

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»
Проректор по учебно-
методической работе
Ю. А. Устименко.
«02» сентября 2020 г.

Рабочая программа дисциплины
Б1.О.21 Теория вероятностей и математическая статистика

Направление подготовки: **08.03.01 Строительство**

Направленность (профиль): **Промышленное и гражданское строительство**

Форма обучения: очная

Курс – 2

Семестр – 3

Всего зачетных единиц – 4, часов – 144

Форма отчетности: экзамен – 3 семестр

Программу разработал

кандидат физико-математических наук, доцент Хартов А. А.

Одобрена на заседании кафедры

«26» августа 2020 г., протокол № 1

Заведующий кафедрой _____ К.М. Расулов

Смоленск
2020

1. Место дисциплины в структуре ОП

Курс «Теория вероятностей и математическая статистика» играет фундаментальную роль в теоретической и практической подготовке студентов направления подготовки 08.03.01 Строительство (профиль «Промышленное и гражданское строительство»). Этот курс относится к обязательным для изучения дисциплинам. При изучении данной дисциплины необходимы компетенции студентов, сформированные при освоении таких дисциплин, как «Математический анализ» и «Алгебра и геометрия». Курс «Теория вероятностей и математическая статистика» расширяет математическую подготовку обучающегося, дополняя ее знаниями по применению вероятностно-статистических методов для решения практических задач.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
ОПК-1. Способен решать задачи профессиональной деятельности на основе использования теоретических и практических основ естественных и технических наук, а также математического аппарата	Знать: основные положения естественных и технических наук, а также математический аппарат, необходимые для успешного решения задач профессиональной деятельности; Уметь: решать основные задачи профессиональной деятельности на основе теоретических и практических основ естественных и технических наук, применяя соответствующий математический аппарат; Владеть: навыками решения основных задач профессиональной деятельности на основе положений естественных и технических наук.

3. Содержание дисциплины

- 1. Вероятностное пространство.** Предмет теории вероятностей. Пространство элементарных событий. Сигма-алгебра случайных событий. Случайные события и их классификация. Понятие вероятности. Вероятностное пространство. Основные свойства вероятности. Формула-включений исключений.
- 2. Классические вероятностные модели.** Классическое определение вероятности. Геометрические вероятности. Независимость событий. Условные вероятности. Формула умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Схема Бернулли и ее обобщения. Предельные теоремы для схемы Бернулли: закон больших чисел Бернулли, теоремы Муавра-Лапласа, теорема Пуассона.
- 3. Случайные величины, векторы и их распределения.** Понятие случайной величины. Распределение случайной величины. Типы распределений. Важные дискретные распределения. Важные непрерывные распределения. Понятие случайного вектора. Распределение случайного вектора. Важные примеры многомерных распределений. Функции случайных величин.
- 4. Числовые характеристики случайных величин и векторов.** Математическое ожидание и его свойства. Дисперсия и ее свойства. Вычисление математических ожиданий и дисперсий важных распределений. Мода и медиана. Моменты. Ковариация, коэффициент корреляции и их свойства. Неравенства для числовых характеристик.
- 5. Предельные теоремы.** Законы больших чисел. Центральная предельная теорема Леви. Связь с предельными теоремами для схемы Бернулли. Применение предельных теорем.
- 6. Выборка и ее характеристики.** Задачи математической статистики. Выборка. Вариационный ряд. Эмпирическая функция распределения и ее свойства. Полигон и гистограмма. Выборочные среднее, дисперсия, моменты, другие характеристики и их свойства.
- 7. Оценивание неизвестных параметров распределений.** Задача оценивания параметров распределения. Несмещенность, эффективность и состоятельность оценки. Методы

построения оценок. Доверительное оценивание. Построение доверительных интервалов для параметров нормального распределения.

8. **Проверка статистических гипотез.** Понятие статистической гипотезы. Ошибки первого и второго рода. Критерии проверки гипотез и выбор критической области. Критерии согласия. Критерий однородности. Критерий независимости.
9. **Линейная регрессия и метод наименьших квадратов.** Модель линейной регрессии. Метод наименьших квадратов и оптимальность его оценок.

4. Тематический план

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий (в соответствии с учебным планом)				
			лекции	семинары	практические занятия	лабораторные занятия	самостоятельная работа
1	Вероятностное пространство	4	2	-	0	-	2
2	Классические вероятностные модели	28	8	-	10	-	10
3	Контрольная работа	3	-	-	2	-	1
4	Случайные величины, векторы и их распределения	20	6	-	6	-	8
5	Числовые характеристики случайных величин и векторов	15	4	-	5	-	6
6	Предельные теоремы	5	2	-	1	-	2
7	Контрольная работа	3	-	-	2	-	1
8	Выборка и ее характеристики	6	2	-	2	-	2
9	Оценивание неизвестных параметров распределений	12	4	-	2	-	6
10	Проверка статистических гипотез	11	4	-	1	-	6
11	Линейная регрессия и метод наименьших квадратов	7	2	-	1	-	4
12	Контрольная работа	3	-	-	2	-	1
13	Экзамен	27	-	-	-	-	27
Итого		144	34	-	34	-	49+27

5. Виды образовательной деятельности¹

Занятия лекционного типа

Лекция 1. «Вероятностное пространство»: предмет теории вероятностей, пространство элементарных событий, сигма-алгебра случайных событий, случайные события и их классификация, понятие вероятности, вероятностное пространство, основные свойства вероятности, формула-включений исключений.

