ в некотором прямоугольнике $\Pi\{(x_0, y_0); a, b\}$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y».
10. Приведите пример функции двух переменных $f(x, y)$, непрерывной по переменной y в некотором прямоугольнике $\Pi\{(x_0, y_0); a, b\}$, но не удовлетворяющей в нем условию Липшица по y.
11. Приведите пример функции двух переменных $f(x, y)$, непрерывной в некотором прямоугольнике $\Pi\{(x_0, y_0); a, b\}$ и удовлетворяющей в нем условию Липшица по y, но не имеющей в этом прямоугольнике ограниченной частной производной по y.
12. Сформулируйте и докажите теорему Коши-Пикара о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.
13. Сформулируйте теорему Коши о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.
14. Приведите пример задачи Коши, для которой в некотором прямоугольнике $\Pi\{(x_0, y_0); a, b\}$ выполняются условия теоремы Коши-Пикара, но не выполняются условия теоремы Коши.
15. Объясните смысл следующего предложения: «Решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения может быть продолжено вправо (влево)».
16. Какое решение дифференциального уравнения называется *полным*?
17. Что называется *областью единственности решения* дифференциального уравнения?

18. Дайте определение *общего решения* (*общего интеграла*)дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$.

19. Что называется *частным решением* (*частным интегралом*)дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$?

20. Дайте определение *особого решения* обыкновенного дифференциального уравнения.

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1) Какие из следующих уравнений являются *дифференциальными:*

а) $x^2-5y=0$; б) $3y''+y=0$;

в) $\frac{\partial\phi(x,y)}{\partial x}-7\frac{\partial^2\phi(x,y)}{\partial x\partial y}=0$; г) $\Phi(x,y,z)=0$?

2) Проверьте, являются ли следующие функции решениями для указанного дифференциального уравнения (C – произвольная постоянная):

а) $y=\sqrt{x^2+C}$, $yy'=x$; б) $y=x\int\limits_0^x\frac{\sin t}{t}dt$, $xy'=y+x\sin x$;

в) $y=x+Ce^y$, $(x-y+1)y'=1$; г) $\begin{cases}x=t\ln t,\\ y=t^2(2\ln t+1),\end{cases}$ $y'\ln\frac{y'}{4}=4x$.

3) Пусть $y=\varphi(x)$ – интегральная кривая дифференциального уравнения $y'=y\cos(x-1)+\ln x$, проходящая через точку $P(1,3)$. Найдите значения $\varphi'(1),\varphi''(1)$.

4) Докажите, что функция $f(x,y)=y^2\sin x+e^x$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y в прямоугольнике $\Pi\{(0,0);a,b\}$ и найдите наименьшую из постоянных Липшица для данной функции (здесь a и b - положительные постоянные числа).

5) Докажите, что дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx}=2|y|^{\frac{1}{2}}$ имеет более одного решения, удовлетворяющего начальному условию $y\big|_{x=x_0}=0$, где x_0 – фиксированное действительное число. Какое из условий теоремы Коши-Пикара не выполняется для рассматриваемой здесь задачи Коши?

6) Составьте интегральное уравнение, эквивалентное следующей задаче Коши: $y'=2x-y$, $y\big|_{x=0}=\pi$.

7) Для данных дифференциальных уравнений выделите области, в которых выполняются условия теоремы Коши о существовании и единственности решения:

а) $y'=x^2+y^2-9$; б) $y'=y+3\sqrt[3]{y}$; в) $y'=\frac{y}{\cos x}$.

8) Проверьте, является ли семейство функций $y=x\left(1-\frac{1}{\ln x+C}\right)$, где C – произвольная постоянная, *общим решением* дифференциального уравнения $y'=\frac{y^2}{x^2}-\frac{y}{x}+1$ в полуплоскости $G_+=\{(x,y)\in R^2\,|\,x>0,\ -\infty<y<+\infty\}$. Будет ли функция $y=x$ *особым решением* данного дифференциального уравнения?

9) Зная общие решения (общие интегралы) дифференциальных уравнений, найдите их частные решения (частные интегралы), удовлетворяющие заданным начальным условиям:

а) $y=Cx^2$, $y\big|_{x=2}=3$;

б) $\ln^2(x+y)+y\ln x=C$, $y\big|_{x=1}=e-1$; здесь e - основание натурального логарифма.

10) Известно, что семейство функций $y = x + \sqrt{(x+C)^3}$, где C – произвольная постоянная, является *общим решением* дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{3}{2}(y-x)^{1/3}$ в полуплоскости $G_1 = \{(x,y) \in R^2 \mid y > x\}$. Будет ли функция $y = x$ *особым решением* данного дифференциального уравнения?

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1) Какие из следующих уравнений являются *дифференциальными:*

а) $y = xy' - (y')^2$; б) $3y^2 + y = 0$;

в) $\frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi(x,y)}{\partial y^2} = 0$; г) $x^2 + y^2 = 1$?

2) Проверьте, являются ли для заданного дифференциального уравнения следующие функции его решениями (C – произвольная постоянная):

а) $y^2 - x^2 - 2xyy' = 0, \quad y = \sqrt{2Cx - x^2}$;

б) $y' - y = e^{x+x^2}, \quad y = e^x \int_0^x e^{t^2} dt + Ce^x$; в) $xy' = y \cdot tg(\ln y), \quad y = e^{\arcsin Cx}$.

3) Проверьте, удовлетворяет ли условию Липшица по переменной y функция $q(x,y) = (2 + \cos x) \cdot y^{\frac{2}{3}} - \sin x$ в прямоугольнике $П\{(0,0); a, b\}$, где a и b-положительные постоянные числа.

