Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра прикладной математики и информатики

«Утверждаю»
Проректор по учебно-методической работе
_____ Ю.А. Устименко
«09» сентября 2021 г.

Рабочая программа дисциплины
Б1.О.17 Теория вероятностей и математическая статистика

Направление подготовки: **11.03.01 Радиотехника**
Направленность (профиль): **Радиоэлектронные системы и комплексы**
Форма обучения: очная
Курс – 2
Семестр – 3
Всего зачетных единиц – 3, часов – 108
Форма отчетности: экзамен – 3 семестр

Программу разработал: кандидат физико-математических наук, доктор педагогических наук, профессор Евдокимова Г.С.

Одобрена на заседании кафедры
«02» сентября 2021 г., протокол № 1

Смоленск
2021

1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» включена в обязательную часть образовательной программы по направлению подготовки 11.03.01 Радиотехника. Изучение теории вероятностей и математической статистики позволяет создать условия, необходимые для формирования у студентов современного естественнонаучного мировоззрения и целостной научной картины мира, в которой органично сочетаются знания из различных областей науки.

Для освоения курса необходимы знания, умения и навыки, приобретенные в результате предварительного обучения по дисциплине: «Математический анализ». Дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика» логически и содержательно связана с дисциплиной «Метрология, стандартизация и сертификация» и необходима для последующего изучения профильных дисциплин.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
ОПК-1. Способен использовать положения, законы и методы естественных наук и математики для решения задач инженерной деятельности	**Знать**: основные законы и методы математики. **Уметь**: применять законы и методы математики для решения задач теоретического и прикладного характера. **Владеть**: навыками использования основных теорий и методов математики при решении практических задач.
ОПК-2. Способен самостоятельно проводить экспериментальные исследования и использовать основные приемы обработки и представления полученных данных	**Знать:** основные методы и средства проведения экспериментальных исследований, приемы обработки и представления полученных данных. **Уметь**: выбирать способы и средства измерений, проводить экспериментальные исследования; находить и критически анализировать информацию, необходимую для решения поставленной задачи; разрабатывать решение конкретной задачи, выбирая оптимальный вариант, оценивая его достоинства и недостатки. **Владеть**: способами обработки и представления полученных данных, оценки погрешностей результатов измерений.

3. Содержание дисциплины

Введение. История возникновения теории вероятностей и математической статистики. Предмет и цель теории вероятностей и математической статистики. Связь теории вероятностей и математической статистики с другими математическими науками.

Случайные события. Случайные события, их классификация. Действия над событиями. Алгебра событий. (Теоретико-множественная трактовка). Свойство статистической устойчивости относительной частоты события. Статистическое определение вероятности. Классическое определение вероятности. Элементы комбинаторики. Примеры вычисления вероятностей. Геометрическое определение вероятности. Аксиоматическое определение вероятности. Свойства вероятностей. Конечное вероятностное пространство. Условные вероятности. Вероятность произведения событий. Независимость событий. Вероятность суммы событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса (теорема гипотез). Последовательность независимых испытаний. Независимые испытания. Схема Бернулли. Формула Бернулли. Предельные теоремы в схеме Бернулли. Локальная предельная теорема. Интегральная предельная теорема. Теорема Пуассона. Иллюстрация схемы независимых испытаний. Полиномиальная схема.

Случайные величины. Понятие случайной величины. Закон распределения случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины. Многоугольник

распределения. Функция распределения и ее свойства. Функция распределения дискретной случайной величины. Плотность распределения и ее свойства. Числовые характеристики случайных величин; математическое ожидание, дисперсия, начальные и центральные моменты. Статистическое истолкование математического ожидания. Механическая интерпретация математического ожидания и дисперсии. Теоремы о математическом ожидании и дисперсии. Основные законы распределения случайных величин. Примеры законов распределения: биномиальный закон, гипергеометрический закон, нормальное распределение, равномерное распределение, гамма–распределение.

