

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»
Проректор по учебно-
методической работе
Ю.А. Устименко
«08» сентября 2019 г.

**Рабочая программа дисциплины
Б1.О.19 Математический анализ**

Направление подготовки: **08.03.01 Строительство**
Направленность (профиль): **Промышленное и гражданское строительство**
Форма обучения: очная
Курс – 1
Семестр – 1, 2
Всего зачётных единиц – 8, часов - 288

Форма отчетности: экзамен- 1, 2 семестр

Программу разработала
кандидат педагогических наук, доцент Н.А. Шерстнёва

Одобрена на заседании кафедры
«01» сентября 2019 г., протокол № 1

Заведующий кафедрой

К.М. Расулов

Смоленск
2019

1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Математический анализ» изучается в 1 и 2 семестрах; она включена в обязательную часть блока 1 «Дисциплины (модули)» учебного плана направления подготовки 08.03.01 Строительство (профиль «Промышленное и гражданское строительство»). Содержание дисциплины является логическим продолжением содержания дисциплин школьного курса элементарной математики и служит основой для освоения таких дисциплин, как: физика, информатика, дисциплины профессионального цикла, учебные и производственные практики, предусмотренные ОП.

Для успешного освоения данной дисциплины необходимы компетенции студентов, сформированные при изучении школьного курса математики.

Изучение курса основано на традиционных методах высшей школы, тесной взаимосвязи со смежными курсами, а также на использовании современной учебной, методической литературы, информационных и образовательных технологий.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
ОПК 1. Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата	Знать: основные положения естественных и технических наук, а также математический аппарат, необходимые для успешного решения задач профессиональной деятельности; Уметь: решать основные задачи профессиональной деятельности на основе теоретических и практических основ естественных и технических наук, применяя соответствующий математический аппарат; Владеть: навыками решения основных задач профессиональной деятельности на основе положений естественных и технических наук.

3. Содержание дисциплины

- 1. Введение в анализ.** Рациональные и действительные числа и их свойства. Числовые множества. Понятие функции одной действительной переменной, её основные свойства. Обратная функция, сложная функция.
- 2. Предел последовательности.** Числовые последовательности и операции над ними. Предел числовой последовательности. Монотонные последовательности. Число ϵ . Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Вычисление пределов последовательностей.
- 3. Предел функции одной действительной переменной.** Определение предела функции одной действительной переменной в точке и на бесконечности. Бесконечно большие и бесконечно малые функции. Теоремы о существовании предела функции. Вычисление пределов. Замечательные пределы. Эквивалентные бесконечно малые и их применение к вычислению пределов функций.
- 4. Непрерывность функции одной действительной переменной.** Определение непрерывности функции в точке. Точки разрыва и их классификация. Свойства функций непрерывных в точке и на отрезке. Непрерывность основных элементарных функций.
- 5. Основы дифференциального исчисления функции одной действительной переменной.** Производная функции одной действительной переменной, её геометрический и механический смысл. Дифференцируемость функции, связь дифференцируемости и существования производной. Правила дифференцирования, производная сложной и обратной функции, таблица производных. Логарифмическое дифференцирование. Дифференциал функции и его применение. Производные и дифференциалы высших порядков.
- 6. Применение производной функции одной действительной переменной.** Применение производной к исследованию функций на монотонность, экстремумы, выпуклость, вогнутость, перегиб. Оптимизационные задачи. Правило Лопиталья.

7. **Неопределённый интеграл.** Первообразная и неопределённый интеграл. Таблица интегралов. Основные методы интегрирования. Интегрирование рациональных функций, дробно-рациональных функций. Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций.
8. **Определённый интеграл.** Понятие определённого интеграла, его геометрический и физический смысл. Основные свойства определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Методы вычисления определённых интегралов.
9. **Применение определённых интегралов.** Вычисление площадей плоских фигур, объёмов тел, длины дуги. Механические применения определённого интеграла.
10. **Числовые и функциональные ряды.** Понятие числового ряда. Необходимый признак сходимости числового ряда. Свойства сходящихся рядов. Знакоположительные числовые ряды и признаки их сходимости. Абсолютно и условно сходящиеся числовые ряды. Знакопередающиеся числовые ряды, признак Лейбница. Определение функционального ряда, его область сходимости. Определение степенного ряда. Область сходимости степенного ряда. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Маклорена.
11. **Функции нескольких переменных.** Понятие функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции двух переменных.
12. **Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.** Частные производные и дифференциалы функции двух переменных. Частные производные и дифференциалы высших порядков. Исследование функции двух переменных на экстремум. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой ограниченной области.
13. **Интегральное исчисление функций нескольких переменных.** Определение и существование двойного интеграла. Свойства двойного интеграла. Геометрические и физические приложения кратных интегралов. Определение криволинейного интеграла второго рода. Существование криволинейного интеграла второго рода, его свойства и сведение к определённому интегралу.
14. **Алгебра комплексных чисел.** Понятие комплексного числа, различные формы записи комплексных чисел. Действия с комплексными числами и их свойства. Формулы Эйлера и Муавра.
15. **Функции комплексного переменного.** Понятие функции комплексного переменного. Предел последовательности и функции.
16. **Дифференцирование функций комплексного переменного.** Производная функции комплексного переменного. Условия Даламбера-Эйлера. Конформные отображения. Геометрический смысл аргумента и модуля производной.
17. **Интегрирование функций комплексного переменного.** Определение интеграла от функции комплексного переменного. Интеграл от аналитической функции. Формула Ньютона-Лейбница. Теорема Коши.
18. **Обыкновенные дифференциальные уравнения. Уравнения с разделяющимися переменными.** Понятие об обыкновенных дифференциальных уравнениях. Общий вид дифференциальных уравнений. Задача Коши. Теорема Коши. Общие, частные и особые решения. Понятие и алгоритм решения уравнений с разделяющимися переменными.
19. **Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.** Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Методы решения однородных и неоднородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка.
20. **Линейные дифференциальные уравнения второго порядка.** Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Структура общего решения. Метод неопределённых коэффициентов.

