Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»
Проректор по учебно-методической работе

_______________________Ю.А. Устименко

«09» сентября 2021 г.

Рабочая программа дисциплины

Б1.О.21 Теория функций комплексного переменного

Направление подготовки: **11.03.01 Радиотехника**
Направленность (профиль): **Радиоэлектронные системы и комплексы**
Форма обучения: очная
Курс – 2
Семестр – 3
Всего зачетных единиц – 3, часов – 108
Форма отчетности: зачет – 3 семестр

Программу разработал: доктор физико-математических наук, профессор К.М. Расулов

Одобрена на заседании кафедры
«02» сентября 2021 г., протокол № 1

Смоленск
2021

1. **Место дисциплины в структуре ООП**

Дисциплина «Теория функций комплексного переменного» относится к обязательной части основной образовательной программы по направлению подготовки 11.03.01 Радиотехника.

Дисциплина «Теория функций комплексного переменного» находится в логической и содержательно-методической взаимосвязи с другими дисциплинами математической направленности, такими как «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Уравнения математической физики». Для успешного освоения дисциплины «Теория функций комплексного переменного» обучающемуся необходимы знания, умения и навыки, полученные в результате изучения дисциплины «Математический анализ».

Изучение дисциплины «Теория функций комплексного переменного» необходимо для формирования компетенций, необходимых для успешного освоения профильных дисциплин и выполнения выпускной квалификационной работы.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы
ОПК-1. Способен использовать положения, законы и методы естественных наук и математики для решения задач инженерной деятельности	**Знать**: фундаментальные законы природы, основные законы и методы математики. **Уметь**: применять законы и методы математики для решения задач теоретического и прикладного характера. **Владеть**: навыками использования основных теорий и методов математики при решении практических задач.

3. Содержание дисциплины

1. **Комплексная плоскость C.** Плоскость комплексных чисел. Геометрический смысл модуля и аргумента разности двух комплексных чисел. Уравнения окружности, луча и серединного перпендикуляра в комплексной форме
2. **Предел, непрерывность, производная.** Комплексные последовательности. Предел, непрерывность.Производная комплексной функции. Условия дифференцируемости Даламбера-Эйлера. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие конформного отображения.
3. **Элементарные функции на C.** Функции комплексного переменного. Экспонента, натуральный логарифм и тригонометрические функции комплексного переменного.
4. **Интеграл от функции комплексного переменного**. Интегрирование функций комплексного переменного. Оценка интеграла. Теорема Коши (без строгого доказательства) и ее следствия. Первообразная и ее существование. Формула Ньютона-Лейбница. Интегральная формула Коши для аналитических функций и ее производных. Вычеты, их вычисления с помощью формулы Коши, применение к вычислению интегралов.
5. **Степенные ряды, теорема единственности**. Степенные ряды на комплексной плоскости (обзорно). Разложение аналитической функции в степенной ряд. Неравенства Коши. Ряды для элементарных функций. Теорема Лиувилля. Основная теорема алгебры многочленов. Теорема единственности. Аналитическое продолжение с вещественной оси. Нули аналитической функции, их кратность, изолированность.
6. **Ряд Лорана. Особые точки. Вычеты**. Теорема Лорана. Изолированные особые точки, их характеристические свойства. Теорема Сохоцкого. Новые формулы для вычетов. Применения вычетов.

4. Тематический план

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий		
			лекции	практические занятия	самостоятельная работа
1	Комплексная плоскость C	16	2	4	10
2	Предел, непрерывность, производная	18	2	6	10
3	Элементарные функции на C	16	2	4	10
4	Интеграл от функции комплексного переменного	20	4	6	10
5	Степенные ряды, теорема единственности	18	2	6	10
6	Ряд Лорана. Особые точки. Вычеты	20	4	6	10
	ИТОГО	**108**	**16**	**32**	**60**

5. Виды образовательной деятельности

Занятия лекционного типа

Лекции №1. *Комплексная плоскость **C***.
1. Исторический очерк.
2. Плоскость комплексных чисел.
3. Геометрический смысл модуля и аргумента разности двух комплексных чисел.
4. Уравнения окружности, луча и серединного перпендикуляра.

Лекция №2. *Предел, непрерывность. Производная комплексной функции.*
1. Комплексные последовательности; предел.
2. Комплексные функции и отображения плоскости; предел, непрерывность.
3. Непрерывность $w = |z|$ и $w = \arg z$.
4. Понятие аналитической функции. Условия дифференцируемости Даламбера-Эйлера.
5. Угол поворота и коэффициент растяжения кривой в точке при отображении.
6. Геометрический смысл модуля и аргумента производной.

Лекция №3. *Элементарные функции.*
1. Экспонента комплексного переменного.
2. Натуральный логарифм комплексного переменного.
3. Тригонометрические функции комплексного переменного.
4. Комплексная степень.

Лекция №4,5. *Интеграл.*
1. Интегрирование функции комплексного переменного.
2. Оценка интеграла.
3. Теорема Коши (без строгого доказательства) и ее следствия.
4. Первообразная и ее существование.
5. Формула Ньютона-Лейбница.
6. Интегральная формула Коши для аналитических функций и ее производных. В
7. Вычеты, их вычисления с помощью формулы Коши, применение к вычислению интегралов.

Лекция №6. *Степенные ряды.*
1. Степенные ряды на комплексной плоскости (обзорно).
2. Разложение аналитической функции в степенной ряд.
3. Неравенства Коши.
4. Ряды для элементарных функций.
5. Теорема Лиувилля.
6. Основная теорема алгебры многочленов.

Лекция №7,8. *Особые точки. Вычеты.*
1. Ряд Лорана. Теорема Лорана.
2. Изолированные особые точки, их характеристические свойства.
3. Теорема Сохоцкого.
4. Теорема Пикара (без доказательства).
5. Новые формулы для вычетов. Применения вычетов.

Занятия семинарского типа и самостоятельная работа

Практическое занятие №1. Комплексные числа и действия над ними

Теоретические вопросы

1. Что называется комплексным числом?
2. Какова алгебраическая форма записи комплексных чисел?
3. Что такое действительная и мнимая части комплексного числа? Приведите примеры.
4. Какие комплексные числа называются сопряженными?
5. Как определяется сумма, разность, произведение и частное комплексных чисел, заданных в алгебраической форме? Приведите примеры.
6. Какие геометрические интерпретации комплексных чисел Вам известны?
7. Сформулируйте определение модуля и аргумента комплексного числа $z = a + bi$. Приведите примеры их вычисления.
8. Что называется главным значением аргумента комплексного числа?
9. Как задаются всевозможные значения аргумента комплексного числа? Приведите примеры.
10. Какими свойствами обладает модуль комплексного числа?
11. Какова тригонометрическая форма записи комплексных чисел?
12. Каков геометрический смысл операций сложения и умножения комплексных чисел? Приведите примеры.
13. Как можно вычислить степень комплексного числа, заданного в тригонометрической форме? Приведите примеры.
14. По какой формуле определяются корни n-й степени из комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Пусть $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - i$. Найдите числа и изобразите их на комплексной плоскости: $z_3 = z_1 + z_2$, $z_4 = z_1 \cdot z_3$, $z_5 = \dfrac{z_2}{z_4}$, $z_6 = z_4 - z_5$.

2. Найдите модуль и аргумент числа z, если:

а) $z = 3$; б) $z = -2$; в) $z = 3i$; г) $z = -2i$;

д) $z = 1 - i$; е) $z = -1 + \sqrt{3}i$; ж) $z = -\sqrt{3} - i$; з) $z = \sin\alpha + i\cos\alpha$.