4) Верно ли, что существует единственное решение дифференциального уравнения $y' = x + y$, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=1} = 5$? Ответ обосновать.

5) Составьте интегральное уравнение, эквивалентное следующей задаче Коши: $y' = y^2 + xy + x^2, \quad y|_{x=0} = 1$.

6) Для данных дифференциальных уравнений выделите области, в которых выполняются условия теоремы Коши о существовании и единственности решения:

а) $y' = \sqrt{x - 4y^2}$; б) $y' = y \cdot tgx$.

7) Зная общие решения (общие интегралы) дифференциальных уравнений, найдите их частные решения (частные интегралы), удовлетворяющие заданным начальным условиям:

а) $x^2 + 2y^2 = C, \quad y|_{x=-1} = 5$; б) $y = \int_0^x \frac{e^t}{t} dt + C, \quad y|_{x=0} = -5.$

8) Докажите, что дифференциальное уравнение $y' = \sqrt{1 - y^2}$ имеет по крайней мере два решения, удовлетворяющих начальному условию $y|_{x=0} = 1$. Найдите особые решения данного уравнения.

Занятие №3. Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, однородные относительно *x* и у

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Когда дифференциальное уравнение называется интегрируемым в квадратурах?
2. Какое дифференциальное уравнение 1-го порядка называется уравнением с разделенными переменными?
3. Каков общий интеграл уравнения с разделенными переменными?
4. Какое дифференциальное уравнение 1-го порядка называется уравнением с разделяющимися переменными?
5. Каков общий интеграл уравнения с разделяющимися переменными?

6. Может ли уравнение с разделяющимися переменными иметь *особые решения*? Почему?

7. Когда функция $f(x,y)$ называется *однородной функцией степени n в области* $D \subset \boldsymbol{R}^2$?

8. Какое дифференциальное уравнение называется *однородным относительно* xиy?

9. Каков общий метод решения дифференциального уравнения, однородного относительно xиy?

10. Могут ли уравнения, *однородные относительно x* и *y,* иметь *особые решения*?

11. Каким образом уравнение вида $y' = f(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2})$ приводится к однородному?

12. Приведите пример уравнения, которое приводится к однородному путем замены $y = z^m$, $m \in \boldsymbol{N}$.

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1) Найдите общий интеграл уравнения $xdx + (1+y)dy = 0$.

2) Найдите общее и особые решения дифференциального уравнения $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0$.

3) Найдите частное решение уравнения $y' = 2\sqrt{y}\ln x$, удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=e} = 1$.

4) Решите уравнение $y' = \sin(x-y)$, используя замену переменной.

5) Решите дифференциальные уравнения:

а) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$; б) $(y + \sqrt{x^2+y^2})dx - xdy = 0$.

6) Выделите интегральные кривые, проходящие через точку М(1; 1), для следующих уравнений: а) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$; б) $xy' = x\sin\frac{y}{x} + y$.

7) Решите дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$.

8) Найдите кривую, для которой площадь Q фигуры, ограниченной искомой кривой, осью OX и двумя прямыми, параллельными оси OY и пересекающими ось абсцисс в точках *0* и *x*, является функцией от *y* вида: $Q = a^2 \ln\frac{y}{a}$, $a > 0$.

9) Решите дифференциальное уравнение $(2x + y + 1)dx + (2y - x - 1)dy = 0$.

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1) Найдите общее и особые решения дифференциальных уравнений:

а) $ye^{2x}dx - (1 + e^{2x})dy = 0$; б) $yy' = \frac{1-2x}{y}$.

2) Найдите частное решение дифференциального уравнения $y'tgx - y = 1$, удовлетворяющее начальному условию $y\big|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1$.

3) Решите дифференциальные уравнения:

а) $xy'\cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x$; б) $y' = \frac{y}{x}\ln\frac{y}{x}$.

4) Найдите интегральную кривую уравнения $xydy - y^2dx = (x+y)^2 e^{-\frac{y}{x}}dx$, проходящую через точку М(1; 1).

5) Найдите интегральную кривую уравнения $(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy=0$, проходящую через точку P(0; 2).

6) Найдите кривую, проходящую через точку M(-1; 1), если угловой коэффициент касательной к ней в любой точке равен квадрату ординаты точки касания.

7) Решите дифференциальное уравнение $(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0$.

Занятие №4. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Уравнения Бернулли и Риккати

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Какое дифференциальное уравнение называется интегрируемым в квадратурах?
2. Каков вид общего решения дифференциального уравнения $y'=Q(x)$?
3. Какое дифференциальное уравнение называется линейным?
4. Каким приемом линейное дифференциальное уравнение $y'+P(x)y=Q(x)$ можно привести к уравнению, явно не содержащему искомой функции?
5. Каков вид общего решения *однородного* линейного дифференциального уравнения (ЛДУ) $y'+P(x)y=0$?
6. Каков вид общего решения *неоднородного* ЛДУ $y'+P(x)y=Q(x)$?
7. Изложите способ решения *линейного неоднородного* дифференциального уравнения $y'+P(x)y=Q(x)$, который принято называть *методом вариации произвольной постоянной*.
8. Почему уравнение $y'+P(x)y=Q(x)$ относится к уравнениям, разрешимым в квадратурах?
9. Какова структура общего решения линейного *неоднородного* уравнения $y'+P(x)y=Q(x)$?
10. Сформулируйте теорему Коши для ЛДУ. Могут ли ЛДУ иметь особые решения?
11. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением Бернулли?
12. Какие способы решения уравнения Бернулли Вы знаете?
13. Каков вид общего интеграла уравнения Бернулли?
14. Может ли уравнение Бернулли иметь особые решения?
15. Запишите общий вид уравнения Риккати. Каким образом уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли?