Лекции 2-5. «Классические вероятностные модели»: классическое определение вероятности, геометрические вероятности, независимость событий, условные вероятности, формула умножения вероятностей, формула полной вероятности, формула Байеса, схема Бернулли и ее обобщения, закон больших чисел Бернулли, теоремы Муавра-Лапласа, теорема Пуассона.

Лекции 6-8. «Случайные величины, векторы и их распределения»: понятие случайной величины, распределение случайной величины, типы распределений, важные дискретные распределения, важные непрерывные распределения, понятие случайного вектора, распределение случайного вектора, важные примеры многомерных распределений, функции случайных величин.

Лекции 9-10. «Числовые характеристики случайных величин и векторов»: математическое ожидание и его свойства, дисперсия и ее свойства, вычисление математических ожиданий и дисперсий важных распределений, мода и медиана, моменты, ковариация, коэффициент корреляции и их свойства, неравенства для числовых характеристик.

Лекция 11. «Предельные теоремы»: законы больших чисел, центральная предельная теорема Леви, связь с предельными теоремами для схемы Бернулли, применение предельных теорем.

Лекция 12. «Выборка и ее характеристики»: задачи математической статистики, выборка, вариационный ряд, эмпирическая функция распределения и ее свойства, полигон и гистограмма, выборочные среднее, дисперсия, моменты, другие характеристики и их свойства.

Лекции 13-14. «Оценивание неизвестных параметров распределений»: задача оценивания параметров распределения, несмещенность, эффективность и состоятельность оценки, методы построения оценок, доверительное оценивание, построение доверительных интервалов для параметров нормального распределения.

Лекции 15-16. «Проверка статистических гипотез»: понятие статистической гипотезы, ошибки первого и второго рода, критерии проверки гипотез и выбор критической области, критерии согласия, критерий однородности, критерий независимости.

Лекция 17. «Линейная регрессия и метод наименьших квадратов»: модель линейной регрессии, метод наименьших квадратов и оптимальность его оценок.

Занятия семинарского типа

Практические занятия 1-5. «Классические вероятностные модели».

Задания для практического занятия размещены в учебном пособии[8] «Теория вероятностей в примерах и задачах» модуль №1, разделы 1.3 — 1.6. Примеры заданий по данной теме:

Задача 1. Игральная кость бросается один раз. Описать пространство элементарных событий, указать элементарные события, благоприятствующие событиям: $A_1 = \{\text{выпало четное число очков}\}$; $A_2 = \{\text{выпало не менее 4 очков}\}$; $A_3 = \{\text{выпало более 6 очков}\}$.

Задача 2. Построить пространство Ω для следующих испытаний:
а) проводится одна игра в шахматы;
б) трижды подбрасывается монета;
в) подсчитывается число студентов группы, сдавших экзамены по теории вероятностей.

¹ Содержание данного раздела может быть представлено в электронной информационно-образовательной среде СмолГУ или в опубликованном учебно-методическом пособии.

Задача 3. В урне находится 10 одинаковых шаров, пронумерованных числами $0, 1, 2, \dots, 9$. Из нее извлекаются по одному 4 шара. После каждого извлечения вынутый шар возвращается обратно. Описать пространство Ω для этого эксперимента и найти число его элементов.

Задача 4. Из колоды игральных карт (всего их 36) извлекают одну. Составить не менее двух пространств элементарных событий для данного опыта.

Практическое занятие 6. «Контрольная работа». Образец см. ниже.

Практические занятия 7-9. «Случайные величины, векторы и их распределения».

Задания для практического занятия размещены в учебном пособии [8] «Теория вероятностей в примерах и задачах» модуль №2, разделы 2.1-2.2, 2.4, 2.5. Примеры заданий по данной теме:

Задача 1. Монета подбрасывается 5 раз. Построить многоугольник распределения д.с.в. Z – числа выпадений герба.

Задача 2. Три стрелка, ведущие огонь по цели, сделали по одному выстрелу. Вероятности их попадания в цель соответственно равны $0,5, 0,6, 0,8$. Построить ряд распределения с.в. X – числа попаданий в цель.