4. Тематический план

1 семестр

№ п/п	Темы	Всего часов	Формы занятий			
			Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	Самост. работа
1	Введение в анализ	8	2	2	2	2
2	Числовые последовательности. Предел числовой последовательности	13	4	2	2	5
3	Функции одной действительной переменной. Предел функции одной действительной переменной	15	4	4	2	5
4	Непрерывность функции одной действительной переменной	6	2	2	-	2
5	Основы дифференциального исчисления функции одной действительной переменной	12	4	2	2	4
6	Применение производной функции одной действительной переменной	20	4	8	2	6
7	Неопределённый интеграл	16	6	4	2	4
8	Определённый интеграл	14	4	4	2	4
9	Применение определённых интегралов	10	2	2	2	4
10	Контрольная работа	3	-	2	-	1
Экзамен		27	-	-	-	27
Итого		144	32	32	16	37+27

2 семестр

№ п/п	Темы	Всего часов	Формы занятий			
			Лекции	Практич. занятия	Лабораторные работы	Самостоят. работа
1	Числовые и функциональные ряды	18	6	8	2	2
2	Функции нескольких переменных	8	2	2	2	2
3	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	13	3	6	2	2
4	Интегральное исчисление функций нескольких переменных	18	5	6	4	3
5	Алгебра комплексных чисел	7	2	4	-	1
6	Функции комплексного переменного	5	2	2	-	1
7	Дифференцирование функций комплексного переменного	8	2	4	-	2
8	Интегрирование функций комплексного переменного	10	4	4	-	2
9	Обыкновенные дифференциальные уравнения. Уравнения с разделяющимися переменными	7	2	2	2	1

10	Линейные дифференциальные уравнения первого порядка	10	2	4	2	2
11	Линейные дифференциальные уравнения второго порядка	10	2	4	2	2
12	Контрольная работа	3	-	2	-	1
	Экзамен	27	-	-	-	27
	Итого	144	32	48	16	21+27

5. Виды образовательной деятельности

1 семестр

Лекция 1 «Введение в анализ»: понятие математического анализа; основные числовые множества и промежутки; модуль действительного числа.

Лекции 2-3 «Числовые последовательности. Предел числовой последовательности»: понятие числовой последовательности; способы задания последовательностей; свойства числовых последовательностей; предел числовой последовательности; теоремы о пределах; способы раскрытия неопределённостей при вычислении пределов числовых последовательностей.

Лекция 4-5 «Функции одной действительной переменной. Предел функции одной действительной переменной»: понятие функции одной переменной; её способы задания и свойства; предел функции в точке и на бесконечности; замечательные пределы; методы вычисления пределов функций одной действительной переменной.

Лекция 6 «Непрерывность функции одной действительной переменной»: непрерывность функции в точке, на интервале, на отрезке, точки разрыва; свойства непрерывных функций в точке и на отрезке.

Лекции 7-10 «Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной»: производная, дифференцируемость функции, правила дифференцирования, производная сложной функции; дифференциал функции и его применение, производные и дифференциалы высших порядков, применение производной к исследованию функций, правило Лопиталя.

Лекции 11-16 «Интегральное исчисление функции одной действительной переменной»: первообразная и неопределённый интеграл, таблица интегралов; методы интегрирования, интегрирование некоторых классов функций; определённый интеграл и его свойства, формула Ньютона-Лейбница, методы вычисления определённых интегралов; некоторые применения определённых интегралов.

Практические занятия проводятся в соответствии с учебным пособием [6] (см. Список дополнительной учебной литературы, 1 семестр).

Лабораторная работа 1 «Знакомство с системой WolframMathematica 10.0».

Основные правила работы. Синтаксис и команды. Вычисление числовых выражений.

Лабораторная работа 2 «Предел последовательности».