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1) Найдите общие решения дифференциальных уравнений:

а) $xy'+2y=x^2$; б) $y'+y=\cos x$.

2) Найдите частные решения следующих дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

а) $y'-y\,tgx=\frac{1}{\cos x}$, $y\big|_{x=0}=1$; б) $y'+x^2y=x^2$, $y\big|_{x=2}=1$.

3) Общее решение некоторого дифференциального уравнения имеет вид: $y=C\varphi(x)+\psi(x)$, где C - произвольная постоянная, φ,ψ - конкретные функции от x. Докажите, что дифференциальное уравнение, задающее любое семейство кривых этого вида, есть линейное уравнение.

4) Решите уравнение, линейное относительно переменной x: $y'=\frac{1}{x\cos y+\sin 2y}$.

5) За сколько минут тело, нагретое до 100°, охладится до 25° в комнате с температурой 20°, если до 60° оно охлаждается за 10 минут? (По закону Ньютона скорость охлаждения пропорциональна разности температур).

6) Сила тока i в цепи с сопротивлением R, самоиндукцией L и напряжением $U(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $L\frac{di}{dt}+Ri=U(t)$. Решите это уравнение, считая R, L постоянными, а $U(t)=kt \quad (k>0)$; начальное условие $i(0)=0$.

7) Решите дифференциальное уравнение $y'+2xy=2x^3y^3$.

8) Найдите общее и особые решения дифференциального уравнения $xy'-4y=x^2\sqrt{y}$.

9) Найдите общее решение дифференциального уравнения $xy'-(2x+1)y+y^2=-x^2$, имеющего частное решение вида $y=ax+b$.

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1) Найдите общее решение дифференциального уравнения $y'+2xy=2xe^{-x^2}$.

2) Найдите частные решения следующих дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

а) $xy'-\frac{y}{x+1}=x, \quad y\big|_{x=1}=1;$ б) $y'-2xy=0, \quad y\big|_{x=0}=5$.

3) Решите уравнение, линейное относительно переменной x:

$$(x-2xy-y^2)y'+y^2=0.$$

4) Закон распада радия состоит в том, что скорость распада пропорциональна наличному количеству радия. Известно, что половина его первоначального запаса распадается по истечении 1600 лет. Определите количество нераспавшегося радия по истечении 100 лет, если первоначальное его количество равно 1 *кг*.

5) Найдите общее и особые решения дифференциального уравнения $xy'+y=y^2\ln x$.

6) Решите дифференциальное уравнение $y'-2xy+y^2=5-x^2$, имеющее частное решение вида $y=ax+b$.

Занятие №5-6. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, неразрешенные относительно производной.

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Какие методы решения уравнений неразрешенных относительно производной вы знаете?
2. Как решаются уравнения вида $F(y')=0$?
3. Опишите метод введения параметра применительно к уравнениям вида $F(x,y')=0$.
4. Опишите метод введения параметра применительно к уравнениям вида $F(y,y')=0$.
5. Расскажите о методе введения параметра в общем случае для уравнения вида $F(x,y,y')=0$.
6. Как решается уравнение вида $y=f(x,y')$?
7. Как решается уравнение вида $x=f(y,y')$?
8. Какое уравнение называется уравнением Лагранжа? Как оно интегрируется?
9. Какое уравнение называется уравнением Клеро? Как оно интегрируется?

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1) Найти все решения данных дифференциальных уравнений.

а) $(y')^2-y^2=0$; б) $y(y')^3+x=1$; в) $x(y')^2-2yy'+x=0$

2) Решить дифференциальные уравнения методом введения параметра.

а) $x=(y')^3+y'$; б) $y=(y')^2+2(y')^3$; в) $(y')^2-(y')^3=y^2$; г) $2xy'-y=y'\ln yy'$

3) Решить уравнения Лагранжа и Клеро.

а) $y=2xy'-4(y')^3$; б) $y=x(y')^2-2(y')^3$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1) Найти все решения данных дифференциальных уравнений.

а) $8(y')^3=27y$; б) $(y')^2-4y^3=0$

2) Решить дифференциальные уравнения методом введения параметра.

а) $x=y'\sqrt{(y')^2+1}$; б) $y=\ln(1+(y')^2)$

3) Решить уравнения Лагранжа и Клеро.

а) $y+xy'=4\sqrt{y'}$

Занятие №7. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Каким образом решатся простейшее уравнение вида $y^{(n)}=f(x)$?
2. Как достигается понижение порядка в уравнении не содержащим неизвестную функцию *y*?
3. Как достигается понижение порядка в уравнении не содержащим независимую переменную *x*?
4. Какие еще способы понижения порядка вам известны?

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1) Решить дифференциальные уравнения.

а) $2xy'\cdot y''=(y')^2-1$; б) $(y')^2+2yy''=0$; в) $y''-xy'''+(y''')^3=0$;

г) $(y'+2y)y''=(y')^2$; д) $xy''=y'+x\sin\dfrac{y'}{x}$

2) Решить уравнения, преобразовав их к такому виду, чтобы обе части уравнения являлись полными производными.