3. Докажите, что $|z_1 - z_2|$ есть расстояние между точками z_1 и z_2 на комплексной плоскости.

4. Докажите равенства:

а) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$; б) $|z| = |\bar{z}|$; в) $Arg(z_1 \cdot z_2) = Arg\, z_1 + Arg\, z_2$.

5. Решите уравнение и изобразите все его корни на комплексной плоскости:

а) $z^2+25=0$; б) $z^2+4z+13=0$; в) $z^3-2i=0$.

Задание для самостоятельной работы

1. Пусть $z_1=i$, $z_2=1-2i$. Найдите числа: $z_3=z_1-z_2$, $z_4=z_2\cdot z_3$, $z_5=\frac{z_2}{z_4}$.

2. Найдите модуль и аргумент комплексного числа z, если:

а) $z=-1+i$; б) $z=\sqrt{3}-i$; в) $z=\sin\alpha-i\cos\alpha$.

3. Выясните, для любого ли $z\in C$ верно равенство:

а) $z+\bar{z}=2\operatorname{Re}z$; б) $z^2=\bar{z}^2$; в) $Arg\left(z^2\right)=2Argz$.

4. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек, удовлетворяющих условию:

а) $|z-i|=|2-i|$; б) $|iz-1|=|z-1|$; в) $\arg(iz+1)=\frac{\pi}{2}$.

5. Решите уравнение и изобразите все его корни на комплексной плоскости:

а) $z^3+27=0$; б) $z^2+2z+2=0$; в) $z^4-16i=0$.

Практическое занятие №2. Кривые и области на комплексной плоскости

Теоретические вопросы

1. Каков геометрический смысл модуля разности двух комплексных чисел ?
2. Напишите параметрическое уравнение отрезка прямой с началом в точке $z_1=x_1+iy_1$ и концом в точке $z_2=x_2+iy_2$.
3. Дайте определение гладкой кривой на комплексной плоскости переменного $z=x+iy$.
4. Каково параметрическое уравнение окружности с центром в точке $z_0=x_0+iy_0$ и радиусом ρ?
5. В чем состоит геометрический смысл арифметических операций над комплексными числами?
6. Пусть на плоскости изображено число z. Изобразите числа $2z$, $\bar{z}$, $-z$.
7. Дайте определение открытой (замкнутой) области на комплексной плоскости.
8. Напишите уравнение замкнутого круга в комплексной форме.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих условию:

а) $|z+1+i|=2$; б) $\operatorname{Im}\frac{z}{1+i}=0$; в) $|z+i|+|z-i|=2$;

г) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=2$; д) $\operatorname{Re}z^2=1$; е) $\arg(2iz-4)=0$.

2. Задайте комплексной плоскости следующие множества точек:

а) окружность с центром в точке $2-i$ и радиусом 4;

б) прямую, проходящую через точку $1+i$, образующую с действительной осью угол $\frac{\pi}{3}$;

в) гиперболу с фокусами $2i$ и -2, эксцентриситетом $\varepsilon=2$.

3. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек, удовлетворяющих условию:

а) $|z+1+2i|>2$; б) $-\frac{\pi}{4}<Arg(z-1)<\frac{\pi}{3}$; в) $|z+\bar{z}|<4$;

г) $\operatorname{Re}z^2<2$; д) $\left|\frac{z-1}{z+i}\right|<2$; е) $\arg z<0$.

4. Изобразите на комплексной плоскости линию L, которая задается уравнением $z(t)=x(t)+i\cdot y(t)$, если:

а) $z(t)=2-3it$, $t\in R$;

б) $z(t)=2t+1+(t-2)i$, $t\in[-1;2]$;

в) $z(t)=2\sin t+i3\cos t$, $0<t<\pi$.

5. Напишите уравнение линии L в комплексной параметрической форме, если:

а) L – парабола с фокусом $z=i$ и директрисой $\operatorname{Im} z=-1$;

б) L – верхняя дуга единичной окружности;

в) L – отрезок прямой, соединяющий точки $-1+i$ и $2-3i$.

Задание для самостоятельной работы

1. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек, удовлетворяющих условию:

а) $|z+1+i|=|iz+1+i|$; б) $\operatorname{Re}\dfrac{z+1}{1-i}=0$; в) $|iz+1|+|iz-1|=2$;

г) $|z-2|+|z+i|=4$.

2. Задайте на комплексной плоскости следующие множества точек:

а) окружность с центром в точке $1+i$ и радиусом 2;

б) прямую, проходящую через точку $1-i$, параллельную прямой $|z-1|=|z-i|$;

в) эллипс с фокусами i и -2, эксцентриситетом $\varepsilon=0{,}5$.

3. Изобразите на комплексной плоскости множество всех точек, удовлетворяющих условию:

а) $|z+1|>|iz-2|$; б) $\arg(-i)<\arg(z-i)<\arg(i-1)$;

в) $|z-\bar{z}|\geq 1$; г) $\operatorname{Re}(z\cdot\bar{z})<2$.

4. Изобразите на комплексной плоскости линию L, которая определяется уравнением $z(t)=x(t)+i\cdot y(t)$, если:

а) $z(t)=3t+4it$, $t\in R$;

б) $z(t)=2t+1+(t+1)^2 i$, $t\in[-1;2]$;

в) $z(t)=e^t+ie^{-t}$, $-1<t<1$.

5. Напишите уравнение линии L в комплексной параметрической форме, если:

а) L – эллипс с фокусами $z=i$, $z=-2i$ и большой полуосью $a=4$;

б) L – правая ветвь гиперболы $xy=1$;

в) L – отрезок прямой, соединяющей точки $1+2i$ и $3-4i$.

Практическое занятие №3. Последовательности и ряды комплексных чисел

Теоретические вопросы

1. Дайте определения расширенной комплексной плоскости и числовой сферы Римана.
2. Какова связь между комплексным числом $z=x+iy$ и его образом на числовой сфере Римана?
3. Сформулируйте определение предела последовательности комплексных чисел. Приведите примеры.
4. Какими свойствами обладает предел последовательности комплексных чисел?
5. Какая последовательность называется фундаментальной? В чем состоит критерий Коши о сходимости числовых последовательностей?
6. Сформулируйте определение ряда с комплексными членами. Приведите примеры.
7. Какой ряд называется сходящимся? Приведите примеры.
8. Какими свойствами обладают сходящиеся ряды с комплексными членами?
9. Сформулируйте критерий Коши сходимости ряда.
10. Дайте определение абсолютной сходимости числового ряда.

11. Сформулируйте признаки Коши и Даламбера абсолютной сходимости числовых рядов.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Пользуясь определением, докажите, что последовательность $z_n = \dfrac{n-1+(2n+3)i}{n}$ сходится к точке $a = 1+2i$.

2. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = 0$.

3. Вычислите предел последовательности z_n, если:

а) $z_n = \dfrac{n^2+1+in}{1+in^2}$; б) $z_n = \left(\dfrac{2+3i}{5}\right)^n$.

4. Исследуйте ряд на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{i^n}{i+n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(3i)^n}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+1}{(1+i)^n}$.

Задание для самостоятельной работы

1. Пользуясь определением, докажите, что последовательность $z_n = \dfrac{n^2-1+(n^2+1)i}{n^2+in-1}$ сходится к точке $a = 1+i$.

2. Вычислите предел последовательности z_n, если:

а) $z_n = \left(1+\dfrac{i}{n}\right)^n$; б) $z_n = \arg\left(-1+\dfrac{i^n}{n}\right)$.