Первые 10 заданий из задач №№1-6 (раздел 1) учебного пособия [5] списка доп. лит-ры 1 семестр.

Лабораторная работа 3 «Функции одной переменной. Предел функции».

Задание функции пользователя. Вычисление значения функции в точке. График функции. Вычисление пределов функций.

Задачи №№ 151-154, 166-169, 175, 189-192, 242-243, 255-257, 266-269 учебного пособия [5].

Первые 10 заданий из задач №№7-20 (раздел 1) учебного пособия [5].

Лабораторные работы 4-5 «Дифференцируемость».

Первые 10 заданий из задач №№1, 3-7 (раздел 2) учебного пособия [5].

Первые 10 заданий из задач №2 и №16 (раздел 2) учебного пособия [5].

Первые 10 заданий из задач №№17-19 (раздел 2) учебного пособия [5].

Первые 10 заданий из задач №№1-10 (раздел 3) учебного пособия [5].

Лабораторная работа 6 «Неопределённый интеграл».

Первые 10 заданий из задач №№1, 3, 5, 6, 7, 13 (раздел 4) учебного пособия [5].

Лабораторная работа 7 «Определённый интеграл».

Первые 10 заданий из задач №№2, 4, 8-12 (раздел 4) учебного пособия [5].

Лабораторная работа 8 «Приложения интегрального исчисления».

Первые 10 заданий из задач №№14-22 (раздел 4) учебного пособия [5].

2 семестр

Лекции 1-2 «Числовые ряды»: понятие числового ряда; необходимый признак сходимости числового ряда; знакоположительные ряды; признаки сходимости знакоположительных рядов; абсолютно и условно сходящиеся ряды; знакочередующиеся ряды; признак Лейбница.

Лекция 3 «Функциональные ряды»: определение функционального ряда; его область сходимости; определение степенного ряда; интервал сходимости степенного ряда; свойства степенного ряда; разложение некоторых элементарных функций в степенной ряд.

Лекция 4 «Функции нескольких переменных»: понятие функции нескольких переменных; предел и непрерывность функции двух переменных.

Лекция 5-6 «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных»: частные производные и дифференциалы функции двух переменных; частные производные и дифференциалы высших порядков; локальные экстремумы; необходимые и достаточные условия локального экстремума; исследование функции двух переменных на экстремум; наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой ограниченной области.

Лекция 6-8 «Интегральное исчисление функций нескольких переменных»: определение и существование двойного интеграла; его свойства; замена переменных в двойном интеграле; геометрические и физические приложения кратных интегралов; определение криволинейных интегралов первого и второго родов; физический смысл криволинейных интегралов; существование криволинейных интегралов и их сведение к определенным интегралам.

Лекция 9 «Алгебра комплексных чисел»: понятие комплексного числа; различные формы записи комплексных чисел; действия с комплексными числами и их свойства; формулы Эйлера и Муавра.

Лекция 10 «Функции комплексного переменного»: понятие функции комплексного переменного; предел последовательности и функции.

Лекция 11 «Дифференцирование функций комплексного переменного»: понятие производной функции комплексного переменного; условия Даламбера-Эйлера; конформные отображения 1-го и 2-го рода; геометрический смысл аргумента и модуля производной.

Лекция 12-13 «Интегрирование функций комплексного переменного»: определение интеграла от функции комплексного переменного; интеграл от аналитической функции; формула Ньютона-Лейбница; свойства аналитических функций; теорема Коши.

Лекция 14 «Обыкновенные дифференциальные уравнения. Уравнения с разделяющимися переменными»: понятие об обыкновенных дифференциальных уравнениях; общий вид дифференциальных уравнений; задача Коши; теорема Коши; общие, частные и особые решения; понятие и алгоритм решения уравнений с разделяющимися переменными.

Лекция 15 «Линейные дифференциальные уравнения первого порядка»: однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения первого порядка; методы решения однородных и неоднородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

Лекция 16 «Линейные дифференциальные уравнения второго порядка»: линейные неоднородные и однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами; структура общего решения; метод неопределённых коэффициентов.

Практические занятия проводятся в соответствии с учебным пособием [10] (см. Список дополнительной учебной литературы, 2 семестр). Дополнительно привлекаются упражнения из пособий, представленных в списке литературы.

Лабораторная работа 1 «Числовые и функциональные ряды». Задания для самостоятельной работы: 1.1.1, 1.1.9, 1.1.13, 1.1.20, 1.1.23, 1.1.30, 1.1.31, 1.1.36, 1.1.43, 1.1.81, 1.2.7, 1.2.8, 1.2.116 [см. пособие 9 дополнительной литературы 2 семестра].

Задания для самостоятельной работы: 1.3.1, 1.3.2, 1.3.4, 1.3.5, 1.3.7, 1.3.8, 1.3.14, 1.3.19 [см. пособие 9 дополнительной литературы].