Задача 3. Вероятность того, что автомат при опускании одной монеты срабатывает правильно, равна $0,98$. Построить ряд распределения с.в. – числа опусканий монет в автомат до первого правильного срабатывания автомата. Найти вероятность того, что будет опущено 5 монет. Решить эту же задачу при условии, что в наличии всего 3 монеты.

Задача 4. Построить ряд распределения числа попаданий в ворота при двух одиннадцатиметровых ударах, если вероятность попадания при одном ударе равна $0,7$.

Практические занятия 10-12. «Числовые характеристики случайных величин и векторов. Предельные теоремы».

Задания для практического занятия размещены в учебном пособии [8] «Теория вероятностей в примерах и задачах» модуль №2, разделы 2.3, 2.6. Примеры заданий по данным темам:

Задача 1. Закон распределения д.с.в. X задан таблицей распределения

x_i	1	2	3	4
p_i	1/8	1/4	1/3	c

Найти c , $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, $P\{X < 3\}$.

Задача 2. Функция распределения д.с.в. X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ 0,2, & 0 < x \leq 1, \\ 0,6, & 1 < x \leq 2, \\ 0,9, & 2 < x \leq 3, \\ 1, & 3 < x. \end{cases}$$

Найти $M(X)$, $M(X^2)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Задача 3. Независимо испытываются на надежность 3 прибора. Вероятности выхода из строя каждого прибора одинаковы и равны 0,6. Найти $M(X)$ и $\sigma(X)$, где с.в. X – число вышедших из строя приборов.

Задача 4. Найти математическое ожидание суммы числа очков, которые выпадают при бросании двух игральных костей.

Практическое занятие 13. «Контрольная работа». Образец см. ниже.

Практическое занятие 14. «Выборка и ее характеристики».

Задания для практического занятия размещены в учебном пособии[8] «Математическая статистика в примерах и задачах» модуль №1, раздел 1.1-1.2. Примеры заданий по данной теме:

Задача 1. Для заданий 1–2 построить вариационный и статистический ряды. Построить полигон частот.

1. 11, 15, 12, 0, 16, 19, 6, 11,12, 13, 16, 8, 9, 14, 5, 11, 3.

2. 17, 18, 16, 16, 17, 18, 19, 17, 15, 17, 19, 18, 16, 16, 16, 18, 18.

Задача 2. Построить полигон частот по данному распределению выборки:

x_i	15	20	25	30	35
m_i	10	15	30	20	25

Задача 3. Построить полигон относительных частот по данному распределению выборки:

x_i	2	4	5	7	10
p_i^*	0,15	0,2	0,1	0,1	0,45

Задача 4. Построить гистограмму относительных частот по данному распределению выборки:

Номер интервала	Частичный интервал	Число наблюдений, попавших в интервал
1	2 – 5	6
2	5 – 8	10
3	8 – 11	4
4	11 – 14	5

Задача 5. Ежегодно американский журнал «Fortune» публикует список наиболее богатых людей в мире с оценками их состояний в миллиардах долларов. Ниже приводим результаты одной из публикаций:

25.0, 20.9, 8.7, 7.5, 7.4, 6.0, 5.7, 5.5, 5.0, 5.0, 4.4, 4.0, 3.6, 3.4, 3.1, 3.0, 3.0, 2.9, 2.8, 2.8, 2.5, 2.5, 2.5, 2.4, 2.4, 2.4, 2.2, 2.0, 2.0, 2.0, 1.9, 1.8, 1.7, 1.6, 1.5, 1.5, 1.5, 1.5, 1.4, 1.3, 1.3, 1.3, 1.2, 1.2, 1.2, 1.2, 1.1, 1.1, 1.1, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0, 1.0.

Практическое занятие 15. «Оценивание неизвестных параметров распределений».

Задания для практического занятия размещены в учебном пособии [8] «Математическая статистика в примерах и задачах» модуль №1, разделы 1.3-1.4. Примеры заданий по данной теме:

Задача 1. Найти методом моментов оценку параметра λ распределения Пуассона.

Задача 2. Найти методом моментов оценку параметра p (вероятности «успеха») для геометрического распределения.

Задача 3. Найти методом моментов оценку параметра θ для геометрического распределения с вероятностью «успеха» $p = \frac{1}{1+\theta}$, $\theta \geq 0$.

Задача 4. В случае сдвинутого показательного распределения $f(x, \theta, \mu) = \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}$, $x > \mu$ ($\theta, \mu > 0$) с помощью метода моментов найти оценки $\tilde{\theta}$ и $\tilde{\mu}$ параметров θ и μ соответственно.

Задача 5. Найти методом моментов оценку параметра α гамма-распределения

$$f(x, \alpha) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$$

Практическое занятие 16. «Проверка статистических гипотез. Линейная регрессия и метод наименьших квадратов».