а) $yy'''+3y'y''=0$; б) $yy''+(y')^2=1$; в) $xy''=2yy'-y'$

3) Решить уравнения, понизив их порядок, пользуясь их однородностью.

а) $xyy''-x(y')^2=yy'$; б) $x^2yy''+(y')^2=0$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1) Решить дифференциальные уравнения.

а) $x^2y''=(y')^2$; б) $y'''=(y'')^2$; в) $yy''+y=(y')^2$

2) Решить уравнения, преобразовав их к такому виду, чтобы обе части уравнения являлись полными производными.

а) $yy''=y'(y'+1)$; б) $y'\cdot y'''=2(y'')^2$

3) Решить уравнения, понизив их порядок, пользуясь их однородностью.

а) $xyy''+x(y')^2=2yy'$

Занятие №8-9. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка. Фундаментальная система решений. Структура общего решения. Метод вариации произвольных постоянных

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Каков общий вид линейного дифференциального уравнения 2-го порядка?
2. Сформулируйте задачу Коши для линейных уравнений 2-го порядка.
3. Могут ли у линейных уравнений быть особые решения? Почему?

4. На каком множестве определены решения однородного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка?

5. Что называется фундаментальной системой решений линейного однородного уравнения 2-го порядка?

6. Что называется определителем Вронского системы функций?

7. Какая система функций называется линейно независимой (зависимой) на промежутке (*a, b*)?

8. Какова структура общего решения однородного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка?

9. Какова структура общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения?

10. В чём состоит метод вариации произвольных постоянных интегрирования неоднородного линейного дифференциального уравнения?

11. Дайте определение аналитической (голоморфной) функции в точке.

12. Как можно сформулировать теорему Коши для линейных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами?

13. В чем суть метода интегрирования линейных дифференциальных уравнений при помощи степенных рядов?

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1) Исходя из определения, докажите, что следующая система функций линейно независима на $(-\infty; +\infty)$: $y_1 = e^{2x}\sin 3x;\ y_2 = e^{2x}\cos 3x$.

2) Исследуйте, являются ли данные три функции линейно зависимыми или нет: $y_1 = x;\ y_2 = 2x;\ y_3 = x^2$.

3) Покажите, что функции $y_1 = \begin{cases} x^2, -1 \le x \le 0, \\ 0,\ 0 < x \le 1 \end{cases}$ и $y_2 = \begin{cases} 0, -1 \le x \le 0, \\ x^2,\ 0 < x \le 1 \end{cases}$ линейно независимы, а соответствующий определитель Вронского тождественно равен нулю.

4) Составьте линейное дифференциальное уравнение по заданной фундаментальной системе решений: $e^x,\ xe^x$.

5) Покажите, что система функций e^{2x}, e^{-3x} является фундаментальной для уравнения $y'' + y' - 6y = 0$, и запишите соответствующее общее решение этого уравнения.

6) Методом степенных рядов решите задачу Коши:

$$y'' + \frac{1}{1-x}y = x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1) Найдите определитель Вронского для системы функций: $\frac{1}{x},\ e^{\frac{1}{x}}$.

2) Покажите, что функции линейно независимы, а соответствующий определитель Вронского тождественно равен нулю. Постройте графики этих функций.

$$y_1 = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & \frac{1}{2} < x \le 1, \end{cases} \qquad y_2 = \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < x \le 1, \end{cases}$$

3) Составьте однородное линейное дифференциальное уравнение, если задана его фундаментальная система решений: $y_1 = e^{-x},\ y_2 = e^x$.

4) Методом степенных рядов найдите общее решение уравнения $y'' + xy = 0$.

Занятие №10. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Каков общий вид линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами?

2. В какой области выполняются условия теоремы Коши (о существовании и единственности решения) для однородных линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами?

3. На каком множестве определены решения однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами?

4. Как выглядит характеристическое уравнение для дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$, где p, q – фиксированные числа?

5. Каков вид общего решения дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$ с постоянными коэффициентами, если дискриминант $D = p^2 - 4q$ характеристического уравнения:

1) положительное число;

2) равен нулю;

3) отрицательное число?

6. В чем состоит идея *метода неопределенных коэффициентов* при решении неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами?

7. В каких случаях неоднородные линейные дифференциальные уравнения удобнее решать *методом неопределенных коэффициентов*, чем *методом вариации произвольных постоянных*?

8. В каком виде можно искать частное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами вида:

а) $y'' + py' + qy = e^{ax} P_m(x)$; (*)

б) $y'' + py' + qy = e^{ax}\left[P_m(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right]$? (**)

9. Какова структура общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами вида (*) (вида (**)) ?

10. Каково дифференциальное уравнение свободных (вынужденных) колебаний груза в среде без сопротивления?

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1) Составьте линейное однородное дифференциальное уравнение, зная его характеристическое уравнение: $k^2 + 3k + 2 = 0$.

2) Зная корни характеристического уравнения $k_1 = 3 - 2i,\ k_2 = 3 + 2i$, найдите общее решение однородного уравнения.

3) Найдите частное решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$ при условии, что $y(0) = 3,\ y'(0) = -1$.

4) Найдите частное решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(\pi) = \pi e^{\pi}$, $y'(\pi) = e^{\pi}$.

5) Определите вид частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения, если известны корни его характеристического уравнения $k_1 = -2$, $k_2 = 2$ и правая часть $f(x) = 5xe^{2x}$.

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1) Составьте линейное однородное дифференциальное уравнение, зная его характеристическое уравнение: $3k^2 - k - 2 = 0$.