3. Исследуйте ряд на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{(3i)^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{(in)^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2i)^n}{n!}$.

Практическое занятие №4. Понятие функции комплексного переменного. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Теоретические вопросы

1. Дайте определение функции комплексного переменного. Каков геометрический смысл функции комплексного переменного?

2. Когда функция $w = f(z)$ называется однозначной (многозначной)? Приведите примеры однозначных и многозначных функций.

3. Выделите действительную и мнимую части функции $W = z^3$ двумя способами: а) через вещественную и мнимую части переменного $z = x+iy$; б) через модуль и аргумент переменного z.

4. Сформулируйте определение предела функции $w = f(z)$ в точке z_0 на языке «$\varepsilon - \delta$» (на языке последовательностей). Приведите примеры.

5. Перечислите основные свойства предела функции в точке.

6. Дайте определение непрерывности функции $w = f(z)$ в точке z_0. Приведите примеры непрерывных и разрывных в точке $z = 0$ функций.

7. Перечислите основные свойства функций, непрерывных в точке.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Выделите действительную и мнимую части каждой из указанных функций:

а) $w = \dfrac{\operatorname{Re} z^2}{z}$; б) $w = \dfrac{\operatorname{Re} z}{\operatorname{Im} z}$; в) $w = \dfrac{z+i}{z-i}$; г) $w = \overline{z^2} + |z^2|$.

2. Найдите образ окружности $L = \{z : |z| = 1\}$ при отображении $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{\bar{z}}\right)$.

3. На какие линии w-плоскости отображает функция $w=\frac{1}{z}$ следующие кривые z-плоскости:

а) $x^2+y^2=4$; б) $y=x$; в) $x=1$; г) $(x-1)^2+y^2=1$?

4. В какую фигуру переводится единичный круг $T=\{z:|z|<1\}$ следующими функциями:

а) $w=|z|$; б) $w=z-\bar{z}$?

5. Найдите предел функции $w=f(z)$ в точке z_0, если:

а) $w=\frac{\operatorname{Re}z^2}{z}$, $z_0=0$; б) $w=\frac{\operatorname{Re}z}{\operatorname{Im}z}$, $z_0=1+i$.

6. Дайте, если это возможно, определения, соответствующие следующим утверждениям:

а) $\lim\limits_{z\to a}f(z)=b$; б) $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$; в) $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=b$;

г) $\lim\limits_{z\to+\infty}f(z)=b$; д) $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\infty$; е) $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=0$.

7. Докажите, что функция $f(z)=z^2+\bar{z}\cdot(z+1)$ непрерывна в каждой точке комплексной плоскости.

Задание для самостоятельной работы

1. Выделите действительную и мнимую части каждой из указанных функций:

а) $w=z^2-\frac{1}{z^2}$; б) $w=z^4+5$; в) $w=z^2+az+b$ (a и b – действительные числа).

2. Найдите образ окружности $L=\{z:|z|=1\}$ при отображении $w=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

3. На какие линии w-плоскости отображает функция $w=\frac{1}{z}$ следующие кривые z-плоскости:

а) $x^2+y^2=1$; б) $y=-x$; в) $y=1$; г) $(x+1)^2+y^2=1$?

4. В какую фигуру переводится единичный круг $T=\{z:|z|<1\}$ следующими функциями:

а) $w=|z-1|$; б) $w=\frac{1}{2}|z-\bar{z}|$?

5. Определите, в каких точках данная функция не имеет предела:

а) $w=\frac{\bar{z}}{z}$; б) $w=\frac{|z+i|^2}{z+i}$; в) $w=i\arg(z-1)$.

6. Можно ли доопределить функцию $w=f(z)$ в точке z_0 так, чтобы она стала в ней непрерывной, если:

а) $w=\frac{\operatorname{Re}z^2}{z}$, $z_0=0$; б) $w=\frac{(z-1)\cdot\operatorname{Im}(z-1)}{|z-1|}$, $z_0=1$.

Практическое занятие №5. Производная функции комплексного переменного. Условия Коши-Римана. Понятие аналитической функции

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение производной функции $w=f(z)$ в точке z_0. Приведите примеры.

2. Перечислите основные свойства функций, дифференцируемых в точке.

3. Сформулируйте необходимые и достаточные условия дифференцируемости функции комплексного переменного в точке $z_0 = x_0 + iy_0$. Приведите примеры.

4. Как записываются условия Коши Римана с использованием дифференциальных операторов?

5. Какая функция называется аналитической в точке? Приведите примеры.

6. Является ли функция $f(z) = z^2 + (z-1)\cdot \bar{z}$ аналитической в какой-либо точке комплексной плоскости?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Пользуясь определением, найдите производную функции $w = f(z)$ в точке z_0, если:

а) $f(z) = z^3 - 3z^2 + 1$, $z_0 = 1 - i$; б) $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$, $z_0 = -i$.

2. Определите, в каких точках комплексной имеет производную данная функция:

а) $w = (\bar{z} - z)^2$; б) $w = \overline{z + \operatorname{Re} z}$; в) $w = (z+i)^3 - 2\bar{z}$;

г) $w = |z - i|^2 + (z-i)^2$; д) $w = iz^2 - 3z$; е) $w = \operatorname{Im} z + i \operatorname{Re} z$.

3. Докажите, что функция $w = \bar{z}$ нигде не дифференцируема.

4. Найдите значения параметров a, b и c, при которых функция $w = ax + by + i(cx + y)$ будет аналитической на всей комплексной плоскости.

5. Являются ли следующие функции аналитическими в какой-либо области:

а) $f(z) = z^3 - z + 1$; б) $g(z) = z^2 - \bar{z}$; в) $q(z) = \dfrac{5}{z^2 - z}$?

Задание для самостоятельной работы

1. Пользуясь определением, найдите производную функции $w = f(z)$ в точке z_0, если:

а) $f(z) = z^2 + 2z$, $z_0 = 3 + 2i$; б) $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$, $z_0 = -1$.

2. Докажите, что функция $w = |z - a|^2$ дифференцируема в точке a.

3. Определите, в каких точках имеет производную данная функция:

а) $w = (\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} \bar{z})^2$; б) $w = \operatorname{Im}(z + \operatorname{Re} z)$; в) $w = z^3 - 2|z-1|^2$;

г) $w = \overline{z - i} + (z-i)^2$; д) $w = z^2 + 2iz$; е) $w = \operatorname{Re}^2 z - i \operatorname{Im}^2 z$.

4. Являются ли следующие функции аналитическими в какой-либо области:

а) $f(z) = z^2 + \bar{z} - z$; б) $g(z) = z^{2015} - 2015$; в) $q(z) = \dfrac{z}{z^2 - 4}$?

Практическое занятие №6. Геометрический смысл модуля и аргумента производной функции комплексного переменного. Понятие о конформном отображении.

Теоретические вопросы

1. В чем состоит геометрический смысл модуля производной функции $f(z)$ комплексного переменного в точке z_0?

2. Каков геометрический смысл аргумента производной функции $f(z)$ комплексного переменного в точке z_0?

3. Какое отображение называется конформным в точке z_0? Приведите примеры.

4. Какое отображение называется конформным на множестве D? Приведите примеры.

5. Какая связь между аналитическими функциями комплексного переменного и конформными отображениями?

6. Является ли конформным на множестве $D = \{z \mid 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ отображение, задаваемое функцией $W = e^z$?

7. При каком условии отображение, задаваемое дробно-линейной функцией, является конформным в $\boldsymbol{C}$?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Для отображения $w = f(z)$ найдите коэффициент деформации и угол поворота в точке z_0, если:

а) $f(z) = z^3 - 3z^2 + 1$, $z_0 = 1 - i$; б) $f(z) = \dfrac{z+i}{z-i}$, $z_0 = -i$.

