

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»

Проректор по учебно-методической работе

Ю.А. Устименко

«09» сентября 2021 г.

Рабочая программа дисциплины
Б1.О.22 Уравнения математической физики

Направление подготовки: **11.03.01 Радиотехника**

Направленность (профиль): **Радиоэлектронные системы и комплексы**

Форма обучения: очная

Курс – 2

Семестр – 4

Всего зачетных единиц – 4, часов – 144

Форма отчетности: экзамен – 4 семестр

Программу разработал: доктор физико-математических наук, профессор К.М. Расулов

Одобрена на заседании кафедры

«02» сентября 2021 г., протокол № 1

Смоленск
2021

1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Уравнения математической физики» относится к обязательным дисциплинам образовательной программы по направлению подготовки 11.03.01 «Радиотехника». Дисциплина носит прикладной характер и позволяет показать, как различные математические методы (в основном методы решения дифференциальных уравнений с частными производными и интегральных уравнений) позволяют получать решения физических задач разного типа. Содержание дисциплины служит основой для освоения профильных дисциплин.

Для успешного освоения данной дисциплины необходимы компетенции студентов, сформированные при изучении дисциплин: «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения», «Физика».

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
ОПК-1. Способен использовать положения, законы и методы естественных наук и математики для решения задач инженерной деятельности	Знать: фундаментальные законы природы, основные законы и методы математики. Уметь: применять законы и методы математики для решения задач теоретического и прикладного характера. Владеть: навыками использования основных теорий и методов математики при решении практических задач.

3. Содержание дисциплины

Классификация дифференциальных уравнений с частными производными. Линейные и квазилинейные дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. Приведение к канонической форме.

Уравнения гиперболического типа. Постановка основных задач. Задача Коши для волнового уравнения. Смешанная задача. Понятие корректности постановки задач уравнений математической физики.

Уравнения параболического типа. Постановка основных задач. Единственность решения задачи Коши. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности.

Уравнения эллиптического типа. Постановка основных задач. Гармонические функции на плоскости и в трёхмерном пространстве, их основные свойства. Решение задачи Дирихле для круга и шара методом Фурье. Метод функции Грина для решения задачи Дирихле. Элементы теории потенциала.

Уравнение Гельмгольца. Физический смысл решений уравнения Гельмгольца. Постановка основных задач.

4. Тематический план

Темы	Всего часов	Формы занятий		
		Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа
1. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными	22	4	6	10
2. Уравнения гиперболического типа	22	6	4	11
3. Уравнения параболического типа	50	10	10	11
4. Уравнения эллиптического типа	72	10	10	11
5. Уравнение Гельмгольца.	14	2	2	10
Экзамен	27	–	–	27
Итого	144	32	32	80

5. Виды учебной деятельности

Занятия лекционного типа

Лекции 1,2. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка. Приведение к канонической форме: общая классификация дифференциальных уравнений с частными производными; классификация линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка; приведение к канонической форме линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с 2-мя переменными; случай гиперболического, параболического и эллиптического уравнений.

Лекции 3,4. Уравнения гиперболического типа. Постановка основных задач: постановка задачи Коши, граничной задачи и смешанной задачи для гиперболического уравнения; одномерный, двумерный и трёхмерный случаи; вывод формулы Даламбера; решение задачи для конечной струны.

Лекция 5. Интеграл энергии, теоремы единственности и устойчивости: постановка краевых задач для волнового уравнения; интеграл энергии и его применение к доказательству единственности решения; доказательство устойчивости; понятие корректности постановки задач уравнений математической физики.

Лекция 6. Уравнения параболического типа. Постановка основных задач: постановка задачи Коши, граничной задачи и смешанной задачи для уравнения параболического типа; уравнение теплопроводности; принцип максимума и минимума для решения смешанной задачи в случае однородного уравнения теплопроводности; доказательство единственности и устойчивости решения смешанной задачи; единственность решения задачи Коши.

Лекция 7. Решение задачи Коши для уравнения теплопроводности: интегральные преобразования Фурье; решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности; обобщение на двумерный и трёхмерный случай.

Лекция 8. Решение задачи об остывании бесконечного круглого осесимметричного цилиндра: понятие о функциях Бесселя; их применение к решению задачи об остывании бесконечного круглого осесимметричного цилиндра.