Задания для практического занятия размещены в учебном пособии[8] «Математическая статистика в примерах и задачах» модуль №1, раздел 1.5. Примеры заданий по данным темам:

Задача 1. Среднесуточная продажа хлеба в течение многих лет для данного магазина составляла 6 т при среднем квадратичном отклонении 0,05 т. Сегодня магазином было продано 7 т хлеба. Можно ли при 5%-м уровне значимости предполагать, что и завтра будет продано 7 т хлеба?

Задача 2. Акционерное общество выпускает печенье «Русские узоры» в пачках, на которых написано: масса нетто 200 г. Осуществлена выборка для оценки средней массы печенья в пачках, выпущенных московской и Санкт-Петербургской фабриками АО. Результаты выборок таковы (указана масса пачек печенья «Русские узоры»):

Московская фабрика
201, 195, 197, 199, 202, 198, 199, 203, 195,
196, 198, 199, 194, 203, 195, 202, 197

Санкт-Петербургская фабрика
203, 207, 191, 193, 197, 201,
196, 192, 194, 195, 198, 196.

Предполагая, что случайная величина массы пачки печенья распределена по нормальному закону с одинаковыми дисперсиями, и считая выборки независимыми, определить:

- а) средние выборочные и «исправленные» средние квадратичные отклонения массы для каждой фабрики;
- б) для $\alpha = 0,05$ значимо или нет различие между средними выборочными (если это различие имеется);
- в) является ли величина 200 г математическим ожиданием массы при 5%-м уровне значимости?

Задача 3. Расход сырья на единицу продукции составил:

по старой технологии

Расход сырья	x_i	305	307	308
Число изделий	m_i	1	4	4

по новой технологии

Расход сырья	x_i	303	304	305	308
--------------	-------	-----	-----	-----	-----

Число изделий	m_i	2	6	4	1
---------------	-------	---	---	---	---

Предположив, что соответствующие случайные величины X и Y имеют нормальные распределения с математическими ожиданиями a_x и a_y и одинаковыми дисперсиями, проверить:

а) при уровне значимости 0,01 гипотезу $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ при альтернативной $H_1 : \sigma_x^2 \neq \sigma_y^2$,

б) при уровне значимости 0,05 гипотезу $H_0 : a_x = a_y$ при альтернативной $H_1 : a_x \neq a_y$.

Задача 4. Компания, занимающаяся междугородными пассажирскими перевозками, решила закупить партию новых автобусов. Приобретение новых автобусов принесет компании существенную выгоду лишь в том случае, если расход топлива на 100 км трассы на новых автобусах не превысит 19,5 литра. Компания-продавец предоставила покупателю автобус на 4 недели (24 рабочих дня) для проверки реального расхода топлива. Результаты ежедневных прогонов показали, что средний расход топлива на 100 км пути составил 19,925 литра при исправленном среднем квадратическом отклонении 1,6 л. Посоветуете ли Вы автотранспортной компании покупать новые автобусы? (Оцените гипотезу на уровне значимости $\alpha = 0,05$).

Задача 5. Дисперсия генеральной совокупности $\sigma = 100$. Выборка 25 единиц из этой совокупности дала среднюю арифметическую, равную 17. Можем мы отклонить $H_0 : a = 21$?при конкурирующей гипотезе $H_0 : a \neq 21$?Принять $\alpha = 0,05$?

Практическое занятие 17. «Контрольная работа». Образец см. ниже.

Самостоятельная работа

Темы «Вероятностное пространство», «Классические вероятностные модели». Задания для самостоятельной работы размещены в учебном пособии[8] «Теория вероятностей в примерах и задачах» модуль №1, разделы 1.3 — 1.6. Примеры заданий по данным темам:

Задача 10. Назвать противоположные события для следующих событий:

- а) $A = \{\text{выигрыш первого игрока в шахматной партии}\}$;
- б) $B = \{\text{произошло хотя бы одно попадание при десяти выстрелах}\}$;
- в) $C = \{\text{произошло три попадания при трех выстрелах}\}$;
- г) $D = \{\text{произошло не более двух попаданий при пяти выстрелах}\}$;
- д) $E = \{\text{в семейной паре муж старше жены}\}$.

Задача 11. Из корзины, содержащей красные, желтые и белые розы, выбирается один цветок. Пусть события $A = \{\text{выбрана красная роза}\}$, $B = \{\text{выбрана желтая роза}\}$, $C = \{\text{выбрана белая роза}\}$.

Что означают события:

- а) \bar{A} ; б) $A + B$; в) $A \cdot C$; г) $\overline{A + B}$; д) $\bar{A} + \bar{B}$; е) $AB + C$?

Задача 12. В примере 4 найти выражения для следующих событий:

- а) $E = \{\text{с задачей не справился ни один из студентов}\}$;
- б) $F = \{\text{задачу решили не более двух студентов}\}$.