2. Найдите угол между образами кривых $\gamma_1 : |z-1| = 2$ и $\gamma_2 : |z+1| = 2$ при отображении $w = iz^2 + z - 1$.

3. Определите, в каких точках плоскости коэффициент деформации отображения $w = \dfrac{z+i}{z-i}$ равен 1.

4. Определите, в каких точках плоскости угол поворота отображения $w = \dfrac{iz+1}{iz-1}$ равен нулю.

5. Найдите образы прямых $\operatorname{Re} z = a$ и $\operatorname{Im} z = b$ $(a, b \in R)$ при отображении $w = z^2$.

6. Постройте конформное отображение верхней полуплоскости на единичный круг.

7. Пусть $D = \left\{ z \,\middle|\, -\dfrac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{4} \right\}$ и $E = \{w \mid |w| < 1\}$. Постройте конформное отображение множества D на множество E.

Задание для самостоятельной работы

1. Для отображения $w = f(z)$ найдите коэффициент деформации и угол поворота в точке z_0, если:

а) $f(z) = (z-3)^2$, $z_0 = 2 + i$; б) $f(z) = \dfrac{iz+1}{z-1}$, $z_0 = -1$.

2. Найдите угол между образами кривых $\gamma_1 : |z-1| = |z+1|$ и $\gamma_2 : |z+i| = |z-i|$ при отображении $w = iz^{2016} + 2015z - 1$.

3. Определите, какая часть плоскости сжимается при отображении $w = \dfrac{z}{z-i}$.

4. Определите, в каких точках плоскости угол поворота отображения $w = 3z^2 - 6z + 11$ равен $\dfrac{\pi}{2}$.

5. Выясните, во что функция $w = \dfrac{1}{z}$ переводит полярную сетку $|z| = R$, $\arg z = \alpha$ ($R > 0$, $0 \le \alpha < 2\pi$).

6. Найдите конформное отображение единичного круга на верхнюю полуплоскость.

Практическое занятие №7. Линейная и дробно-линейная функции комплексного переменного и их свойства

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение линейной функции комплексного переменного. Приведите примеры.

2. В какой области является аналитической линейная функция комплексного переменного?

3. Верно ли утверждение: *Всякое линейное отображение* $W = az + b$, $a \ne 0$, *получается в результате суперпозиции трех простейших отображений*:

а) $t = |a|z$ (*отображение подобия* с центром подобия в точке $z = 0$ и коэффициентом подобия $|a|$);

б) $\tau = e^{i \arg a} t$ (*вращение* вокруг точки $t = 0$ с углом поворота $\arg a$);

в) $W = \tau + b$ (*параллельный перенос* в направлении вектора b на расстояние $|b|$)?

4. Сформулируйте определение невырожденной дробно-линейной функции комплексного переменного. Приведите примеры.

5. В какой области является аналитической дробно-линейная функция комплексного переменного?

6. Верно ли утверждение: *Всякое дробно-линейное отображение* $W = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $bc - ad \ne 0, c \ne 0$, *получается в результате суперпозиции следующих трех простейших отображений*:

а) $t = \dfrac{c^2}{bc-ad} z + \dfrac{cd}{bc-ad}$; б) $\tau = \dfrac{1}{t}$; в) $W = \dfrac{a}{c} + \tau$?

7. Сформулируйте круговое свойства дробно-линейных отображений?

8. В чем состоит инвариантность ангармонического отношения четырех точек при невырожденном дробно-линейном отображении?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите линейную функцию, отображающую треугольник с вершинами в точках 0, -1, i на подобный ему треугольник с вершинами 0, 2, $1+i$.

2. Найдите линейное преобразование, отображающее круг $T_2 = \{z : |z - i| \le 2\}$ на единичный круг.

3. Найдите образы следующих линий при отображении $w = \dfrac{z+1}{z}$:

а) $|z| = 2$; б) $|z-1| = 1$; в) $\operatorname{Re} z = 0$; г) $\operatorname{Im} z = 1$.

4. Найдите образ круга $T_1 = \{z : |z - 2i| \le 1\}$ при отображении $w = (1+i)z + 2$.

5. Отобразите верхнюю полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ на круг $T_2 = \{w : |w| < 2\}$.

Задание для самостоятельной работы

1. Найдите линейное преобразование с неподвижной точкой $2 - i$, переводящее точку i в точку -1.

2. Найдите линейную функцию, отображающую единичный круг на круг $|z + 1 - i| \le 4$ так, чтобы центры кругов соответствовали друг другу и диаметр, лежащий

на действительной оси, переходил в диаметр, образующий с действительной осью угол равный $\frac{\pi}{2}$.

3. Найдите дробно-линейную функцию, переводящую точки 1, $-i$, $1-i$ соответственно в точки i, ∞, 1.

4. Найдите образы следующих линий при отображении $w=\frac{z-i}{z+i}$:

а) $|z|=1$; б) $|z+1|=1$; в) $\operatorname{Re} z=1$.

5. Постройте дробно-линейную функцию, отображающую единичный круг $|z|<1$ на полуплоскость $\operatorname{Re} W>0$.

Практическое занятие №8. Основные трансцендентные функции комплексного переменного и их свойства

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение и основные свойства показательной функции комплексного переменного.

2. Дайте определение синуса и косинуса комплексного числа $z=x+iy$. Найдите $\sin(5-3i)$ и $\cos(2i)$.

3. Сформулируйте определение и основные свойства тригонометрических функций комплексного переменного.

4. Может ли $|\sin z|>100$? Если да, то укажите хотя бы одно число z_1, для которого $|\sin z_1|>100$.

5. Дайте определение натурального логарифма комплексного числа $z=x+iy$. По какой формуле вычисляются значения $\operatorname{Ln} z$?

6. Сформулируйте определение и основные свойства логарифмической функции комплексного переменного.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите действительную и мнимую части, а также модуль и аргумент каждого из указанных чисел:

а) $e^{-1+i\frac{\pi}{2}}$; б) $\sin(1+i)$; в) $\cos(1-i)$.

2. Докажите, что $\sin^2 z+\cos^2 z=1$ для любого $z\in \boldsymbol{C}$.

3. Решите уравнения: а) $\sin z=2$; б) $\cos z=1$; в) $e^z=i$.

4. Вычислите $\operatorname{Ln}(1-i\sqrt{3})$.

5. Найдите образ окружности $U=\{z:|z|=e\}$ при отображении, осуществляемой функцией $W=\ln z$, где $\ln z$ - главная ветвь логарифмической функции.

Задание для самостоятельной работы

1. Найдите действительную и мнимую части, а также модуль и аргумент каждого из указанных чисел:

а) e^{1+i}; б) $\sin i$; в) $\cos(2-3i)$.

2. Докажите, что справедлива формула $\sin 2z=2\sin z\cos z$ для любого $z\in \boldsymbol{C}$.

3. Вычислите $\operatorname{Ln}(-i)$.

Практическое занятие №9. Гармонические функции двух действительных переменных и их связь с аналитическими функциями комплексного переменного.

Теоретические вопросы

1. Дайте определение гармонической функции двух действительных переменных в точке $M_0(x_0,y_0)$. Приведите примеры.

2. Когда функция $U(x,y)$ называется гармонической на множестве D ? Приведите примеры гармонических функций в единичном круге

3. Верно ли утверждение: *если функция* $f(z)=U(x,y)+iV(x,y)$ *является аналитической в точке* $z_0=x_0+iy_0$, *то функции* $U(x,y),V(x,y)$ *являются гармоническими в точке* $M_0(x_0,y_0)$?