Системы случайных величин. Понятие о системе случайных величин и законе ее распределения. Функция распределения двумерной случайной величины и ее свойства. Плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины и ее свойства. Зависимость и независимость двух случайных величин. Условные законы распределения. Числовые характеристики двумерной случайной величины. Математическое ожидание и дисперсия. Корреляционный момент, коэффициент корреляции. Двумерное нормальное распределение. Условное математическое ожидание и условное распределение относительно σ-алгебры. Свойства условных математических ожиданий. Аналог формулы полной вероятности для условных математических ожиданий. Условная плотность распределения. Формула Байеса для плотностей. Регрессия. Теорема о нормальной корреляции. Многомерная (n-мерная) случайная величина (общие сведения).

Функции случайных величин. Функция одного случайного аргумента. Функции двух случайных аргументов. Распределение функций нормальных случайных величин.

Закон больших чисел. Массовые явления и закон больших чисел. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева. Теорема Бернулли. Необходимые и достаточные условия для закона больших чисел. Лемма Бореля-Кантелли. Закон «0 или 1» Колмогорова. Различные виды сходимости случайных величин. Усиленный закон больших чисел.

Производящие функции. Целочисленные случайные величины и их производящие функции. Примеры производящих функций распределений некоторых целочисленных случайных величин. Факториальные моменты. Многомерные производящие функции. Мультипликативное свойство. Сумма случайного числа случайных величин.

Характеристические функции. Определение и простейшие свойства характеристических функций. Вычисление характеристических функций некоторых законов распределения: биномиального, пуассоновского, геометрического, вырожденного, нормального. Формулы обращения для характеристических функций. Теорема о непрерывном соответствии между множеством характеристических функций и множеством функций распределения.

Центральная предельная теорема. Центральная предельная теорема для одинаково распределенных независимых слагаемых. Теорема Ляпунова. Применение центральной предельной теоремы.

Многомерные характеристические функции. Определение и простейшие свойства. Формула обращения. Предельные теоремы для характеристических функций. Многомерное нормальное распределение и связанные с ним распределения. Сферическое нормальное распределение. ^{2}– распределение, распределение Стьюдента, *F*–распределение

4. Тематический план

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий		
			лекции	практические занятия	самостоятельная работа
1.	Введение	4	1	–	3
2.	Случайные события	13	1	8	4
3.	Случайные величины	14	2	8	4
4.	Системы случайных величин	10	2	4	4
5.	Функции случайных величин	7	2	2	3

6.	Закон больших чисел	6	1	2	3
7.	Производящие функции	6	1	2	3
8.	Характеристические функции	9	2	4	3
9.	Центральная предельная теорема	7	2	2	3
10.	Многомерные характеристические функции	5	2	–	3
11.	Экзамен	27	–	–	27
Всего за семестр		**108**	**16**	**32**	**60**

5. Виды учебной деятельности

Занятия лекционного типа

Лекция 1. Введение. Случайные события. Предмет теории вероятностей и математической статистики. Случайные события, их классификация. Действия над событиями. Алгебра событий. Статистическое и классическое определение вероятности. Примеры вычисления вероятностей. Свойства вероятностей. Вероятность произведения событий. Независимость событий. Вероятность суммы событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса (теорема гипотез.) Независимые испытания. Формула Бернулли.

Лекция 2. Случайные величины. Понятие случайной величины. Закон распределения случайной величины. Закон распределения дискретной случайной величины. Функция распределения и ее свойства. Плотность распределения и ее свойства. Математическое ожидание, дисперсия, начальные и центральные моменты. Статистическое истолкование математического ожидания. Теоремы о математическом ожидании и дисперсии. Биномиальный закон. Гипергеометрический закон. Нормальное распределение. Равномерное распределение. Гамма–распределение.

Лекция 3. Системы случайных величин. Понятие о системе случайных величин и законе ее распределения. Функция распределения двумерной случайной величины и ее свойства. Плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины и ее свойства. Зависимость и независимость двух случайных величин. Условные законы распределения. Математическое ожидание и дисперсия. Корреляционный момент, коэффициент корреляции. Двумерное нормальное распределение. Условное математическое ожидание и условное распределение относительно σ-алгебры. Свойства условных математических ожиданий. Аналог формулы полной вероятности для условных математических ожиданий. Условная плотность распределения. Формула Байеса для плотностей.