Задача 13. В примере 1 выяснить, что означают следующие события:

- а) $A + B$; б) $A \cdot D$; в) $\overline{C - D}$; г) $\overline{A \cdot B} - C$; д) $\overline{A \cdot D}$; е) $\bar{A} \cdot \bar{B}$.

Задача 14. Пусть A, B, C – три произвольных события. Выразить через A, B, C и их отрицания следующие события:

- а) произошло только событие C ;
- б) произошли все три события;
- в) произошло, по крайней мере, одно из этих событий;
- г) произошло, по крайней мере, два события;
- д) произошло только два события;
- е) ни одно событие не произошло;
- ж) произошло не более двух событий.

Тема «Случайные величины, векторы и их распределения». Задания для самостоятельной работы размещены в учебном пособии[8] «Теория вероятностей в примерах и задачах» модуль №2, разделы 2.1-2.2, 2.4, 2.5. Примеры заданий по данной теме:

Задача 5. Вероятность того, что студент найдет в библиотеке нужную ему книгу, равна 0,4. Построить ряд распределения числа библиотек, которые он может посетить, если ему доступны четыре библиотеки.

Задача 6. Автомобиль на пути к месту назначения встретит 5 светофоров, каждый из которых пропустит его с вероятностью $1/3$. Построить ряд распределения числа светофоров, пройденных машиной до первой остановки или до прибытия к месту назначения.

Задача 7. У дежурного имеется 7 разных ключей от разных комнат. Вынув наудачу ключ, он пробует открыть дверь одной из комнат. Построить ряд распределения числа попыток открыть дверь (проверенный ключ второй раз не используется). Построить многоугольник этого распределения.

Задача 8. АТС обслуживает 1500 абонентов. Вероятность того, что в течение 3 минут на АТС поступит вызов, равна 0,002. Построить ряд распределения с.в. X , равной числу вызовов, поступивших на АТС в течение 3 минут. Найти вероятность того, что за это время поступит более трех вызовов.

Темы «Числовые характеристики случайных величин и векторов», «Предельные теоремы». Задания для самостоятельной работы размещены в учебном пособии [8] «Теория вероятностей в примерах и задачах» модуль №2, разделы 2.3, 2.6. Примеры заданий по данным темам:

Задача 5. Найти $M(X)$ и $\sigma(X)$ для случайной величины

$$X = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i,$$

где $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ – независимые дискретные случайные величины, имеющие одно и то же математическое ожидание a и одну и ту же дисперсию σ^2 .

Задача 6. Вероятность появления события A в каждом независимом испытании одинакова и равна p . Найти эту вероятность, если для д.с.в. $X = \{\text{число появлений события } A \text{ в } 5 \text{ испытаниях}\}$ дисперсия равна $D(X) = 1,25$.

Задача 7. Вероятность того, что студент сдаст экзамен на «5», равна 0,2, на «4» – 0,4. Определить вероятности получения им оценок «3» и «2», если известно, что $M(X) = 3,7$, где д.с.в. X – оценка, полученная студентом на экзамене.

Задача 8. Дан ряд распределения д.с.в. X :

x_i	1	2	3	4
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

Найти начальные и центральные моменты первых четырех порядков.

Тема «Выборка и ее характеристики». Задания для самостоятельной работы размещены в учебном пособии «Математическая статистика в примерах и задачах» модуль №1, раздел 1.1-1.2. Примеры заданий по данной теме:

Задача 1. Найти выборочное среднее, исправленную выборочную дисперсию для статистического ряда.

x_i	-1	0	1	3	5
m_i	15	5	25	55	10

Задача 2. Найти выборочное среднее, выборочную дисперсию для интервального статистического ряда

Границы интервалов	[0; 0,02)	[0,02; 0,04)	[0,04; 0,06)	[0,06; 0,08]
m_i	4	5	8	14

Задача 3. Имеются следующие данные о числе производственных подразделений на каждом из 100 сельскохозяйственных предприятий:

2, 4, 5, 3, 4, 6, 7, 4, 5, 3, 3, 4, 2, 6, 5, 4, 7, 2, 3, 4,
 4, 5, 4, 3, 4, 6, 6, 5, 2, 3, 4, 3, 5, 6, 7, 2, 4, 3, 4, 5,
 4, 6, 7, 2, 5, 3, 5, 4, 3, 7, 2, 4, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 6, 7,
 6, 4, 3, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 5, 4, 3, 2, 6, 4, 5, 7, 5, 4, 3,
 4, 5, 7, 4, 3, 4, 5, 6, 5, 3, 4, 2, 2, 4, 3, 7, 5, 6, 4, 5.

Найти выборочное среднее, исправленную выборочную дисперсию и выборочную моду.

Задача 4. Численность населения городов России с числом жителей более 1 млн. человек на 2002 г. представлена в таблице.