2) Решите дифференциальное уравнение $y'' + y' - 2y = 0$.

3)Найдите частное решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 7$, $y'(0) = 8$.

4) Составьте общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения вида $5y'' - 6y' + 5y = f(x)$, для чего предварительно найдите его частное решение либо подбором, либо методом вариации произвольных постоянных, если $f(x) = e^{\frac{3}{5}x}\cos x$.

5) Определите вид частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения, если известны корни его характеристического уравнения $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$ и правая часть $f(x) = A\sin 2x + B\cos 2x$, где $A = const$, $B = const$.

Занятие №11. Понятие нормальной системы дифференциальных уравнений. Основные приемы решения.

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Дайте определение системы дифференциальных уравнений.
2. Какая система дифференциальных уравнений называется нормальной?
3. Каким образом обыкновенное дифференциальное уравнение n-го порядка сводится к нормальной системе дифференциальных уравнений?
4. Что называется решением системы дифференциальных уравнений?
5. Как ставится задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений?
6. Сколько решений может иметь задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений?
7. Сформулируйте теорему Коши-Пикара для нормальной системы дифференциальных уравнений.
8. Расскажите о решении системы дифференциальных уравнений методом исключения.
9. Расскажите о решении системы дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций.

II. Задания для аудиторной работы студентов.

Решить систему дифференциальных уравнений.

а) $\begin{cases} y' = \dfrac{x}{z} \\ z' = -\dfrac{x}{y} \end{cases}$ б) $\begin{cases} y' = y^2 z \\ z' = \dfrac{z}{x} - yz^2 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2zy' = y^2 - z^2 + 1 \\ z' = z + y \end{cases}$

г) $\dfrac{dx}{y} = \dfrac{dy}{x} = \dfrac{dz}{z}$ д) $\dfrac{dx}{y-x} = \dfrac{dy}{x+y+z} = \dfrac{dz}{x-y}$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

Решить систему дифференциальных уравнений.

а) $\begin{cases} y' = \dfrac{y^2}{z-x} \\ z' = y+1 \end{cases}$ б) $\begin{cases} y' = \dfrac{z}{x} \\ z' = \dfrac{z(y+2z-1)}{x(y-1)} \end{cases}$ в) $\dfrac{dx}{2y-z} = \dfrac{dy}{y} = \dfrac{dz}{z}$

г) $\dfrac{dx}{y+z} = \dfrac{dy}{x+z} = \dfrac{dz}{x+y}$ д) $\dfrac{dx}{x(y+z)} = \dfrac{dy}{z(z-y)} = \dfrac{dz}{y(y-z)}$

Занятие №12. Однородные системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Дайте определение системы линейных дифференциальных уравнений.
2. Какую линейную систему называют однородной (неоднородной)?
3. Что называют матрицей системы линейных уравнений?
4. Запишите систему линейных дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме.
5. Дайте определение фундаментальной системы решений для системы линейных дифференциальных уравнений.
6. Какова структура общего решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений?
7. Сформулируйте определение Вронскиана системы линейных дифференциальных уравнений.
8. Как составляется характеристическое уравнение для однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами?
9. Расскажите о методе Эйлера решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

II. Задания для аудиторной работы студентов.

Решить систему линейных дифференциальных уравнений.

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + x + 5y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} - x - y = 0 \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + z - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2x - y \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x - y - z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = x - y + 2z \end{cases}$ д) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + 2z - y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2z \\ \dfrac{dz}{dt} = y - 2x - z \end{cases}$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

Решить систему линейных дифференциальных уравнений.

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 4x \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - 5x - 3y = 0 \\ \dfrac{dy}{dt} + y + 3x = 0 \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + y + z \\ \dfrac{dz}{dt} = 4x - y + 4z \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - z \\ \dfrac{dz}{dt} = 2y + 3z - x \end{cases}$

Занятие №13. Неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Какова структура общего решения неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений?
2. Какие способы поиска частного решения системы вы знаете?
3. Расскажите подробно о методе вариации произвольных постоянных применительно к системам линейных уравнений.
4. Расскажите о методе подбора частного решения в линейной системе по виду неоднородности.
5. Каковы особенности метода подбора частного решения для системы линейных уравнений по сравнению с одним уравнением?

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1. Решить систему линейных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + tg^2 t - 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = -x + tgt \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + \dfrac{1}{\cos t} \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$

2. Решить систему линейных дифференциальных уравнений, применяя метод подбора частного решения.

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y - 5\cos t \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 4x + y - e^{2t} \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 2x \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^{4t} \end{cases}$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1. Решить систему линейных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y - x \\ \dfrac{dy}{dt} = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1} \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y + 15e^{t}\sqrt{t} \end{cases}$

2. Решить систему линейных дифференциальных уравнений, применяя метод подбора частного решения.

а) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 2e^{t} \\ \dfrac{dy}{dt} = x + t^{2} \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y \\ \dfrac{dy}{dt} = y - 2x + 18t \end{cases}$

Занятие №14. Матричный метод интегрирования систем дифференциальных уравнений

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Запишите систему линейных дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме.
2. Что называют показательной функцией e^{A} матрицыA?
3. Каковы основные свойства матрицы e^{A}?
4. Как находится матрица A^{n}?
5. Как находится производная матрицы A^{n}?
6. Каким образом производится матричное интегрирование однородной системы линейных дифференциальных уравнений?
7. Как матричным методом найти частное решение неоднородной линейной системы дифференциальных уравнений?

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1. Найти показательную функцию e^{A} данной матрицы A.