4. Всякая ли гармоническая в области D функция $U(x,y)$ является действительной (мнимой) частью аналитической в области D функции $f(z)$?

5. Задана гармоническая в односвязной области G функция $U(x,y)$. По какой формуле можно найти аналитическую в G функцию $f(z)$, для которой $\operatorname{Re} f(z)=U(x,y)$ ($\operatorname{Im} f(z)=U(x,y)$)?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Проверьте, является ли следующие функции гармоническими в своей естественной области определения:

а) $U(x,y)=arctg\dfrac{y}{x}$; б) $\varphi(x,y)=\ln(x^2+y^2)$; в) $V(x,y)=x^3+y^3$.

2. Существует ли аналитическая функция $f(z)$, у которой:

а) $\operatorname{Re} f(z)=x^2-y^2$; б) $\operatorname{Im} f(z)=xy^2$; в) $\operatorname{Re} f(z)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$?

3. Найдите аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,u)$ по ее действительной части $u(x,y)=x^2-y^2+5x+y-\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

4. Найдите аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,u)$ по ее мнимой части $v(x,y)=e^{-2y}\cos 2x$.

5. Найдите аналитическую функцию $f(z)$ такую, что $\operatorname{Re} f(z)=x^2-y^2+x$ и $f(0)=i$.

Задание для самостоятельной работы

1. Проверьте, является ли следующие функции гармоническими в своей естественной области определения:

а) $U(x,y)=e^x\sin y$; б) $\varphi(x,y)=x^3-3xy^2$; в) $V(x,y)=x^4+y^4+1$.

2. Существует ли аналитическая функция $f(z)$, у которой:

а) $\operatorname{Re} f(z)=x^2+y^2$; б) $\operatorname{Im} f(z)=3xy^2-x^3$; в) $\operatorname{Re} f(z)=\dfrac{x^2-x+y^2}{x^2+y^2}$?

3. Найдите аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,u)$ по ее действительной части $u(x,y)=e^y\cos x$.

4. Найдите аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ по ее мнимой части $v(x,y)=\ln(x^2+y^2)+x-2y$.

5. Найдите аналитическую функцию $f(z)$ такую, что $\operatorname{Re} f(z)=3x^2y-y^3$ и $f(0)=0$.

Практическое занятие №10. Понятие интеграла от функции комплексного переменного

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение производной комплекснозначной функции действительного переменного. Приведите примеры.

2. Что называется интегральной суммой для функции $f(z)$ по кривой L?

3. Сформулируйте определение интеграла от функции $f(z)$ комплексного переменного по кривой L. Приведите примеры.

4. Какая связь между $\int\limits_L f(z)dz$ и криволинейными интегралами от функций $\operatorname{Re} f(z) = u(x, y)$ и $\operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$?

5. Перечислите основные свойства интеграла от функции комплексного переменного.

6. Сформулируйте теорему о существовании интеграла от функции комплексного переменного по заданной кривой.

7. Вычислите интеграл $\oint\limits_L z^n dz$, где $L = \{z : |z| = \rho\}$, $\rho > 0$ и n - целое число.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите производную комплекснозначной функции $f(t)$ действительного переменного t, если:

а) $f(t) = (t + i)^3$; б) $f(t) = \dfrac{t + i}{t - i}$; в) $f(t) = e^{it}$.

2. Вычислите:

а) $\int\limits_{-1}^{1} (t + i)^2 dt$; б) $\int\limits_0^1 \dfrac{dt}{t + i}$; в) $\int\limits_0^{2\pi} e^{it} dt$.

3. Составьте интегральную сумму для функции $f(z) = z^2$ по отрезку $[-4; 4i]$, соответствующую разбиению отрезка на четыре равные части и выбору левых концов частичных дуг в качестве промежуточных точек.

4. Вычислите интеграл от функции $f(z)$ по кривой L, если:

а) $f(z) = \operatorname{Re} z$, $L = [-1 - i; 1 + i]$; б) $f(z) = \bar{z}$, $L = [1; i]$;

в) $f(z) = (z + i)^2$, $L = \{z \mid z = e^{it}, 0 \le t \le \pi\}$; г) $f(z) = |z|$, $L: |z| = 1$;

д) $f(z) = z + (z + 1)\bar{z}$, L – треугольник с вершинами 1, $1 + i$, i.

Задание для самостоятельной работы

1. Найдите производную комплекснозначной функции $f(t)$ действительного переменного t, если:

а) $f(t) = t^2 + t + i(t^2 - 1)$; б) $f(t) = \dfrac{t^2 + 1}{t^2 + i}$; в) $f(t) = \cos t + i \sin t$.

2. Вычислите:

а) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin(t + i) dt$; б) $\int\limits_0^1 \dfrac{dt}{t^2 + i}$; в) $\int\limits_0^{\pi} e^{-2it} dt$.

3. Составьте интегральную сумму для функции $f(z) = z + 2i$ по отрезку $[2i; 2]$, соответствующую разбиению отрезка на четыре равные части и выбору середин частичных дуг в качестве промежуточных точек.

4. Вычислите интеграл от функции $f(z)$ по кривой L, если:

а) $f(z)=\operatorname{Im} z$, $L=[-i;1+i]$;

б) $f(z)=\bar{z}^2$, $L=[1+i;0]$;

в) $f(z)=z\cdot\bar{z}-1$, $L=\left\{z \,\middle|\, z=e^{it}, 0\le t\le 2\pi\right\}$;

г) $f(z)=\operatorname{Im}^2 z - i\operatorname{Re}^2 z$, $L{:}\,|z|=1$;

д) $f(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$, L – квадрат с вершинами 1, i, -1, $-i$.

Практическое занятие №11. Теорема Коши. Интегральная формула Коши

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте интегральную теорему Коши и следствия из нее. Приведите примеры.
2. Дайте определение первообразной для функции $f(z)$ в области D. Приведите примеры.
3. Сформулируйте теорему о формуле Ньютона-Лейбница для аналитической функции $f(z)$.
4. Запишите интегральную формулу Коши для функции $f(z)$?
5. Приведите конкретные примеры, когда достаточно сложные интегралы эффективно вычисляются с помощью интегральной теоремы Коши или интегральной формулы Коши.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Вычислите интеграл от функции $f(z)$ по линии L, если:

а) $f(z)=(iz+1)^2$, $L=[-1+i;2i]$;

б) $f(z)=e^{iz}$, $L=[0;\pi]$;

в) $f(z)=z\cdot\cos z$, $L=\left\{z: z=t+it^2, 0\le t\le 1\right\}$;

г) $f(z)=z^2\cdot e^{-iz}$, $L=\left\{z: |z|=2\right\}$;

д) $f(z)=\dfrac{z^3}{z-2}$, $L=\left\{z: |z|=1\right\}$;

е) $f(z)=\dfrac{e^z}{z(z+2)}$, $L=\left\{z: z=e^{it}, 0\le t\le 2\pi\right\}$;

ж) $f(z)=\dfrac{z}{z^2-4z+3}$, $L=\left\{z: |z-1|=1\right\}$;

з) $f(z)=\dfrac{1}{z(z^2+1)}$, $L=\left\{z: |\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|=2\right\}$.

2. В зависимости от значений параметра a ($a>0$) вычислите $\displaystyle\int_L \frac{dz}{z^2+9}$, $L=\left\{z\colon |z-i|=a\right\}$.