Город	Население, тыс. человек
Волгоград	1013
Екатеринбург	1293
Казань	1105

Москва	10 358
Нижний Новгород	1311
Новосибирск	1426
Омск	1134
Пермь	1000
Ростов-на-Дону	1070
Самара	1158
Санкт-Петербург	4669
Уфа	1042
Челябинск	1078

Найти выборочное среднее, выборочную дисперсию, среднее квадратическое отклонение, выборочную медиану, крайние члены вариационного ряда, размах выборки.

Задача 5. Ниже приведены результаты измерения роста (в см) случайно отобранных 100 студентов:

Рост	154–158	158–162	162–166	166–170	170–174	174–178	178–182
Число студентов	10	14	26	28	12	8	2

Найти выборочное среднее, выборочную дисперсию, выборочную моду.

Тема «Оценивание неизвестных параметров распределений». Задания для самостоятельной работы размещены в учебном пособии[8] «Математическая статистика в примерах и задачах» модуль №1, разделы 1.3-1.4. Примеры заданий по данной теме:

Задача 1. Пусть случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[a, b]$. Найти методом моментов оценки для a и b .

Задача 2. Пусть случайная величина X равномерно распределена на $[c - \sqrt{d}; c + \sqrt{d}]$. Найти методом моментов оценки для c и d .

Задача 3. Найти оценку методом моментов для параметра λ распределения Лапласа,

заданного функцией плотности

$$f(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x|}$$

Задача 4. Случайная величина X (число семян сорняков в пробе зерна) распределена по

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

закону Пуассона

Ниже приведено распределение семян сорняков в $n = 1000$ пробах зерна (в первой строке указано количество x_i сорняков в одной пробе; во второй строке указана частота m_i – число проб, содержащих x_i семян сорняков):

x_i	0	1	2	3	4	5	6
m_i	405	366	175	40	8	4	2

Найти методом моментов точечную оценку параметра λ . Оценить вероятность того, что в пробе зерна не будет сорняков.

Задача 5. Случайная величина X (срок службы изделия) имеет показательное распределение $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} (x \geq 0)$. В таблице приведены сгруппированные данные по срокам службы (в часах) для $n = 200$ изделий.

x_i	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
m_i	133	45	15	4	2	1

Найти методом моментов точечную оценку неизвестного параметра λ показательного распределения. Оценить время, которое изделие прослужит с вероятностью 90 %.

Темы «Проверка статистических гипотез», «Линейная регрессия и метод наименьших квадратов». Задания для самостоятельной работы размещены в учебном пособии [8] «Математическая статистика в примерах и задачах» модуль №1, раздел 1.5. Примеры заданий по данным темам:

Задача 1. Производители нового вида аспирина утверждают, что он снимает головную боль за 30 минут. Случайная выборка 121 человека, страдающих головными болями, показала, что новый тип аспирина снимает головную боль за 28,6 минут при среднем квадратическом отклонении 4,2 минуты. Проверьте на уровне значимости, $\alpha = 0,05$ справедливость утверждения производителей аспирина о том, что это лекарство излечивает головную боль за 30 минут.

Задача 2. Инженер по контролю качества проверяет среднее время горения нового вида электроламп. Для проверки в порядке случайной выборки было отобрано 100 ламп, среднее время горения которых оказалось 1075 часов. Предположим, что среднее квадратическое отклонение времени горения для генеральной совокупности известно и равно 100 час. Используя уровень значимости $\alpha = 0,05$, проверьте гипотезу о том, что время горения ламп более 1000 часов.

Задача 3. Исходя из условия задачи 7, предположим, что инженер по контролю качества не имеет информации о генеральной дисперсии и использует выборочное среднее квадратическое отклонение, равное 100 час. Объем выборки $n = 121$.

Задача 4. Исходя из условия задачи 7, предположим, что инженеру по контролю качества неизвестна генеральная дисперсия, и он пользуется данными выборки только 25 ламп. Изменится ли ответ задачи? Объясните.

Задача 5. Длительное время автоматическая линия по фасовке пакетов с солью обеспечивала нормальное распределение веса фасуемых пакетов со средним весом 1000 граммов и стандартным отклонением $\sigma = 2$ грамма. Перед плановым профилактическим ремонтом для выяснения возможных нарушений в настройке линии была проведена выборка 36 пакетов, средний вес которых оказался равным 1003 граммам. Имеется ли какое-либо основание предполагать, что произошли сбои в настройке автоматической линии и наблюдается устойчивый перерасход сырья? Уровень значимости принять равным 0,01.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Проведение текущего контроля осуществляется посредством проведения трех аудиторных письменных контрольных работ.