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ б) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Решить систему уравнений, записанную в векторно-матричной форме $\dot{X} = AX$, где X – векторA – заданная матрица.

а) $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ б) $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

в) $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ г) $\dot{X} = AX$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1. Найти показательную функцию e^{A} данной матрицы A.

а) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

2. Решить систему уравнений, записанную в векторно-матричной форме $\dot{X}=AX$, где X – векторA – заданная матрица.

а) $\dot{X}=AX$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$б) $\dot{X}=AX$, $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

в) $\dot{X}=AX$, $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Занятие №15. Понятие устойчивости решения системы дифференциальных уравнений. Фазовый портрет системы двух линейных уравнений

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Дайте определение фазового пространства системы.
2. Как связан график движения заданного системой с траекторией движения?
3. Сформулируйте определение устойчивости решения системы по Ляпунову.
4. При каких условиях решение системы называется асимптотически устойчивым?
5. Каким образом исследование устойчивости произвольного решения системы сводится к исследованию устойчивости нулевого решения системы?
6. Каким образом исследуется на устойчивость нулевое решение однородной системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами?
7. Дайте классификацию нулевой точки покоя линейной системы двух однородных уравнений с постоянными коэффициентами. Изобразите соответствующие фазовые портреты.

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1. Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову, выяснить устойчивость решения данных уравнений с указанными начальными условиями.

а) $3(t-1)x'=x \quad x(2)=0$; б) $x'=t-x \quad x(0)=1$

2. Начертить на плоскости xy траектории данных систем вблизи точки (0,0) и по чертежу выяснить, устойчиво ли нулевое решение.

а) $\begin{cases} x'=-x \\ y'=-2y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'=-x \\ y'=y \end{cases}$

в) $\begin{cases} x'=y \\ y'=-\sin x \end{cases}$ г) $\begin{cases} x'=-y\cos x \\ y'=\sin x \end{cases}$

3. Классифицировать нулевое решение системы.

а) $\begin{cases} x'=3x \\ y'=2x+y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x'=2x-y \\ y'=x \end{cases}$

в) $\begin{cases} x'=-2x-5y \\ y'=2x+2y \end{cases}$ г) $\begin{cases} x'=x \\ y'=2x-y \end{cases}$

д) $\begin{cases} x'=3x-2y \\ y'=4x-y \end{cases}$ е) $\begin{cases} x'=y \\ y'=y-2x \end{cases}$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1. Пользуясь определением устойчивости по Ляпунову, выяснить устойчивость решения данных уравнений с указанными начальными условиями.

а) $x' = 4x - t^2 x \quad x(0) = 0$

б) $2tx' = x - x^3 \quad x(1) = 0$

2. Начертить на плоскости xy траектории данных систем вблизи точки (0,0) и по чертежу выяснить, устойчиво ли нулевое решение.

а) $\begin{cases} x' = x \\ y' = 2y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = -y \\ y' = 2x^3 \end{cases}$

3. Классифицировать нулевое решение системы.

а) $\begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 2y - 3x \\ y' = x - 4y \end{cases}$

в) $\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -x - y \end{cases}$ г) $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = 2x - y \end{cases}$

Занятие №16. Исследование на устойчивость по первому приближению. Метод функции Ляпунова

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Какую систему называют системой первого приближения для данной нормальной системы дифференциальных уравнений?
2. Сформулируйте теорему Ляпунова об исследовании на устойчивость по первому приближению.
3. Что называют производной от функции $V(t, x_1, x_2, \ldots x_n)$ в силу нормальной системы дифференциальных уравнений?
4. Дайте определение функции Ляпунова.
5. Сформулируйте теорему Ляпунова об устойчивости нулевого решения методом функции Ляпунова.
6. В каком виде часто удобно искать функцию Ляпунова?
7. Сформулируйте теорему о неустойчивости.

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1. С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение следующих систем:

а) $\begin{cases} x' = 2xy - x + y \\ y' = 5x^4 + y^3 + 2x - 3y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = e^{x+2y} - \cos 3x \\ y' = \sqrt{4 + 8x} - 2e^y \end{cases}$

в) $\begin{cases} x' = \ln(3e^y - 2\cos x) \\ y' = 2e^x - \sqrt[3]{8 + 12y} \end{cases}$ г) $\begin{cases} x' = tg(z - y) - 2x \\ y' = \sqrt{9 + 12x} - 3e^y \\ z' = -3y \end{cases}$

2. Исследовать при каких значениях параметров *а* и *в* асимптотически устойчиво нулевое решение систем:

а) $\begin{cases} x' = ax - 2y + x^2 \\ y' = x + y + xy \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = x + ay + y^2 \\ y' = bx - 3y - x^2 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x' = 2e^{-x} - \sqrt{4 + ay} \\ y' = \ln(1 + 9x + ay) \end{cases}$ г) $\begin{cases} x' = \ln(e + ax) - e^y \\ y' = bx + tgy \end{cases}$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения системы, построив функцию Ляпунова и применив теоремы об устойчивости или неустойчивости.