Лабораторная работа 2 «Функции нескольких переменных»: изучение команд Reduce, RegionPlot, RegionPlot3D, ContourPlot, ContourPlot3D, Show. Задания для самостоятельной работы: 1) Найти и изобразить область определения функций: $z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$,

$z = \sqrt{1 - x^2/9 - y^2/4}$, $z = \arccos \frac{x^2 + y^2}{9}$, $u = \ln(xyz)$. 2) Изобразить график функции: $z = xy$,

$z = y^2 - x^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 2y - 3$. 3) Изобразить линии и поверхности

уровня: $z = \frac{1}{2x^2 + 3y^2}$, $u = y^2 + x^2 - z^2$, $z = \sqrt{\frac{x}{y}}$.

Лабораторная работа 3 «Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных»: изучение операторов поиска частных производных и дифференциала, реализация алгоритма приближённых вычислений. Задания для самостоятельной работы: 1) 11.3.10, 11.3.16, 11.3.17, 11.3.26, 11.3.24, 11.3.29, 11.3.30, 11.3.35, 11.3.36 [см. пособие 9 дополнительной литературы]; 2) написать программу поиска частных производных функции $z = x + y^2$ в точке M (2; -1) по определению.

Лабораторная работа 4-5 «Интегральное исчисление функций нескольких переменных»: изучение команды Integrate; решение прикладных задач. Задания для самостоятельной работы: 3.1.16, 3.1.17, 3.1.19, 3.1.20, 3.1.23, 3.3.1, 3.3.2, 3.3.22, 3.3.23, 3.3.34 [см. пособие 9 дополнительной литературы].

Лабораторная работа 6 «Обыкновенные дифференциальные уравнения. Уравнения с разделяющимися переменными». Задания для самостоятельной работы: 2.1.1, 2.1.4, 2.1.6, 2.1.16, 2.1.17, 2.1.18, 2.1.23, 2.1.24 [см. пособие 9 дополнительной литературы].

Лабораторная работа 7 «Линейные дифференциальные уравнения первого порядка». Задания для самостоятельной работы: 2.3.8, 2.3.12, 2.3.13, 2.3.20, 2.3.21, 2.3.22, 2.3.23, 2.3.24, 2.3.29 [см. пособие 9 дополнительной литературы].

Лабораторная работа 8 «Линейные дифференциальные уравнения второго порядка». Задания для самостоятельной работы: 2.7.19, 2.7.20, 2.7.24, 2.7.26, 2.7.38, 2.7.44, 2.7.46, 2.7.58, 2.7.59 [см. пособие 9 дополнительной литературы].

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Текущая аттестация осуществляется на каждом практическом и лабораторном занятии в процессе фронтального опроса, выполнения заданий для аудиторной работы, в процессе проверки домашней самостоятельной работы.

С целью дифференциации уровня подготовки бакалавров и для ликвидации имеющихся при изучении дисциплины задолженностей студентам предлагаются индивидуальные дидактические задания и домашние лабораторные работы, которые выполняются в процессе внеаудиторной работы и сдаются на проверку преподавателю.

Проведение текущего контроля осуществляется также посредством проведения аудиторных контрольных работ один раз в течение семестра и разноуровневых самостоятельных работ.

Оценочные средства

1. Задания для самостоятельной работы.

Задания для самостоятельности бакалавров по каждой изучаемой теме представлены в учебных пособиях [6, 10] (см. Список дополнительной учебной литературы 1, 2 семестр соответственно).

2. Контрольные вопросы для проверки теоретической подготовки к практическому занятию.

Вопросы по каждой теме представлены в учебных пособиях [6, 10] (см. Список дополнительной учебной литературы 1, 2 семестр соответственно).

3. Контрольные работы по дисциплине.

Образец контрольной работы № 1 (1 семестр)

1. Вычислите пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{x} - 1}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x} \right)^{4x}$; в) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x}$; г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 5n + 3n^2}{2n^2 + 2n - 1}$.

2. Исследуйте на непрерывность функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x \leq 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{если } x > 0 \end{cases}.$$

3. Найдите производные функций:

а) $y = \frac{e^x - \operatorname{tg} x}{\cos x}$; б) $y = \sqrt[3]{\arccos^2(1 - \sqrt{x})}$.

4. Вычислите неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 25x^2}}$; б) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x+1}}$; в) $\int x \ln x dx$.

5. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$.

Критерии оценивания контрольной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно реализован каждый метод решения	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

Образец контрольной работы № 2 (2 семестр)

1. Разложите функцию $f(x) = \cos^2 x$ в ряд Маклорена.

2. Исследуйте функцию $z = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x$ на экстремум.

3. Вычислите криволинейный интеграл второго рода $\int_L 2xydx - x^2dy$, где L - дуга параболы $y = \sqrt{\frac{x}{2}}$, $0 \leq x \leq 2$.
4. Изобразить на комплексной плоскости множество точек, заданных условием $|z - i| > |z + 1|$.
5. Решить дифференциальное уравнение $y' + y \cdot \operatorname{tg} x = \cos^2 x$.