Образец контрольной работы

1. В карточке лото имеется 36 номеров. Игрок может выбрать 7, а выигрышных номеров в тираже определяется тоже 7. С какой вероятностью игрок угадает ровно 5 выигрышных номера?
2. Имеются 3 урны: в первой из них a белых шаров и b черных; во второй c белых и d черных; в третьей – k белых шаров, черных нет. Некто выбирает наугад одну из урн и вынимает из нее шар. Этот шар оказался белым. Найти вероятность того, что шар вынут из первой, второй или третьей урны.
3. В окружности радиуса R случайным образом проводится хорда. Найти вероятность того, что длина хорды больше R , если один конец хорды закреплен, а другой равномерно распределен на окружности.
4. Завод изготавливает изделия, каждое из которых с вероятностью r (независимо от других) оказывается дефектным. При осмотре дефект, если он имеется, обнаруживается с вероятностью p . Для контроля из продукции завода выбирается n изделий. Найти вероятность того, что не менее чем в двух будет обнаружен дефект.
5. Вероятность попадания в цель при каждом выстреле равна 0,001. Найти вероятность попадания в цель пятью и более выстрелами при залпе 7000 выстрелов.

Критерии оценивания контрольной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно реализован каждый метод решения	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

1. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5

3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация осуществляется посредством проведения экзамена.

Вопросы к экзамену

1. Вероятностное пространство.
2. Классическое определение вероятности. Примеры.
3. Геометрическая вероятность. Примеры.
4. Основные свойства вероятности (с доказательством).
5. Независимость двух событий. Примеры пар зависимых и независимых событий.
6. Независимость нескольких событий. Пример Бернштейна.
7. Условная вероятность и ее свойства.
8. Формула полной вероятности и формула Байеса (с выводом).
9. Схема Бернулли. Примеры.
10. Закон больших чисел Бернулли (без доказательства).
11. Локальная теорема Муавра-Лапласа (без доказательства).
12. Интегральная теорема Муавра-Лапласа (без доказательства). Функция Φ и ее свойства.
13. Теорема Пуассона (с доказательством).
14. Случайная величина. Примеры.
15. Функция распределения случайной величины и ее свойства. Примеры.
16. Типы распределений. Определения. Теорема Лебега (без доказательства).
17. Дискретные распределения. Примеры.
18. Вырожденное и биномиальное распределения. Распределение Пуассона. Нахождение функций распределения и эскизы графиков.
19. Распределение Бернулли и геометрическое распределение. Нахождение функций распределения и эскизы графиков.
20. Абсолютно непрерывные распределения. Примеры.
21. Равномерное распределение и экспоненциальное распределение.
22. Нормальное распределение.
23. Распределение Коши.
24. Совместное распределение для пары случайных величин.
25. Независимость случайных величин. Критерии независимости случайных величин.
26. Математическое ожидание случайной величины. Примеры вычисления.
27. Свойства математического ожидания (с доказательством).
28. Дисперсия случайной величины. Примеры вычисления.
29. Свойства дисперсии (с доказательством).
30. Математические ожидания и дисперсии важных дискретных распределений (с выводом).
31. Математические ожидания и дисперсии важных абс. непрерывных распределений (с выводом).
32. Ковариация и коэффициент корреляции и их свойства.
33. Закон больших чисел и его связь с законом больших чисел Бернулли.
34. Центральная предельная теорема П. Леви (без доказательства формулировка) и ее связь с интегральной теоремой Муавра-Лапласа.
35. Выборка и ее характеристики.
36. Эмпирическая функция распределения. Теорема Гливленко (без доказательства).
37. Несмещенная, состоятельная и асимптотически нормальная оценки. Примеры.
38. Точечное оценивание. Постановка задачи и примеры.
39. Метод моментов. Примеры.
40. Метод максимального правдоподобия. Примеры.

41. Доверительное оценивание. Постановка задачи и примеры.
42. Доверительное оценивание с помощью ЦПТ. Примеры.
43. Проверка статистических гипотез. Постановка задачи и примеры.
44. Критерий согласия Колмогорова.
45. Критерий согласия хи-квадрат.
46. Модель линейной регрессии.
47. Метод наименьших квадратов.

Образец экзаменационного задания

1. Нормальное распределение.
2. Метод моментов. Примеры.
3. В единичный квадрат со вписанным в него кругом независимо с равномерным распределением случайно бросается 6 частиц. Найти вероятность того, что ни одна из пяти частей квадрата не будет свободна от частиц.
4. При реализации товаров 2 районах города получен следующий объем продаж (табл). Определить среднюю стоимость единицы товара в целом по городу и найти несмещенную выборочную дисперсию на основании этих данных. Каждому студенту использовать свой набор данных. Для этого значения колонки «цена» увеличить на число N , где N – номер студента по журналу группы. Таблица:

1 район												
Количество	15	18	32	16	40	34	9	13	23	17	19	15
Цена за единицу, руб.	12	30	11	32	9	10	8	13	15	14	17	16
2 район												
Количество	17	21	25	18	21	23						
Цена за единицу, руб.	13	12	16	18	24	17						