Лекция 9. Решение задачи о колебании круглой мембраны с закреплёнными границами: применение функций Бесселя к решению задачи о колебании круглой мембраны с закреплёнными границами; решение задачи о колебании прямоугольной мембраны.

Лекция 10. Метод разделения переменных для параболических уравнений. Общая постановка задачи Штурма-Лиувилля: собственные значения и собственные функции задачи Штурма-Лиувилля в общей постановке; основные теоремы о собственных функциях и собственных значениях; доказательство теоремы об ортогональности с весом системы собственных функций.

Лекции 11,12. Уравнения эллиптического типа. Постановка основных задач. Уравнения Лапласа и Пуассона. Гармонические функции и их основные свойства: физические процессы, описываемые уравнениями Пуассона и Лапласа; постановка краевых задач Дирихле, Неймана и третья краевая задача; гармонические функции 2-х переменных, их связь с аналитическими и основные свойства; гармонические функции 3-х переменных; 1-ая и 2-ая формулы Грина; интегральные представления для произвольной функции 3-х переменных и для гармонической функции; основные свойства гармонической функции.

Лекции 13. Задача Дирихле. Теоремы единственности и устойчивости. Метод разделения переменных для задачи Дирихле в случае круга и шара: постановка задачи Дирихле; доказательство единственности и устойчивости решения задачи Дирихле; вывод оператора Лапласа в цилиндрической и сферической системах координат; метод Фурье для круговых областей; решение задачи для внешности круга и для кругового кольца; интеграл

Пуассона; решение задачи Дирихле для шара, для внешности шара и для шарового слоя; ортогональные многочлены и присоединённые функции Лежандра.

Лекция 14. Метод функции Грина для решения задачи Дирихле: решение краевых задач методом функции Грина; функция Грина для круга, шара, полушара, полупространства.

Лекция 15. Элементы теории потенциала. Применение потенциалов к решению краевых задач: объёмный потенциал и его свойства; объёмный потенциал равномерно заряженного шара; логарифмический потенциал; поверхностные потенциалы простого и двойного слоя; криволинейные потенциалы простого и двойного слоя; применение потенциалов простого и двойного слоя к решению краевых задач.

Лекция 16. Уравнение Гельмгольца: однородное и неоднородное уравнения Гельмгольца; сведение эллиптического уравнения к уравнению Гельмгольца; принцип максимума и минимума; фундаментальное решение однородного уравнения Гельмгольца.

Занятия семинарского типа (практические занятия).

Практические занятия 1,2,3. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка. Приведение к канонической форме.

Контрольные вопросы: по занятиям № 1-2 (см. [2] Методические указания для обучающихся).

Задания для аудиторной работы: занятия 1-2 (см. [2] Методические указания для обучающихся).

Задания для самостоятельной работы: занятия 1-2 (см. [2] Методические указания для обучающихся).

Практические занятия 4,5. Уравнения гиперболического типа. Постановка основных задач.

Контрольные вопросы: занятие № 3 (см. [2] Методические указания для обучающихся).

Задания для аудиторной работы: занятие № 3 (см. [2] Методические указания для обучающихся); № 4.20; 4.23; 4.25 (см. [2] основная литература).

Задания для самостоятельной работы: занятие № 3 (см. [2] Методические указания для обучающихся); № 4.21; 4.27; 4.28 (см. [2] основная литература).

Практические занятия 6,7,8. Интегральные преобразования Фурье. Решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности.

Контрольные вопросы: занятие № 4 (см. [2] Методические указания для обучающихся).

Задания для аудиторной работы: занятие № 4 (см. [2] Методические указания для обучающихся).

Задания для самостоятельной работы: занятие № 4 (см. [2] Методические указания для обучающихся).

Практические занятия 9,10. Решение задачи о колебании круглой мембраны с закреплёнными границами. Решение задачи о колебании прямоугольной мембраны.

Контрольные вопросы: вывод уравнения поперечных колебаний мембраны; вид оператора Лапласа в полярной системе координат, вывод формулы; постановка начально-граничных задач для волнового уравнения на плоскости.

Задания для аудиторной работы: № 6.4; 6.5; 6.7; 6.13; 6.14 (см. [2] основная литература).

Задания для самостоятельной работы: № 6.6; 6.11; 6.12; 6.18 (см. [2] основная литература).

Практические занятия 11,12. Уравнения эллиптического типа. Постановка основных задач. Уравнения Лапласа и Пуассона. Гармонические функции и их основные свойства.