Критерии оценивания контрольной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно реализован каждый метод решения	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

4. Задания для лабораторных работ.

Представлены при описании лабораторных работ в пункте 5 настоящей программы.

Критерии оценивания выполнения лабораторных работ

1. Нормы оценивания каждой лабораторной работы:

№п/п	Структурная часть работы	Количество баллов (*)
1	Демонстрация выполнения конкретного задания, предложенного для самостоятельного решения к лабораторной работе	1 балл за задание

2. Шкала оценивания. Оценка «зачтено» за лабораторную работу выставляется, если набрано не менее 60 % баллов, в противном случае за работу выставляется «незачтено».

5. Индивидуальные дидактические материалы.

(параметр k - номер, под которым стоит фамилия студента в учебном журнале группы)

- Вычислите предел последовательности точек $\left\{ M_n \left(\frac{k \cdot n^2 - k}{3 + 5n^2}, \frac{10 - k \cdot n}{2n - 1} \right) \right\}$ при $n \rightarrow \infty$.
- Найдите и изобразите область определения функции $f(x, y) = \sqrt{k - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$.
- Найдите $\lim_{\substack{x \rightarrow \infty \\ y \rightarrow \infty}} \left((x^2 + y^2) e^{-k\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$.
- Вычислите $f'_x(0, 0)$, $f'_y(0, 0)$, если $f(x, y) = 2kx + x^2 + y^3 - k \cdot y$.
- Является ли функция $f(x, y) = \sqrt[k]{x^k + y^k}$ дифференцируемой в точке $O(0, 0)$? Ответ обоснуйте.
- Исследуйте на экстремум функцию $U = x^2 - kxy + 4y^3$.
- Измените порядок интегрирования в повторном интеграле $J = \int_0^1 kdx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x}} f(x, y)dy$.

8. Вычислите двойной интеграл $\iint_D (x + y^2) dx dy$ по области D , ограниченной кривыми $y = kx$ и $y = \frac{1}{k}x^2$.

9. В двойном интеграле $J = \iint_G (x^2 + y^2) dx dy$, где G – круг, ограниченный окружностью $x^2 + y^2 = kx$, перейти к полярным координатам с полюсом в точке $O(0,0)$, и вычислить полученный интеграл.

10. Найдите объем тела T , ограниченного поверхностями $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = k$.

11. Вычислите криволинейный интеграл второго рода $\int_L (x^2 - ky^2) dx + x dy$, где L – дуга параболы $y = x^2$ от точки $(0, 0)$ до точки $(1, 1)$.

12. Вычислите криволинейный интеграл второго рода $\int_L xy^2 dx - x^2 y dy$, где L – окружность $x^2 + y^2 = k$, применив формулу Грина.

13. Проверьте, является ли выражение $\frac{2kx(1 - e^y)}{(1 + kx^2)^2} dx + \frac{e^y}{1 + kx^2} dy$ полным дифференциалом некоторой функции двух переменных, и, если да, то найдите эту функцию.

14. Вычислите криволинейный интеграл первого рода $\int_L (3x - 2\sqrt{k^2 y}) dl$, где L – часть аст-

роиды $\begin{cases} x = k \cos^3 t \\ y = k \sin^3 t, \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

6. Банк заданий для дифференцированной работы студентов.

1. Найдите частные производные первого порядка функций: $z = \ln \cos(x - 2t)$.

2. Найдите частные производные первого порядка функций: $z = \frac{x}{3y - 2x}$.

3. Найдите частные производные первого порядка функций: $z = \arcsin \frac{y}{x}$.

4. Докажите, что функция $z = e^{\frac{x}{y}} \ln y$ удовлетворяет равенству $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{\ln y}$.

5. Найдите полный дифференциал функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

6. Покажите, что функция $u = xe^{\frac{y}{x}}$ удовлетворяет равенству $x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

7. Найдите экстремум функции: $z = y^2 - x^2 + xy - 2x - 6y$.

8. Найдите экстремум функции: $z = x^3 - y^3 - 3xy$.

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ на множестве $z = xy + x + y$.

10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ на множестве $-2 \leq x \leq 2$.

11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ на множестве $-1 \leq y \leq 4$.

12. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ на множестве $z = x^2 - xy + y^2$.

13. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $z = z(x, y)$ на множестве $|x| + |y| \leq 1$.

14. Сведите двойной интеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ к повторному двумя способами, если D – область, ограниченная кривыми $y = 3x^2$, $y = 6 - 3x$.

15. Вычислите двойной интеграл: $\iint_D (x + y^2) dx dy$, D – прямоугольник, заданный неравенствами $2 \leq x \leq 3$, $1 \leq y \leq 2$.

16. Вычислите двойной интеграл: $\iint_D x dx dy$, D – область, ограниченная кривыми $xy = 6$, $x + y - 7 = 0$.