а) $\begin{cases} x' = x^3 - y \\ y' = x + y^3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = 2y^3 - x^5 \\ y' = -x - y^3 + y^5 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x' = y - 3x - x^3 \\ y' = 6x - 2y \end{cases}$ г) $\begin{cases} x' = -x - xy \\ y' = y^3 - x^3 \end{cases}$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1. С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению исследовать на устойчивость нулевое решение следующих систем:

а) $\begin{cases} x' = x^2 + y^2 - 2x \\ y' = 3x^2 - x + 3y \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = \ln(4y + e^{-3x}) \\ y' = 2y - 1 + \sqrt[3]{1 - 6x} \end{cases}$

в) $\begin{cases} x' = tg(y - x) \\ y' = 2^y - 2\cos(\dfrac{\pi}{3} - x) \end{cases}$ г) $\begin{cases} x' = e^x - e^{-3z} \\ y' = 4z - 3\sin(x + y) \\ z' = \ln(1 + z - 3x) \end{cases}$

2. Исследовать при каких значениях параметров *а* и *в* асимптотически устойчиво нулевое решение систем:

а) $\begin{cases} x' = ax + y + x^2 \\ y' = x + ay + y^2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = y + \sin x \\ y' = ax + by \end{cases}$

3. Исследовать устойчивость нулевого решения системы, построив функцию Ляпунова и применив теоремы об устойчивости или неустойчивости.

а) $\begin{cases} x' = y - x + xy \\ y' = x - y - x^2 - y^3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x' = xy - x^3 + y^3 \\ y' = x^2 - y^3 \end{cases}$

в) $\begin{cases} x' = 2y - x - y^3 \\ y' = x - 2y \end{cases}$

Самостоятельная работа

Задания для самостоятельной работы приведены в планах практических занятий.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Текущая аттестация осуществляется на каждом практическом занятии в процессе фронтального опроса, выполнения заданий для аудиторной работы, в процессе проверки домашней самостоятельной работы.

Проведение текущего контроля осуществляется также посредством проведения аудиторной контрольной работы.

Оценочные средства

Контрольная работа по дисциплине

Образец контрольной работы

1. Является ли функция $y = x^2 + 2$ решением дифференциального уравнения $2yy' = x(y'^2 + 4)$?
2. Решите дифференциальное уравнение $y' = xy^2 + 2xy$.
3. Найдите интегральную кривую уравнения $(x - y)dx + (2y - x)dy = 0$, проходящую через точку $O(0;0)$.
4. Найдите общее и особые решения уравнения $y^2(y' - 1) = (2 - y')^2$.
5. Решите уравнение $y'' + 2y' - 3y = (x - 1)e^x$.

Критерии оценивания контрольной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно реализован каждый метод решения	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	3,75-4
2	Хорошо	2,75-3,5
3	Удовлетворительно	2-2,5
4	Неудовлетворительно	менее 2

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация осуществляется посредством проведения экзамена в 4 семестре.

Вопросы для подготовки к экзамену и образцы экзаменационных заданий.

Вопросы к экзамену

1. Понятия дифференциального уравнения. Порядок решение обыкновенного дифференциального уравнения.
2. Задача Коши и теорема Коши-Пикара для уравнения $y' = f(x, y)$.
3. Понятие общего, частного и особого решений дифференциального уравнения.
4. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ и его решений.
5. Дифференциальное уравнение 1-го порядка в симметричной форме.
6. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Различные методы решения.
7. Уравнения Бернулли и Риккати.
8. Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.
9. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, приводящиеся к дифференциальным уравнениям с разделяющимися переменными.
10. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Примеры.
11. Методы интегрирования дифференциальных уравнений вида $F(x, y, y') = 0$. Различные случаи.

12. Уравнения Лагранжа и Клеро.

13. Составление дифференциального уравнения 1-го порядка по его общему интегралу.

14. Понятие устойчивости решений уравнений вида $y' = f(x, y)$. Примеры.

15. Задача Коши и теорема Коши-Пикара для дифференциальных уравнений высшего порядка.

16. Понятие общего и частного решений дифференциального уравнения высшего порядка.

17. Некоторые классы дифференциальных уравнений высшего порядка, допускающие понижение порядка. Примеры.

18. Линейное дифференциальное уравнение высшего порядка. Теорема Коши-Пикара для таких уравнений.

19. Построение общего решения для линейных однородных уравнений высшего порядка.

20. Структура общего решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений высшего порядка.

21. Уравнение Эйлера.

22. Метод вариации произвольных постоянных для линейного дифференциального уравнения 2-го порядка.

23. Линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Построение общего решения.

24. Линейное неоднородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод подбора частного решения.

25. Нормальная система дифференциальных уравнений. Задача Коши и теорема о существовании и единственности решения.

26. Сведение дифференциальных уравнений n-го порядка к нормальной системе уравнений.

27. Решение нормальной системы дифференциальных уравнений методом исключения.

28. Решение нормальной системы дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций.

29. Формула Остроградского-Лиувилля.

30. Однородные системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Структура общего решения.

31. Неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Структура общего решения.

32. Матричный метод решения однородных систем линейных уравнений 1-го порядка в общем случае.

33. Матричный метод решения однородных систем линейных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами.

34. Матричный метод решения неоднородных систем линейных уравнений 1-го порядка.

35. Решение однородных систем линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами методом Эйлера в случае, когда характеристическое уравнение имеет различные действительные корни.

36. Решение однородных систем линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами методом Эйлера в случае, когда характеристическое уравнение имеет различные комплексные корни.

37. Решение однородных систем линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами методом Эйлера в случае, когда характеристическое уравнение имеет кратные корни.

38. Решение неоднородных систем линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами методом вариации произвольных постоянных.