Контрольные вопросы: занятие № 5 (см. [2] Методические указания для обучающихся).

Задания для аудиторной работы: занятие № 5 (см. [2] Методические указания для обучающихся).

Задания для самостоятельной работы: занятие № 5 (см. [2] Методические указания для обучающихся).

Практические занятия 13. Задача Дирихле. Теоремы единственности и устойчивости. Метод разделения переменных для задачи Дирихле в случае круга и шара.

Контрольные вопросы: занятие № 6 (см. [2] Методические указания для обучающихся).

Задания для аудиторной работы: занятие № 6 (см. [2] Методические указания для обучающихся); № 9.10; 9.14; 9.15; 9.20 (см. [2] основная литература).

Задания для самостоятельной работы: занятие № 6 (см. [2] Методические указания для обучающихся); № 9.16; 9.21 (см. [2] основная литература).

Практическое занятие 14. Метод функции Грина для решения задачи Дирихле.

Контрольные вопросы: определение функции Грина; построение функции методом электростатических отображений; суть метода решения задачи Дирихле при помощи функции Грина.

Задания для аудиторной работы: № 43; 45; 47; 48.

Задания для самостоятельной работы: № 44; 46; 49.(см. [7] дополнительная литература).

Практическое занятие 15. Теория потенциалов. Применение потенциалов к решению краевых задач.

Контрольные вопросы: определение объёмного потенциала; определение потенциала простого и двойного слоя; определение криволинейного потенциала простого и двойного слоя; сведение краевых задач к интегральным уравнениям Фредгольма 2-го рода при помощи потенциалов простого и двойного слоя.

Задания для аудиторной работы: № 117; 119; 122; 127.

Задания для самостоятельной работы: № 118; 121; 125. (см. [7] дополнительная литература).

Практическое занятие 16. Уравнение Гельмгольца.

Контрольные вопросы: определение уравнения Гельмгольца; замена переменных, приводящая к этому уравнению; физический смысл решений уравнения; условия излучения.

Задания для аудиторной работы: № 217; 219; 221; 225.

Задания для самостоятельной работы: № 218; 220; 224. (см. [7] дополнительная литература).

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Контрольная работа

Образец контрольной работы:

1. Привести уравнение к канонической форме в каждой из областей, где сохраняется его тип $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

2. Найти закон колебаний бесконечной струны, определяемый уравнением $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если начальное отклонение задано условием:

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & \text{при } |x| \geq l \\ l - x, & \text{при } 0 \leq x \leq l \\ l + x, & \text{при } -l \leq x \leq 0, \end{cases} \quad \text{где } l - \text{ заданный отрезок.}$$

Начальная скорость и внешняя возмущающая сила равны нулю.

3. Найти прямое и обратное преобразование Фурье для функции:

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{при } x \leq 0 \\ 0, & \text{при } x > 0 \end{cases}$$

4. Доказать, что если $U(x,y)$ гармоническая функция, то также является гармонической функцией.

$$V(x,y) = U\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

5. Построить функцию Грина для полупространства.

Критерии оценивания контрольной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно реализован каждый метод решения в задачах	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Вопросы к экзамену

1. Понятие дифференциального уравнения в частных производных. Классификация.
2. Приведение к канонической форме линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя переменными.
3. Гиперболические уравнения. Постановка основных задач.
4. Решение задачи Коши для волнового уравнения.
5. Решение смешанной задачи для волнового уравнения.

6. Интеграл энергии. Единственность решения задачи Коши.
7. Понятие корректности постановки задач уравнений математической физики.
8. Интегральные преобразования Фурье.
9. Параболические уравнения. Постановка основных задач.
10. Решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности. Формула Пуассона.
11. Общая постановка задач Штурма-Лиувилля для параболических уравнений.
12. Основные теоремы о собственных значениях и собственных функциях задачи Штурма-Лиувилля.
13. Понятие о функциях Бесселя.
14. Решение задачи об остывании бесконечного круглого осесимметричного цилиндра.
15. Уравнения эллиптического типа. Постановка основных задач.
16. Уравнения Лапласа и Пуассона.
17. Гармонические функции на плоскости и их свойства.
18. Гармонические функции в трёхмерном пространстве. Первая и вторая формулы Грина.
19. Задача Дирихле. Теорема единственности и устойчивости.
20. Оператор Лапласа в цилиндрической системе координат.
21. Оператор Лапласа в сферической системе координат.
22. Метод разделения переменных для задачи Дирихле в случае круга.
23. Ортогональные полиномы и присоединённые функции Лежандра.
24. Метод разделения переменных для задачи Дирихле в случае шара.
25. Метод функции Грина для решения задачи Дирихле.
26. Примеры построения функции Грина для нескольких областей.
27. Формула Пуассона для круга.
28. Уравнение Гельмгольца.
29. Элементы теории потенциалов.
30. Сведение краевых задач для уравнений эллиптического типа к интегральным уравнениям.