Лекция 4. Функции случайных величин. Функция одного случайного аргумента. Функции двух случайных аргументов. Распределение функций нормальных случайных величин.

Лекция 5. Закон больших чисел. Производящие функции. Массовые явления и закон больших чисел. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел в форме Чебышева. Теорема Бернулли. Различные виды сходимости случайных величин. Усиленный закон больших чисел. Целочисленные случайные величины и их производящие функции. Примеры производящих функций распределений некоторых целочисленных случайных величин. Факториальные моменты. Многомерные производящие функции. Мультипликативное свойство. Сумма случайного числа случайных величин.

Лекция 6. Характеристические функции. Определение и простейшие свойства характеристических функций. Вычисление характеристических функций некоторых законов распределения: биномиального, пуассоновского, геометрического, вырожденного, нормального. Формулы обращения для характеристических функций. Теорема о непрерывном соответствии между множеством характеристических функций и множеством функций распределения.

Лекция 7. Центральная предельная теорема. Центральная предельная теорема для одинаково распределенных независимых слагаемых. Теорема Ляпунова. Применение центральной предельной теоремы.

Лекция 8. Многомерные характеристические функции. Определение и простейшие свойства. Формула обращения. Предельные теоремы для характеристических функций. Многомерное нормальное распределение и связанные с ним распределения. Сферическое нормальное распределение. ^{2} – распределение. Распределение Стьюдента. *F*– распределение.

Занятия семинарского типа (практические занятия)

Практическое занятие № 1. *События*

Теоретические вопросы:

1.Случайные события, их классификация.

2.Действия над событиями.

3.Алгебра событий. (Теоретико-множественная трактовка).

Решение задач по данной теме (Дидактический материал в электронном виде «Практикум по теории вероятностей и математической статистике» модуль №1).

Практическое занятие № 2 – 3. *Вероятностное пространство*

Теоретические вопросы:

1.Свойства вероятности.

2.Конечное вероятностное пространство.

3.Классическое определение вероятности.

4.Ограниченность классического определения вероятности.

Решение задач по данной теме (Дидактический материал в электронном виде «Практикум по теории вероятностей и математической статистике» модуль №1).

Практическое занятие № 4. *Основные теоремы теории вероятностей.*

Теоретические вопросы:

1.Условные вероятности. Вероятность произведения событий. Независимость событий.

2.Вероятность суммы событий.

3.Формула полной вероятности.

4.Формула Байеса (теорема гипотез).

Решение задач по данной теме (Дидактический материал в электронном виде «Практикум по теории вероятностей и математической статистике» модуль №2-3).

Практическое занятие № 5. *Случайные величины.*

Теоретические вопросы:

1.Понятие случайной величины.

2.Закон распределения случайной величины.

3.Закон распределения дискретной случайной величины.

4.Многоугольник распределения.

5.Функция распределения и ее свойства. Функция распределения дискретной случайной величины. Плотность распределения и ее свойства.

Решение задач по данной теме (Дидактический материал в электронном виде «Практикум по теории вероятностей и математической статистике» модуль №5).

Практическое занятие № 6. *Числовые характеристики случайных величин.*

Теоретические вопросы:

1.Математическое ожидание, дисперсия, начальные и центральные моменты.

2.Статистическое истолкование математического ожидания. Механическая интерпретация математического ожидания и дисперсии.

3.Теоремы о математическом ожидании и дисперсии.

Решение задач по данной теме (Дидактический материал в электронном виде «Практикум по теории вероятностей и математической статистике» модуль №5).

Практическое занятие № 7. *Основные законы распределения дискретных случайных величин.*

Теоретические вопросы:

1.Биномиальный закон.

2.Геометрический закон.

3.Закон Пуассона

4.Гипергеометрический закон.