3. Какое число различных значений может принимать интеграл $\displaystyle\int_L \frac{dz}{\prod_{k=1}^{n}(z-z_k)}$, если контур L не проходит ни через одну точку z_k, $k=\overline{1,n}$?

Задание для самостоятельной работы

1. Вычислите интеграл от функции $f(z)$ по линии L, если:

а) $f(z)=(2iz-1)^3$, $L=[i;1+2i]$;

б) $f(z)=e^{-2iz}$, $L=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

в) $f(z)=z\cdot\sin z$, $L=\{z: z=t+\pi i\sin t, 0\le t\le\pi\}$;

г) $f(z)=z\cdot e^{z}$, $L=\{z:|z|=1\}$;

д) $f(z)=\dfrac{z^2+i}{z+2i}$, $L=\{z:|z|=1\}$;

е) $f(z)=\dfrac{e^z}{(z-2i)(z+2)}$, $L=\{z:\ z=e^{it}, 0\le t\le 2\pi\}$;

ж) $f(z)=\dfrac{z}{z^2-5iz-6}$, $L=\{z:|z-2i|=2\}$;

з) $f(z)=\dfrac{z^2-iz}{z(z^2-1)}$, L – треугольник с вершинами 2, $-2+2i$, $-2-2i$.

2. В зависимости от значений параметра a ($a>0$) вычислите $\int\limits_L \dfrac{dz}{z^2+a^2}$, $L=\{z:\ |z|=a+1\}$.

Практическое занятие №12. Интеграл типа Коши и производные высших порядков аналитических функций

Теоретические вопросы

1. Дайте определение интеграла типа Коши с непрерывной плотностью по конечной кусочно-гладкой кривой.
2. Сформулируйте теорему о дифференцируемости интеграла типа Коши.
3. Почему интегральная формула Коши является частным случаем интеграла типа Коши?
4. Верно ли утверждение: *если $f(z)$ - аналитическая функция в некоторой области D, то $f'(z)$ также является аналитической в этой области*? Ответ обоснуйте.
5. По какой формуле можно вычислять производные высших порядков аналитической в области D функции $f(z)$?
6. Напишите формулу среднего значения аналитических функций.
7. Напишите неравенства Коши для аналитической функции.
8. В чем состоит суть теоремы Лиувилля для аналитических функций?
9. Сформулируйте и докажите теорему Морера.
10. Сформулируйте и докажите теорему о стирании особенностей для аналитических функций.
11. В чем состоит суть теоремы о максимуме модуля аналитической функции?
12. Дайте определение функций, удовлетворяющих условию Гельдера на множестве L. Приведите пример непрерывной на некотором множестве G функции, не удовлетворяющей на этом множестве условию Гельдера.
13. Как определяется сингулярный интеграл Коши?

14. Докажите справедливость утверждения: *если функция* $f(z)$ *является аналитической в односвязной области* D, *то для любой замкнутой простой кусочно-гладкой кривой* $\gamma \subset D$ *имеет место формула*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f(t)dt}{t-z}=\begin{cases} f(z), & \text{если } z \in G^{+}, \\ \frac{1}{2}f(z), & \text{если } z \in \gamma, \\ 0, & \text{если } z \in D \setminus (G^{+} \cup \gamma), \end{cases}$$

где G^{+} *- конечная область, ограниченная кривой* γ.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Пользуясь формулой для производных высших порядков, вычислите следующие интегралы:

а) $\oint_{L}\frac{\cos z}{z^{2}}dz$, где $L=\{z: \ |z|=1\}$;

б) $\oint_{L}\frac{\sin z}{\left(z-\frac{\pi}{3}\right)^{3}}dz$, где $L=\{z: \ |z-i|=4\}$.

2. Найдите первообразные функций, где a и b- отличные от нуля константы:

а) e^{az};

б) $\sin az$;

в) $e^{az}\cos bz$.

3. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в кольце $r<|z-a|<R$. Докажите, что интеграл $\int_{|z-a|=\rho} f(z)dz$, где $r<\rho<R$, не зависит от числа ρ.

Задание для самостоятельной работы

1. Пользуясь формулой для производных высших порядков, вычислите следующие интегралы:

а) $\oint_{L}\frac{\cos z}{(z-i)^{3}}dz$, где $L=\{z: \ |z-i|=1\}$;

б) $\oint_{L}\frac{e^{z}}{(z-1)^{3}}dz$, где $L=\{z: |z-1|=1\}$.

2. Найдите первообразные следующих функций, где a- отличная от нуля константа:

а) $\cos az$; б) ze^{az}; в) $z\cos az$.

3. Пусть функция $f(z)$ является аналитической в кольце $r<|z-a|<R$. Докажите, что интеграл $\int_{|\varsigma-a|=\rho}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z}d\varsigma$, где $r<\rho<R$, не зависит от ρ.

Практическое занятие №13. Степенные ряды в комплексной области

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение степенного ряда. Приведите примеры.
2. Что называется кругом сходимости степенного ряда?
3. Перечислите основные свойства степенных рядов.
4. Сформулируйте теорему о разложимости аналитической функции в степенной ряд.

5. Запишите неравенства Коши для коэффициентов степенного ряда аналитической функции.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите круг сходимости степенного ряда, если:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1+i}{3+4i}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}$ в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2iz-3)^n}{(1+i)^n}$.

2. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\frac{z}{z^2+4}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z+1-i)^n$ и его коэффициенты c_0 и c_1.

3. Приведите пример степенного ряда, круг сходимости которого $T_2=\{z:|z-i|<2\}$. Что можно сказать о сходимости этого ряда в точках $z=1$ и $z=-3-i$?

4. Известно, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z+i)^n$ сходится в точке $z_1=1-2i$ и расходится в точке $z_2=-3-5i$. Что можно сказать о сходимости этого ряда в точках $z_3=0$, $z_4=-1$, $z_5=-2+i$, $z_6=-4+6i$?

5. Вычислите интеграл от функции $f(z)$ по линии L, если:

а) $f(z)=\frac{z+2i}{(z^2+1)(z+1)^2}$, $L=\{z:\ |z-1|=1\}$; б) $f(z)=\frac{e^z}{(z-i)^3}$, $L=\{z:\ |z-2|=10\}$.

Задание для самостоятельной работы

1. Найдите круг сходимости степенного ряда, если:

а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{1+i}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^n}{n}$ в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(iz-5)^n}{(3+4i)^n}$.

2. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\frac{1}{z^2+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z+2+i)^n$ и его коэффициенты c_0 и c_1.

3. Приведите пример степенного ряда, круг сходимости которого $|z+i|<5$. Что можно сказать о сходимости этого ряда в точках $z=1$ и $z=-3+10i$?

4. Известно, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-i)^n$ сходится в точке $z_1=2+i$ и расходится в точке $z_2=-3-i$. Что можно сказать о сходимости этого ряда в точках $z_3=0$, $z_4=3i$, $z_5=-2+i$, $z_6=-1+6i$?

5. Вычислите интеграл от функции $f(z)$ по линии L, если:

а) $f(z)=\frac{z+i}{z^2+4}$, $L:|z-i|=2$; б) $f(z)=\frac{z^4+4z+1}{(z-i)^{2012}}$, $L:|z-i|=1$.

6. В зависимости от значений параметра $a\in C$ вычислите $\int\limits_L\frac{z^2+1}{(z-a)^2}dz$, где $L=\{z:\ |z|=1\}$.