17. Перейти к полярным координатам и вычислить двойной интеграл $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, если D – круг $x^2 + y^2 \leq 1$.

18. Перейти к полярным координатам и вычислить двойной интеграл $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$, если D – кольцо, ограниченное окружностями $x^2 + y^2 = a^2$ и $x^2 + y^2 = b^2$, $0 < a < b$.

19. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $x^2 + y^2 = 4x$, $y^2 = 4x$, $x = 4$, $(y \geq 0)$.

20. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями $2 - x - y - 2z = 0$, $y = x^2$, $y = x$, $z = 0$.

21. Найдите массу квадратной пластинки со стороной a , в каждой точке которой плотность материала пропорциональна сумме расстояний до диагоналей пластинки.

22. Найдите координаты центра тяжести однородной пластинки, ограниченной двумя параболой $y^2 = x$, $x^2 = y$.

23. Вычислите тройной интеграл: $\iiint_D \frac{dx dy dz}{1 - x - y}$, где область G ограничена плоскостями $x=0$, $x=1$, $y=2$, $y=5$, $z=2$, $z=4$.

24. Вычислите тройной интеграл: $\iiint_D \frac{dx dy dz}{1 - x - y}$, где G – область, ограниченная плоскостями $x+y=1$, $x+y=2$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=3$.

25. Вычислите криволинейные интегралы второго рода вдоль данных кривых:

1. а) $\int_L (x^2 - 2xy) dx + (y^2 + 2xy) dy$, где L – дуга параболы $y = x^2$, $-1 \leq x \leq 1$;

2. б) $\int_L (x + y) dx + (x - y) dy$, где L – окружность $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$.

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

По итогам изучения дисциплины в каждом семестре предусмотрен экзамен, который проводится в письменной форме, направлен на контроль освоения обучающимися теоретического и практического программного материала.

Оценочные средства

1. Вопросы к экзамену.

1 семестр

1. Понятие множества. Действительные числа. Модуль числа и его свойства.
2. Понятие функции. Общие свойства функций.
3. Понятие числовой последовательности. Предел последовательности (определение). Теоремы о единственности предела последовательности.
4. Предел числовой последовательности. Бесконечно малые последовательности. Леммы о бесконечно малых. Признак предела.
5. Арифметические операции над последовательностями. Теорема о пределе промежуточной последовательности.
6. Принцип вложенных стягивающихся отрезков.
7. Различные определения предела функции в точке. Односторонние пределы. Предел функции на бесконечности.
8. Арифметические операции над функциями и их пределами.
9. Бесконечно малые и бесконечно большие функции в точке.
10. Предел отношения синуса к аргументу, стремящемуся к 0.
11. Понятие сложной функции. Теорема о пределе сложной функции.
12. Бесконечно малые функции, их сравнение. Эквивалентные бесконечно малые и их применение при вычислении пределов.
13. Различные определения непрерывности функции в точке.
14. Теорема о свойствах функции, непрерывной в точке.
15. Теорема об ограниченности функции, непрерывной на отрезке.
16. Теорема о наибольшем (наименьшем) значении непрерывной функции.
17. Теорема о нуле непрерывной на отрезке функции.
18. Теорема о промежуточных значениях непрерывной функции.
19. Понятие производной, примеры вычисления. Геометрический и механический смысл производной.
20. Теорема о непрерывности функции, имеющей производную.
21. Правила вычисления производных. Таблица производных.
22. Производная сложной и обратной функций.
23. Дифференцируемость функции, связь с существованием производной.
24. Дифференциал функции и его применение в приближенных вычислениях.
25. Лемма Ферма.
26. Теоремы Роля, Лагранжа, Коши.
27. Правило Лопиталя.
28. Исследование функций с помощью производной.
29. Первообразная и неопределенный интеграл. Таблица интегралов.
30. Методы вычисления неопределенных интегралов.
31. Понятие определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.
32. Методы вычисления определенных интегралов.
33. Различные приложения определенных интегралов (вычисление площадей фигур, объемов тел и др.)

Образец экзаменационного задания

1. Основные теоремы дифференциального исчисления, лемма Ферма (доказательство и геометрический смысл).
2. Непрерывность функции одной переменной в точке.

3. Вычислить пределы:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-n)(2n+1)}{n^2-5}$; б) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-4x-5}{x^2-25}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{e^{3x}-1}$.

4. Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}}$; б) $\int_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$.

Замечание: возможен 1 теоретический и 4 практических задания.