Решение задач по данной теме (Дидактический материал в электронном виде «Практикум по теории вероятностей и математической статистике» модуль №5)

Практическое занятие № 8. *Основные законы распределения непрерывных случайных величин*

Теоретические вопросы:

1.Показательное распределение.

2.Нормальное распределение.

3.Равномерное распределение.

4.Гамма–распределение.

Решение задач по данной теме (Дидактический материал в электронном виде «Практикум по теории вероятностей и математической статистике» модуль №5)

Практическое занятие № 9. *Системы случайных величин.*

Теоретические вопросы:

1.Понятие о системе случайных величин и законе ее распределения. Функция распределения двумерной случайной величины и ее свойства. Плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины и ее свойства.

2.Зависимость и независимость двух случайных величин. Условные законы распределения.

Решение задач по данной теме (Дидактический материал в электронном виде «Практикум по теории вероятностей и математической статистике» модуль №6)

Практическое занятие № 10. *Числовые характеристики двумерной случайной величины.*

Теоретические вопросы:

1.Математическое ожидание и дисперсия. Корреляционный момент, коэффициент корреляции.

2.Двумерное нормальное распределение.

3.Условное математическое ожидание и условное распределение относительно σ-алгебры.

4.Свойства условных математических ожиданий.

5.Аналог формулы полной вероятности для условных математических ожиданий.

6.Условная плотность распределения. Формула Байеса для плотностей.

Решение задач по данной теме (Дидактический материал в электронном виде «Практикум по теории вероятностей и математической статистике» модуль №6).

Практическое занятие № 11. *Функции случайных величин.*

Теоретические вопросы:

1.Функция одного случайного аргумента.

2.Функции двух случайных аргументов.

3.Распределение функций нормальных случайных величин.

Решение задач по данной теме (Задачи для самостоятельного решения по теории вероятностей и математической статистике (материал в электронном виде))

Практическое занятие № 12. *Закон больших чисел.*

Теоретические вопросы:

1.Массовые явления и закон больших чисел.

2.Неравенство Чебышева.

3.Закон больших чисел в форме Чебышева.

4.Теорема Бернулли.

5.Различные виды сходимости случайных величин.

6.Усиленный закон больших чисел.

Решение задач по данной теме. (Дидактический материал в электронном виде «Практикум по теории вероятностей и математической статистике» модуль №7).

Практическое занятие № 13. *Производящие функции.*

Теоретические вопросы:

1.Целочисленные случайные величины и их производящие функции.

2.Факториальные моменты.

Решение задач по данной теме. (Задачи для самостоятельного решения по теории вероятностей и математической статистике (материал в электронном виде)).

Практическое занятие № 14-15. *Характеристические функции.*

Теоретические вопросы:

1.Определение и простейшие свойства характеристических функций.

2.Формулы обращения для характеристических функций.

3.Теорема о непрерывном соответствии между множеством характеристических функций и множеством функций распределения.

Решение задач по данной теме (Задачи для самостоятельного решения по теории вероятностей и математической статистике (материал в электронном виде)).

Практическое занятие № 16. *Центральная предельная теорема.*

Теоретические вопросы:

1.Центральная предельная теорема для одинаково распределенных независимых слагаемых.

2.Теорема Ляпунова.

3. Применение центральной предельной теоремы.

Решение задач по данной теме (Дидактический материал в электронном виде «Практикум по теории вероятностей и математической статистике» модуль №7).

Самостоятельная работа

Самостоятельная работа студентов направлена на более глубокое и систематическое усвоение курса. Самостоятельная работа включает в себя: подготовку к практическим занятиям, к контрольным работам, выполнение индивидуальных занятий, проработку дополнительного материала, решение задач для закрепления пройденного теоретического и практического материала.