Практическое занятие №14. Разложение аналитических функций в ряд Тейлора. Нули аналитической функции. Теорема единственности. Аналитическое продолжение

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение ряда Тейлора для функции $f(z)$ с центром в точке a. Приведите примеры.
2. Как находятся коэффициенты ряда Тейлора?
3. Сформулируйте определение нуля аналитической функции $f(z)$. Приведите примеры.
4. Что называется порядком (кратностью) нуля аналитической функции $f(z)$? Приведите примеры.
5. Какие способы определения порядка нулей аналитической функции Вам известны?
6. Дайте определение предельной точки. Приведите примеры.
7. Сформулируйте теорему единственности.
8. Может ли аналитическая в области D функция $f(z)$ иметь в ней бесконечно много нулей?
9. В каком случае функция $F(z)$ называется аналитическим продолжением функции $f(z)$. Приведите примеры.
10. Сколькими способами можно аналитически продолжить функцию с заданного множества, имеющего предельную точку?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z-a$ и найдите круг сходимости, если:

а) $f(z)=e^{iz}$, $a=-1$; б) $f(z)=\sin^2 z$, $a=0$; в) $f(z)=\dfrac{z}{z^2-4}$, $a=2i$.

2. Вычислите интеграл:

а) $\displaystyle\int\limits_{|z+1|=2}\frac{e^{iz}}{(z+1)^2}dz$; б) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1}\frac{\sin^2 z}{z}dz$.

3. Найдите все нули функции $f(z)$ и укажите их порядки, если:

а) $f(z)=(z^2-9)(z^2+9)$; б) $f(z)=\dfrac{\sin^3 z}{z}$.

4. Найдите порядок нуля $a=0$ функции $f(z)$, если:

а) $f(z)=z^2\sin z$; б) $f(z)=z\left(e^{-z^2}-1\right)$.

5. Пусть число a является нулем порядка m и n соответственно для аналитических функций $f(z)$ и $\varphi(z)$. Что можно сказать о порядке нуля a для функции:
а) $f(z)+\varphi(z)$; б) $f(z)\cdot\varphi(z)$; в) $f'(z)\cdot\varphi''(z)$.

6. Найдите все предельные точки множества E, если:

а) $E=[1-i;-1+i]$; б) $E=\left\{z: z=1+\dfrac{i}{n}, n\in N\right\}$.

7. Определите, существует ли функция $f(z)$, аналитическая в единичном круге и удовлетворяющая условиям:

а) $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$, $n\in N$; б) $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+\sin\frac{\pi n}{2}}$, $n\in N$.

8. Используя теорему единственности, докажите равенство $\sin^2 z+\cos^2 z=1$.

9. Объясните, почему не противоречит теореме единственности равенство $\sin z=\cos z$ при $z=\frac{\pi}{4}+2\pi n$, $n\in Z$.

10. Докажите, что функция $F(z)=\frac{1}{1-i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-i}{1-i}\right)^n$ является аналитическим продолжением функции $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}z^n$.

Задание для самостоятельной работы

1. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Тейлора по степеням $z-a$ и найдите её круг сходимости, если:

а) $f(z)=ze^{-z}$, $a=-i$; б) $f(z)=\frac{z+2}{z^2+4}$, $a=2$.

2. Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_{|z+i|=2}\frac{ze^{-z}}{(z+1)^3}dz$; б) $\int\limits_{|z-2|=1}\frac{z+2}{(z^2+4)(z-2)}dz$.

3. Найдите порядок нуля $a=0$ функции $f(z)$, если:

а) $f(z)=z\sin z-z^2$; б) $f(z)=z\left(e^{z^2}-1\right)-z^3$.

4. Пусть число a является нулем порядка m и n соответственно для аналитических функций $f(z)$ и $\varphi(z)$. Что можно сказать о порядке нуля a для функции:

а) $f(z)-\varphi(z)$; б) $f^2(z)\cdot\varphi^3(z)$; в) $c_1\cdot f(z)+c_2\cdot\varphi(z)$, $c_1,c_2\in C$.

5. Найдите предельные точки множества E, если:

а) $E=\{z:\ |z|=1\}$; б) $E=\left\{z:z=\frac{1}{n}+2i, n\in N\right\}$.

6. Определите, существует ли функция $f(z)$, аналитическая в единичном круге и удовлетворяющая условиям:

а) $f\left(\frac{1}{n}\right)=-f\left(-\frac{1}{n}\right)$, $n\in N$; б) $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2+\cos^2\pi n}$, $n\in N$.

7. Используя теорему единственности, докажите равенство $\sin 2z=2\sin z\cos z$.

8. Объясните, почему не противоречит теореме единственности равенство $\cos z=\cos^2 z$ при $z=2\pi n$, $n\in Z$.

9. Докажите, что функция $F(z)=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{4^n}$ является аналитическим продолжением функции $f(z)=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z+1)^n}{3^n}$

Практическое занятие №15. Ряд Лорана. Изолированные особые точки аналитической функции

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение ряда Лорана.

2. Что называется главной (правильной) частью ряда Лорана? Приведите примеры.
3. Что является областью сходимости ряда Лорана?
4. Сформулируйте теорему Лорана.
5. Дайте определение изолированной особой точки функции $f(z)$. Приведите примеры.
6. В каком случае функция $f(z)$ называется правильной в точке z_0? Приведите примеры.
7. Сформулируйте определение полюса функции $f(z)$. Приведите примеры.
8. Что называется кратностью полюса функции $f(z)$?
9. Дайте определение существенно особой точки функции $f(z)$. Приведите примеры.
10. Сформулируйте теорему Сохоцкого-Вейерштрасса.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите область сходимости:

а) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{3^n z^n}{n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^n}{n!} + \frac{n}{z^{n+1}} \right)$.

2. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана по степеням $z - z_0$, если:

а) $f(z) = \frac{z}{(z+i)(z-3)}$, $z_0 = 0$; б) $f(z) = z^2 \sin\frac{1}{z-1}$, $z_0 = 1$.

3. Определите характер особых точек функции $f(z)$, если:

а) $f(z) = \frac{1}{\sin z}$; б) $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z^2}}$; в) $f(z) = \frac{1-\cos 2z}{z^2}$.

4. Пусть функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ имеют полюсы в точке z_0 порядка m и n соответственно. Определите характер особенности в точке z_0 функции:

а) $f(z)\cdot\varphi(z)$; б) $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$; в) $f(z)+\varphi(z)$.

5. Вычислите интеграл от функции $f(z)$ по кривой Γ, если:

а) $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}$, $\Gamma = \left\{ z\colon |z-1| = \frac{1}{2} \right\}$; б) $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$, $L = \{ z\colon |z| = 1 \}$.

6. Проверьте справедливость теоремы Сохоцкого-Вейерштрасса для функции $\sin\frac{1}{z}$.

Задание для самостоятельной работы

1. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0, если:

а) $f(z) = \frac{z^2+1}{z^2-5z+6}$, $z_0 = 2$; б) $f(z) = (z^2-1)\cdot e^{\frac{1}{z^2}}$, $z_0 = 0$.

2. Определите характер особых точек функции $f(z)$, если:

а) $f(z) = \frac{z^2-1}{z^3-1}$; б) $f(z) = \frac{1-e^{z^2}}{z^4-z^2}$; в) $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z^2}}}{1-\cos^2 z}$.

3. Постройте пример функции, имеющей в расширенной комплексной плоскости следующие особенности:

а) ноль второго порядка в бесконечности;

б) ноль первого порядка в точке $z=0$ и простой полюс в бесконечности;

в) полюс третьего порядка в точке $z=i$ с главной частью $\frac{c_{-3}}{(z-i)^3}$ и полюс первого порядка в бесконечности.