Образец экзаменационного задания

1. Метод функции Грина для решения задачи Дирихле.
2. Уравнение Гельмгольца. Физический смысл его решений.
3. Решить задачу Дирихле для полупространства методом функции Грина.
4. Найти решение внутренней и внешней задачи Дирихле для круга радиуса a , если $U|_{r=a} = \cos^4 \varphi$.
5. Найти $f(z) = U + iV$, если $U = e^x \cos y$.

Критерии оценивания ответа на экзамене

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Правильный ответ на каждый вопрос	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25, 0,5 и 0,75 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

7. Перечень основной и дополнительной литературы

7.1 Основная литература

1. Байков В.А. Уравнения математической физики: учебник и практикум для вузов / В.А. Байков, А.В. Жибер. – М.: Издательство Юрайт, 2021. – 254 с. – Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. – URL: <https://urait.ru/bcode/471547>.
2. Палин В. В. Методы математической физики. Лекционный курс: учебное пособие для вузов / В.В. Палин, Е.В. Радкевич. – М.: Издательство Юрайт, 2021. – 222 с. – Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/472356>.

7.2. Дополнительная литература

1. Владимиров В.С. Уравнения математической физики: учеб. для студентов вузов/ В. С. Владимиров, В.В. Жаринов. - 2-е изд., стер. - М.: Физматлит, 2008. - 400 с.
2. Расулов К.М. Уравнения математической физики: основы теории и планы практических занятий. Учеб. пособие. 2-е изд., доп. - Смоленск: СмолГУ, 2008. - 66 с.
3. Емельянов В.М., Рыбакина Е.А. Уравнения математической физики. Практикум по решению задач. – С.-Пб.: Лань, 2008 – 224 с.
4. Захаров Е.В. Уравнения математической физики: учебник для студентов вузов по спец. "Механика", "Прикладная механика", "Прикладная математика и информатика"/ Е. В. Захаров, И.В. Дмитриева, С.И. Орлик. - М.: Академия, 2010. - 320 с.
5. Сабитов К.Б. Уравнения математической физики: учеб. пособие для студентов по спец. "Математика", "Прикл. математика и информатика" и "Физика"/ К. Б. Сабитов. - М.: Высш. школа, 2003. - 255 с.
6. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1976. - 296с.
7. Бицадзе А.В., Калинин Д.Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. – М.: Наука, 1977. – 223с.
8. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1977. – 735с.
9. Расулов К.М. Практикум по дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики: учебное пособие. Смоленск: ГАУ ДПОС «СОИРО», 2015. – 216 с.
10. Расулов К.М. Уравнения математической физики. - Смоленск: СГПУ, 2005. - 65 с.
11. Конашенко А.В. Математический анализ: Ряды. Уравнения математической физики. Элементы функционального анализа: планы практ. занятий. - Смоленск: СмолГУ, 2006. - 28

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Википедия (<http://www.wikipedia.ru>).
2. Российская Государственная Библиотека: <http://www.rsl.ru/>.
3. Научная электронная библиотека: <http://elibrary.ru/>.
4. Университетская информационная система «Россия»: <http://uisrussia.msu.ru>

8. Материально-техническое обеспечение

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, оснащенная стандартной учебной мебелью, настенной доской, настенным экраном, мультимедиапроектором, ноутбуком и комплектом колонок.

Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенная стандартной учебной мебелью.

Помещение для самостоятельной работы – компьютерный класс с доступом к сети «Интернет» и ЭИОС СмолГУ.

9. Программное обеспечение

Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), лицензия 66975477 от 03.06.2016 (бессрочно).

Обучающимся обеспечен доступ к ЭБС «Юрайт», а также доступ в электронную

информационно-образовательную среду университета.

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 03B6A3C600B7ADA9B742A1E041DE7D81B0

Владелец: Артеменков Михаил Николаевич

Действителен: с 04.10.2021 до 07.10.2022