Критерии оценивания ответа на экзамене

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Правильный ответ на вопрос	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25, 0,5 и 0,75 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

2 семестр

1. Понятие числового ряда и его суммы. Сходимость числового ряда. Примеры.
2. Гармонический и обобщённо-гармонический числовые ряды, геометрический ряд, их сходимость.
3. Необходимое условие сходимости числового ряда. Основные свойства сходящихся числовых рядов.
4. Положительные и неотрицательные числовые ряды, признаки их сходимости. Примеры.
5. Знакопеременные числовые ряды, абсолютная и условная сходимость. Примеры.
6. Знакопеременный числовой ряд. Признак Лейбница. Примеры.
7. Понятие функционального ряда. Поточечная сходимость функционального ряда.
8. Степенные ряды (определение, структура области сходимости, формулы для нахождения радиуса сходимости, пример).
9. Понятие функции нескольких переменных.
10. Понятие частных производных функции нескольких переменных. Примеры.
11. Частные производные высших порядков функции нескольких переменных. Примеры.
12. Понятие дифференцируемости и дифференциала функции нескольких переменных.
13. Необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции нескольких переменных.
14. Применение дифференциала функции двух переменных в приближённых вычислениях (формула, пример).
15. Экстремумы функций двух переменных (определения, алгоритм исследования, пример).
16. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой ограниченной области (алгоритм исследования, пример).
17. Понятие двойного интеграла, условия интегрируемости функции двух переменных.
18. Свойства двойного интеграла.

19. Понятие повторного интеграла. Вычисление двойного интеграла сведением к повторному. Примеры.
20. Понятие криволинейного интеграла второго рода, его свойства.
21. Вычисление криволинейного интеграла второго рода. Примеры.
22. Криволинейный интеграл по замкнутому контуру. Формула Остроградского-Грина. Пример.
23. Понятие комплексного числа, его действительная и мнимая части, модуль и аргумент, формы записи комплексных чисел. Примеры.
24. Действия над комплексными числами. Примеры.
25. Понятие функции комплексного переменного. Примеры. Элементарные функции комплексного переменного.
26. Понятие производной функции комплексного переменного. Условия Даламбера-Эйлера. Примеры.
27. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексного переменного.
28. Понятие интеграла от функции комплексного переменного, его свойства.
29. Связь комплексного интеграла с определённым интегралом. Примеры.
30. Связь комплексного интеграла с двойным интегралом. Примеры.
31. Интегрирование аналитических функций. Формула Ньютона-Лейбница. Интегральная формула Коши. Примеры.
32. Понятие дифференциального уравнения и его решения (определение, общий вид обыкновенных дифференциальных уравнений, порядок уравнения, определения решения, виды решений, примеры).
33. Уравнения с разделяющимися переменными (понятие, алгоритм решения, пример).
34. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка (виды, алгоритм решения, пример).
35. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (вид, понятие характеристического уравнения, структура общего решения уравнения в зависимости от корней характеристического уравнения, примеры).
36. Нахождение частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами методом неопределённых коэффициентов (стандартные ситуации, виды частных решений, примеры).

Образец экзаменационного задания

1. Положительные и неотрицательные числовые ряды, признаки их сходимости.
2. Экстремумы функций двух переменных (определения, алгоритм исследования).
3. Выполнить действия: а) $(21-5i) + (3+4i)$; б) $(5i - 4)^2$; в) $\frac{i}{7+i}$.

4. Найти и изобразить области определения функций:

а) $z = \cos(x+y) - 12xy^4$; б) $z = \ln(2y+x)$; в) $z = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$.

5. Решить дифференциальное уравнение $y' = (1+y^2) \cdot \cos x$.

Замечание: возможен 1 теоретический и 4 практических задания.

Критерии оценивания ответа на экзамене

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Правильный ответ на вопрос	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25, 0,5 и 0,75 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5

2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1 Список основной литературы

1 семестр

1. Шипачев, В. С. Высшая математика: учебное пособие для вузов / В. С. Шипачев. — 8-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 447 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-12319-7. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/449732>.
2. Шипачев, В. С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебник и практикум для вузов / В. С. Шипачев. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 212 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04282-5. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/453124>.
3. Кытманов, А. М. Математический анализ: учебное пособие для бакалавров / А. М. Кытманов. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 607 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-2785-6. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/425244>.
4. Шагин, В. Л. Математический анализ. Базовые понятия: учебное пособие для вузов / В. Л. Шагин, А. В. Соколов. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 245 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-00884-5. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/451404>.

2 семестр

1. Шипачев, В. С. Высшая математика: учебное пособие для вузов / В. С. Шипачев. — 8-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 447 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-12319-7. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/449732>.
2. Шипачев, В. С. Дифференциальное и интегральное исчисление: учебник и практикум для вузов / В. С. Шипачев. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 212 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04282-5. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/453124>.
3. Кытманов, А. М. Математический анализ: учебное пособие для бакалавров / А. М. Кытманов. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 607 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-2785-6. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/425244>.

7.2 Список дополнительной литературы

1 семестр

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. — М.: Айрис Пресс, 2004. — 288 с.
2. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. — Часть 1. — М.: Айрис-пресс, 2013. — 576 с.
3. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - СПб.: Изд-во «Профессия», 2008. — 416 с.
4. Шерстнёва Н.А. Математика. Математический анализ: учебно-методическое пособие. — Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2014. — 48 с.