4. Пусть $f(z)$ однозначная функция, не имеющая в области D других особенностей, кроме полюсов. Докажите, что функция $\frac{f'(z)}{f(z)}$ имеет простые полюсы во всех полюсах функции $f(z)$ и в тех точках, в которых $f(z)=0$.

Практическое занятие №16. Вычет функции относительно изолированной особой точки. Понятие логарифмического вычета и принцип аргумента

Теоретические вопросы

1. Дайте определение изолированной особой точки функции $f(z)$. Приведите примеры.
2. Сформулируйте определение вычета функции $f(z)$ в изолированной особой точке.
3. Чему равен вычет функции $f(z)$ в правильной точке z_0?
4. Как найти $\underset{z_0}{\operatorname{Res}} f(z)$, если z_0 является простым полюсом функции $f(z)$?
5. Сформулируйте основную теорему о вычетах.
6. Дайте определение вычета функции относительно бесконечно удаленной точки.
7. Чему равна сумма вычетов относительно всех особенностей аналитической функции в расширенной комплексной плоскости?
8. Дайте определение логарифмического вычета функции $f(z)$.
9. В чем состоит принцип аргумента для аналитических функций?
10. Сформулируйте теорему Руше.
11. Сформулируйте основную теорему алгебры и докажите ее.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите вычеты функции $f(z)$ во всех ее изолированных особых точках, если:

а) $f(z)=\frac{z+2}{z^2-1}$; б) $f(z)=\frac{e^{iz}}{z^2(z-\pi)}$; в) $f(z)=\frac{\sin z}{z^4\cos z}$.

2. Вычислите:

а) $\int\limits_L \frac{z+1}{(z-1)(z+5)^2}dz$, если $L=\{z:\ |z|=3\}$;

б) $\int\limits_L \frac{e^{iz}}{(z+1)(z+2)^2}$, если $L=\{z:|\operatorname{Re} z|+|\operatorname{Im} z|=3\}$;

в) $\int\limits_L \frac{dz}{\sin z}$, если L – единичная окружность.

3. Найдите вычеты в точке $z=\infty$ следующих функций:

а) $f(z)=\frac{z^4+1}{z^6-1}$; б) $f(z)=\cos\frac{(z+2)\pi}{2z}$.

4. Найдите логарифмический вычет функции $f(z)=\frac{z^{2015}}{z-2016}$ в точке z_0, если:

а) $z_0 = 0$; б) $z_0 = 2013$; в) $z_0 = 2014$.

5. Пользуясь теоремой Руше, найдите число корней приведенных уравнений в указанных областях:

а) $z^4 - 3z + 1 = 0$, $|z| < 1$; б) $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$, $|z| < 1$.

Задание для самостоятельной работы

1. Найдите вычеты функции $f(z)$ во всех ее изолированных особых точках, если:

а) $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2+1}$; б) $f(z) = \dfrac{\sin \pi z + 1}{z^2(z+1)}$; в) $f(z) = \dfrac{\cos \pi z}{(z-1)^2 \sin \pi z}$.

2. Вычислите:

а) $\int\limits_L \dfrac{z+3}{(z+1)(z-5)^2} dz$, если $L = \{z : |z+1| = 1\}$;

б) $\int\limits_L \dfrac{\cos \pi z}{(z-1)(z-2)^2}$, если $L = \{z : \mathrm{Re}^2\, z + \mathrm{Im}^2\, z = 5\}$;

в) $\int\limits_L \dfrac{\cos 2z dz}{\sin z}$, если L – единичная окружность.

3. Найдите вычеты в точке $z = \infty$ следующих функций:

а) $f(z) = \dfrac{\sin \frac{1}{z}}{z-1}$; б) $f(z) = z \cos^2 \dfrac{\pi}{z}$.

4. Найдите логарифмический вычет функции $f(z) = \dfrac{z+i}{z^2+4}$ в точке z_0, если:

а) $z_0 = -i$; б) $z_0 = 2i$; в) $z_0 = -2i$.

5. Пользуясь теоремой Руше, найдите число корней приведенных уравнений в указанных областях:

а) $2z^4 - 5z + 2 = 0$, $|z| < 1$; б) $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$, $|z| < 1$.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Контрольная работа.

Образец контрольной работы

1. В каких точках имеет производную функция $w = (\bar{z} + i)^2 - 2iz^4$? Чему она равна?

2. Угол наклона некоторой линии Γ в точке $z_0 = 1 - i\sqrt{3}$ равен $\dfrac{\pi}{6}$. Найти угол наклона образа этой линии при отображении $w = (2-z)^2$ в точке $w_0 = -2 + 2i\sqrt{3}$.

3. Найти аргумент числа $a = (\ln(-i) - \sin 2i)e^{1-i}$.

4. В каких точках плоскости функция $w = \cos z$ принимает действительные значения?

5.Вычислить интеграл от функции $f(z) = i - z + \mathrm{Re}\, z$ по отрезку $[1-i; -1+i]$.

Критерии оценивания контрольной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно реализован каждый метод решения	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Критерии получения зачета:

Зачтено – студент имеет оценки не ниже «удовлетворительно» по результатам работы на практических занятиях, по результатам выполнения заданий для самостоятельной работы; итоговая контрольная работа написана на оценку не ниже, чем удовлетворительно.

Не зачтено - студент имеет оценки «неудовлетворительно» по результатам работы на практических занятиях или по результатам выполнения заданий для самостоятельной работы; итоговая контрольная работа написана на оценку неудовлетворительно.

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Основная литература

1. Эйдерман В.Я. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление: учебное пособие для вузов / В.Я. Эйдерман. – М.: Издательство Юрайт, 2021. – 263 с. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/468277.

2. Аксенов А.П. Теория функций комплексной переменной в 2 ч.: учебник и практикум для вузов / А.П. Аксенов. – М.: Издательство Юрайт, 2020. – 313 с. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/451868.

7.2. Дополнительная литература

1. Бугров Я.С. Высшая математика в 3 т. Том 3. В 2 кн. Книга 2. Ряды. Функции комплексного переменного: учебник для вузов / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Издательство Юрайт, 2020. – 219 с. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/452425.

2. Далингер В. А. Комплексный анализ: учебное пособие для вузов / В.А. Далингер, С.Д. Симонженков. – М.: Издательство Юрайт, 2021. – 143 с. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/472770.

3. Никитин А.А. Математический анализ. Сборник задач: учебное пособие для вузов / А. А. Никитин. – М.: Издательство Юрайт, 2021. – 353 с. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/469117.

4. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного: учебник для вузов / И. И. Привалов. – М.: Издательство Юрайт, 2021. – 402 с. – Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. – URL: https://urait.ru/bcode/468294.

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Национальный открытый университет http://www.intuit.ru
2. Образовательный математический сайт http://exponenta.ru
3. Общероссийский математический портал http://www.mathnet.ru

8. Материально-техническое обеспечение

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, оснащенная стандартной учебной мебелью, настенной доской, настенным экраном, мультимедиапроектором, ноутбуком и комплектом колонок.

Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенная стандартной учебной мебелью.

Помещение для самостоятельной работы – компьютерный класс с доступом к сети «Интернет» и ЭИОС СмолГУ.

9. Программное обеспечение

Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), лицензия 66975477 от 03.06.2016 (бессрочно).

Обучающимся обеспечен доступ к ЭБС «Юрайт», а также доступ в электронную информационно-образовательную среду университета.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 03B6A3C600B7ADA9B742A1E041DE7D81B0
Владелец: Артеменков Михаил Николаевич
Действителен: с 04.10.2021 до 07.10.2022