39. Решение неоднородных систем линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка с постоянными коэффициентами методом неопределенных коэффициентов.
40. Первые интегралы нормальной системы дифференциальных уравнений.
41. Общий интеграл нормальной системы дифференциальных уравнений.
42. О числе независимых интегралов нормальной системы.
43. Понижение порядка нормальной системы при помощи первых интегралов.
44. Приведение нормальной системы к симметрической форме.
45. Интегралы, первые интегралы и общий интеграл систем дифференциальных уравнений в симметрической форме.
46. О числе независимых интегралов автономной системы дифференциальных уравнений.
47. Механическое истолкование дифференциального уравнения 1-го порядка и его решений.
48. Механическое истолкование нормальной системы дифференциальных уравнений 1-го порядка и ее решений.
49. Понятие устойчивости решения в случае одного дифференциального уравнения.
50. Понятие устойчивости решения нормальной системы дифференциальных уравнений.
51. Условия устойчивости для однородных систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.
52. Фазовый портрет линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и двумя независимыми функциями.
53. Критерий устойчивости по первому приближению нелинейных систем дифференциальных уравнений.
54. Исследование устойчивости методом функций Ляпунова.

Образец экзаменационного задания

1. Теорема Коши-Пикара для нормальных систем дифференциальных уравнений.
2. Исследование устойчивости решений с помощью функций Ляпунова.
3. Решите дифференциальное уравнение $y' = xy^2 + 2xy$.
4. Выделите интегральную кривую уравнения $\frac{x}{x^2+y^2}dy = \left(\frac{y}{x^2+y^2} - 1\right)dx$,

проходящую через точку М (1; 1).

5. Найдите частное решение уравнения $x \cdot y'' = y'$, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=1} = y'\big|_{x=1} = 1$.

Критерии оценивания ответа на экзамене

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Правильный ответ на вопрос	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25, 0,5 и 0,75 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Основная литература

1. Дифференциальные уравнения. Устойчивость и оптимальная стабилизация: учебное пособие для вузов / А.Н. Сесекин [и др.]; ответственный редактор А. Н. Сесекин. – М.: Издательство Юрайт, 2020. – 119 с. – Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/454858.

2. Боровских А.В. Дифференциальные уравнения в 2 ч. Часть 1: учебник и практикум для вузов / А.В. Боровских, А.И. Перов. – М.: Издательство Юрайт, 2020. – 327 с. – Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/451405.

3. Боровских А.В. Дифференциальные уравнения в 2 ч. Часть 2: учебник и практикум для вузов / А.В. Боровских, А.И. Перов. – М.: Издательство Юрайт, 2020. – 274 с. – Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/452068.

4. Аксенов А.П. Дифференциальные уравнения в 2 т: учебник и практикум для академического бакалавриата / А.П. Аксенов. – М.: Издательство Юрайт, 2020. – 601 с. – Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/448107.

5. Королев А. В. Дифференциальные и разностные уравнения: учебник и практикум для вузов / А. В. Королев. – М.: Издательство Юрайт, 2020. – 280 с. – Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/451251.

6. Шипачев В.С. Высшая математика. Полный курс в 2 т. Том 2: учебник для вузов / В.С. Шипачев; под редакцией А.Н. Тихонова. – М.: Издательство Юрайт, 2020. – 305 с. – Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/452102.

7.2. Список дополнительной литературы

1. Агафонова С.А., Муратова Т.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Издат. центр «Академия», 2008.

2. Филиппов А.Ф.Введение в теорию дифференциальных уравнений. – М.: УРСС, 2004.

3. Задачник по курсу математического анализа / Под ред. Н.Я. Виленкина. - М.: Просвещение, 1971. – Ч. II.

4. Дьяконов В.П.Компьютерная математика. Теория и практика. – М.: Нолидж, 2001.

5. Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М., Изд-во иностранной литературы, 1958.

6. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Изд. 3, переработанное и дополненное. – М.: «Высшая школа», 1978.

7. Петровский И.Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во МГУ, 1984.

8. Понтрягин Л.С. Дифференциальные уравнения и их приложения. – М.: Наука, 1988.

9. СамойленкоА.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. – М.: Высшая школа, 1989.

10. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М., 1958.

11. Эльсгольц Л.Э.Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. – М.: Едиториал УРСС, 2003.

12. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: Едиториал УРСС, 2003.

13. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1970.

14. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия (в трех томах). Под редакцией А.П. Юшкевича. – М.: Наука, 1972.

15. Конашенко А.В., Расулов К.М. Дифференциальные уравнения: учебно-методическое пособие / под ред. К.М. Расулова; Смоленский гос. ун-т. - Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2014. – 56 с.
16. Расулов К.М. Обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными. – Смоленск: СмолГУ, 2010.

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Система дистанционного обучения Смоленского государственного университета http://cdo.smolgu.ru
2. Электронно-библиотечная система университета http://biblioteka.smolgu.ru
3. Национальный открытый университет http://www.intuit.ru
4. Образовательный математический сайт http://exponenta.ru
5. Общероссийский математический портал http://www.mathnet.ru
6. Википедия (http://www.wikipedia.ru).
7. Научная электронная библиотека: http://elibrary.ru.

8. Материально-техническое обеспечение

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, оснащенная стандартной учебной мебелью, доской настенной, экраном, мультимедиапроектором, ноутбуком и комплектом колонок.

Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенная стандартной учебной мебелью.

Помещение для самостоятельной работы – компьютерный класс с доступом к сети «Интернет» и ЭИОС СмолГУ

9. Программное обеспечение

Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), лицензия 66975477 от 03.06.2016 (бессрочно).

Обучающимся обеспечен доступ к ЭБС «Юрайт», а также доступ в электронную информационно-образовательную среду университета.