2 семестр

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. 2 часть. — М.: Айрис Пресс, 2004. — 256 с.

2. Расулов К.М. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Учебное пособие. – Смоленск: СмолГУ, 2008. – 145 с.
3. Расулов К.М. Практикум по математическому анализу. Числовые и функциональные ряды: учебное пособие. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных – Смоленск: Изд-во СОИРО, 2014. – 251 с.
4. Расулов К.М. Обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными. Учебное пособие. – Смоленск: СмолГУ, 2010. – 123 с.
5. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике. / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – Часть 2. – М.: Айрис-пресс, 2013. – 592 с.
6. Петрушко И.М., Елисеев А.Г., Качалов В.И. и др. Теория функций комплексного переменного: лекции и практикум. - СПб.: Изд-во «Лань», 2010.
7. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. - СПб.: Изд-во «Профессия», 2008. – 416 с.
8. Шерстнёва Н.А. Математический анализ. Числовые и функциональные ряды. Функции нескольких переменных. Элементы комплексного анализа. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебно-методическое пособие. - Смоленск: Изд-во СмолГУ, 2013. – 44 с.

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

- Система дистанционного обучения Смоленского государственного университета <http://cdo.smolgu.ru>
- Электронно-библиотечная система университета <http://biblioteka.smolgu.ru>
- Национальный открытый университет <http://www.intuit.ru>
- Образовательный математический сайт <http://exponenta.ru>
- Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru>

8. Материально-техническое обеспечение

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используется интерактивная доска; проектор; электронная библиотека кафедры, содержащая электронные учебники и задачки по различным главам математического анализа; система компьютерной математики Mathematica. Осуществляется поиск информации в WWW-пространстве; работа с Web-страницами и ресурсами сети Интернет.

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине в университете имеется следующая необходимая инструментальная база: учебные аудитории для проведения практических занятий; компьютерный класс, оборудованный персональными ЭВМ с необходимым математическим софтом и выходом в Интернет для проведения лабораторных занятий; кабинеты, оборудованные проекторами и электронными досками для проведения лекционных занятий. Имеется кабинет ксерокопирования и кафедральный принтер для подготовки индивидуальных дидактических карточек, контрольных и экзаменационных материалов. Доступна электронная библиотека кафедры математического анализа. Используются портреты великих математиков, необходимые чертёжные инструменты.

Учебная аудитория для проведения лекционных и практических занятий, лабораторных занятий, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, для самостоятельной работы студентов оснащена следующим оборудованием: стандартная учебная мебель (количество учебных посадочных мест для лекций и практик соответствует количеству студентов и не менее 15 для лабораторных работ), стол и стул для преподавателя – по 1 шт., возможно кафедра для лектора – 1 шт., доска настенная – 1 шт., напольный мобильный проекционный экран DA-LITE – 1 шт., мультимедиапроектор BenQ – 1 шт., ноутбук/компьютер – 1 шт., колонки Genius – 1 шт., персональные компьютеры, объединенные в сеть с выходом в Интернет и с установленной системой компьютерной математики Wolfram Mathematica – 16 шт. (например, лекционные и практические занятия проводятся в аудитории 417 учебного корпуса № 2 или в аудитории 327

учебного корпуса № 2; лабораторные занятия проводятся в аудитории 235 учебного корпуса № 2; эти же аудитории задействованы для самостоятельной работы студентов).

9. Программное обеспечение

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине используется Информационно-вычислительный центр физико-математического факультета (Положение о Центре утверждено приказом ректора №01-66 от 28.09.2015 г.).

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используются информационные технологии обработки данных с помощью прикладных программных продуктов MicrosoftExcel, MicrosoftPowerPoint. Осуществляется поиск информации в WWW-пространстве; работа с Web-страницами и социальными ресурсами сети Интернет, а также используются различные системы компьютерной математики (WolframMathematica, MathCAD).

Программное обеспечение: MicrosoftOpenLicense (WindowsXP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), Лицензия 66920993 от 24.05.2016, обновление раз в три года; MicrosoftOpenLicense (WindowsXP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), Лицензия 66975477 от 03.06.2016, обновление раз в три года; Dr. WebServer/DesktopSecuritySuite (Антивирус) Лицензия EE4E-QN5S-6FG2-N76B (Ежегодное обновление); KasperskyEndpointSecurity для бизнеса – Стандартный, Лицензия 1FB6151216081242, ежегодное обновление.

Электронные библиотечные системы и электронная информационно-образовательная среда: электронная библиотечная система «ЭБС ЮРАЙТ», Договор № 3074 от 15.11.2017, ежегодное обновление; СДО Русский Moodle 3KL Norm с техническим обслуживанием, Акт на передачу прав №УТДЮ0001785 от 06.12.2016, ежегодное обновление.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 03B6A3C600B7ADA9B742A1E041DE7D81B0
Владелец: Артеменков Михаил Николаевич
Действителен: с 04.10.2021 до 07.10.2022