Критерии оценивания ответа на экзамене

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Правильный ответ на первый вопрос	1 балл
2	Правильный ответ на второй вопрос	2 балла
3	Правильное решение первой задачи	1 балл
4	Правильное решение второй задачи	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Основная литература

1. Мятлев В. Д., Панченко Л. А., Ризниченко Г. Ю., Терехин А. Т. Теория вероятностей и математическая статистика. Математические модели : учебник для вузов / В. Д. Мятлев, Л. А. Панченко, Г. Ю. Ризниченко, А. Т. Терехин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 321 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01698-

7. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/451559>
2. Васильев, А. А. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник и практикум для вузов / А. А. Васильев. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 232 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-09097-0. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/453255>
3. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник для вузов / В. Е. Гмурман. — 12-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 479 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-00211-9. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/449646>
4. Кремер, Н. Ш. Теория вероятностей и математическая статистика : учебник и практикум для вузов / Н. Ш. Кремер. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 538 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10004-4. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/456395>

7.2. Дополнительная литература

1. Андронов А.М. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов – СПб.: Питер, 2004. - 461 с.
2. Большев Л.Н, Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. - М.: Наука, 1983.
3. Бочаров П. П. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие для студентов вузов/ П. П. Бочаров, А. В. Печинкин. - 2-е изд.. - М.: Физматлит, 2005. - 296 с.
4. Евдокимова Г.С. Теория вероятностей в примерах и задачах. - Смоленск: Изд-во СмоГУ, 2013. – 196 с.
5. Вентцель Е. С. Задачи и упражнения по теории вероятностей: учеб. пособие для студентов вузов/ Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. - 5-е изд. испр.. - М.: Academia, 2003. - 448 с. : ил.. - (Высшее образование)
6. Вентцель Е. С. Теория вероятностей: Учеб. для студентов вузов. - 8-е изд., стер.. - М.: Высшая школа, 2002. - 575 с. .
7. Вентцель Е. С. Теория вероятностей и ее инженерные приложения: Учеб. пособие для студ. вузов/ Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. - 3-е изд., перераб. и доп.. - М.: Академия, 2003. - 464 с.
8. Евдокимова Г.С. Математическая статистика в примерах и задачах. - Смоленск: Изд-во СмоГУ, 2014. – 213 с.
9. Письменный Д. Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д. Т. Письменный. - М.: Айрис-пресс, 2008. - 288 с.
10. Пугачев В. С. Теория вероятностей и математическая статистика. - М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1979. - 496 с.
11. Севастьянов В. А. Курс теории вероятностей и математической статистики.- М.: Наука, 1982.- 256 с.
12. Смирнов В. Н., Дунин-Барковский И. В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений.- М.: Наука, 1969. – 512 с.
13. Румишинский Л. 3. Элементы теории вероятностей. - М.: Наука, 1976. - 240 с.
14. Чудесенко В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. - М.: Высш. шк., 1983. - 112 с.

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

- Система дистанционного обучения Смоленского государственного университета <http://cdo.smolgu.ru>
- Электронно-библиотечная система университета <http://biblioteka.smolgu.ru>
- Национальный открытый университет <http://www.intuit.ru>
- Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru>
- Кафедральная электронная библиотека.

8. Материально-техническое обеспечение

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используется интерактивная доска; проектор; электронная библиотека кафедры, содержащая электронные учебники и задачки по различным главам математического анализа; система компьютерной математики Mathematica. Осуществляется поиск информации в WWW-пространстве; работа с Web-страницами и ресурсами сети Интернет.

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине в университете имеется следующая необходимая инструментальная база: учебные аудитории для проведения практических занятий; компьютерный класс, оборудованный персональными ЭВМ с необходимым математическим софтом и выходом в Интернет для проведения лабораторных занятий; кабинеты, оборудованные проекторами и электронными досками для проведения лекционных занятий. Имеется кабинет ксерокопирования и кафедральный принтер для подготовки индивидуальных дидактических карточек, контрольных и экзаменационных материалов. Доступна электронная библиотека кафедры математического анализа. Используются портреты великих математиков, необходимые чертёжные инструменты.

9. Программное обеспечение

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине используется Информационно-вычислительный центр физико-математического факультета (Положение о Центре утверждено приказом ректора №01-66 от 28.09.2015 г.).

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используются информационные технологии обработки данных с помощью прикладных программных продуктов MicrosoftExcel, MicrosoftPowerPoint. Осуществляется поиск информации в WWW-пространстве; работа с Web-страницами и социальными ресурсами сети Интернет, а также используются различные системы компьютерной математики.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 03B6A3C600B7ADA9B742A1E041DE7D81B0
Владелец: Артеменков Михаил Николаевич
Действителен: с 04.10.2021 до 07.10.2022