Темы для самостоятельного изучения

1. Полиномиальная схема
2. Регрессия. Теорема о нормальной корреляции. Многомерная (n-мерная) случайная величина (общие сведения).
3. Необходимые и достаточные условия для закона больших чисел. Лемма Бореля-Кантелли. Закон «0 или 1» Колмогорова.
4. Метод наименьших квадратов.
5. Построение доверительных интервалов для параметров нормального распределения.
6. Дисперсионный анализ. Корреляционное отношение и индекс корреляции.
7. Понятие о многомерном корреляционном анализе. Множественный и частный коэффициент корреляции.
8. Интервальная оценка и проверка значимости уравнения регрессии.
9. Множественный регрессионный анализ.
10. Корреляционная матрица и ее выборочная оценка.
11. Определение доверительных интервалов для коэффициентов и функции регрессии.
12. Оценка взаимосвязи переменных.
13. Проверка значимости уравнения множественной регрессии.
14. Мощность критерия.
15. Понятие о методе Монте-Карло.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

1. Контрольная работа

Образец контрольной работы №1

1. Известно, что у пятизначного номера телефона все цифры разные. Какова вероятность при этом условии, что среди них ровно одна четная (нуль считаем четной)?

2. Сколько раз следует произвести трехкратное подбрасывание кубика, чтобы с вероятностью 0,95 хотя бы один раз появилось ровно 2 единицы?

3. Шесть рукописей случайным образом раскладывают по пяти папкам. Какова вероятность того, что некоторая папка останется пустой?

4. В аудитории $m = 25$ студентов. Найти вероятность того, что хотя бы у двух студентов дни рождения совпадают. При каком числе m студентов вероятность того же события не меньше чем 0,95? (Полагаем равновозможность рождений в любой день года).

5. В первом ящике находится 10 белых и 15) черных шаров, втором – 18 белых и 16+N черных. Из первого ящика берут наудачу 2 шара и, не выясняя, какого они цвета, кладут во второй ящик. После этого из второго ящика наудачу выбирают 1 шар. Определить вероятности следующих событий:

A – шар, взятый из второго ящика, окажется белым;

B – из первого ящика во второй переложили 1 белый и 1 черный шар, при условии, что из второго ящика взят черный шар.

Образец контрольной работы №2

1. Случайная величина имеет равномерное распределение на отрезке [-1,1]. Найти плотность распределения = – ln(2 +).

2. Случайная пара (,) имеет равномерное распределение на множестве

$\{x, y: |x| + |y| < 2\}$.

Найти плотности распределения и . Являются ли они зависимыми (ответ обосновать)?

3. Плотность распределения случайной величины имеет

$$f(x)=\begin{cases} C(\mathbf{1}-|x|), & |x|\le \mathbf{1}, \\ \mathbf{0}, & |x|>\mathbf{1}. \end{cases}$$

Найти С, функцию распределения $F(x)$ и M .

4. Всегда ли линейная комбинация нормально распределенных случайных величин распределена нормально?

5. Найти закон распределения, которому соответствуют следующие характеристические функции: $\cos t$, $\cos^2 t$.

Критерии оценивания контрольной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно решена каждая задача	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

2. Тестовые задания

Образец тестового задания

1. Вероятностное пространство случайного эксперимента состоит из следующих объектов

A) (Ω, *S, P*). B) (Ω, *S*). C) (Ω, *P*). D) (*S,P*).

2. Вероятность рождения мальчика $p = 0{,}5$. Тогда вероятность того, что в семье, имеющих трех детей, будет три мальчика равна

A) 1/3. B) 3/8. C) 1/8. D) 1/2.

3.Случайная величина *X* принимает возможные значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Ряд распределения вероятностей случайной величины *X* имеет вид:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

$p_1, p_2, \ldots, p_n$ - вероятности того, что случайная величина примет значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда сумма этих вероятностей равна

A) $\sum_{i=1}^{n} p_i = 0{,}5$. B) любому числу. C) $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. D) $\sum_{i=1}^{n} p_i = \infty$.

4. Плотность распределения случайной величины *X* имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0 \\ \dfrac{2x}{9}, \text{ если } 0 < x \le 3 \\ 0, \text{ если } x > 3 \end{cases}.$$