Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»
Проректор по учебно-
методической работе
___________Ю.А. Устименко
«08» сентября 2021 г.

Рабочая программа дисциплины
Б1.О.13 Математический анализ

Направление подготовки: **09.03.03 Прикладная информатика**
Направленность (профиль): **Информационные системы организаций и предприятий**
Форма обучения: очная
Курс – 1
Семестр – 1, 2
Всего зачетных единиц – 8,часов – 288
Форма отчетности: экзамен – 1,2 семестр

Программу разработал
старший преподаватель Курицын С.Ю.

Одобрена на заседании кафедры
«01» сентября 2021 г., протокол № 1

Заведующий кафедрой _________К.М. Расулов

Смоленск
2021

1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Математический анализ» относится к обязательной части образовательной программы. Она изучается в 1-2 семестрах и является основой для изучения ряда дисциплин таких, как теория вероятностей и математическая статистика, численные методы, имитационное моделирование, математическое моделирование и др. Для успешного освоения данной дисциплины необходимы компетенции студентов, сформированные при изучении школьного курса математики.

Изучение курса основано на традиционных методах высшей школы, тесной взаимосвязи со смежными курсами, а также на использовании современной учебной, методической литературы, информационных и образовательных технологий.

Цели освоения дисциплины:

– овладение основными понятиями математического анализа;

– овладение логическими основами курса, необходимыми для решения теоретических и практических задач;

– приобретение навыков использования аппарата математического анализа при решении задач на экстремумы, геометрических и физических задач;

– формирование навыков самостоятельной работы, необходимых для использования знаний при изучении специальных дисциплин и дальнейшей практической деятельности;

– развитие математической интуиции, воспитание математической культуры.

Задачи освоения дисциплины:

– познавательная – глубокое освоение первичных общематематических понятий, изучаемых в математическом анализе, что необходимо для изучения смежных дисциплин.

– воспитательная – привитие и развитие культуры мышления, способности логически верно выстраивать устную и письменную речь, понимать необходимость доказательств, как в математике, так и в реальных жизненных ситуациях, при общении с коллегами и при работе в ученическом и учительском коллективах.

– развивающая – усвоение определенного количества информации по данной дисциплине, накопленной человечеством в процессе развития математики, привитие способности понимания значения математического анализа в других разделах математики и возможности применения полученных знаний в своей будущей педагогической (или иной другой) профессиональной деятельности.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
ОПК-1. Способен применять естественнонаучные и общеинженерные знания, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности	**Знать**: основные законы естественнонаучных дисциплин, базовый аппарат математического анализа и моделирования, необходимые для осуществления профессиональной деятельности; **Уметь**: применять знания в области естественнонаучных и математических дисциплин для проведения теоретических и экспериментальных исследований в профессиональной деятельности; **Владеть**: методами математического анализа и моделирования, навыками в области естественнонаучного и общеинженерного знания, позволяющими осуществлять исследования в профессиональной деятельности.

3. Содержание дисциплины

1. **Введение в анализ.** Числовые множества, функции. Предел последовательности. Предел функции. Свойства пределов. Бесконечно малые и ограниченные функции.Бесконечно

большие функции. Эквивалентные функции. Непрерывность, свойства непрерывных функций. Точки разрыва функции и их классификация. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

2. **Дифференциальное исчисление функций одной переменной**. Производная, ее геометрический и экономический смысл. Дифференцируемость и дифференциал. Правила дифференцирования. Дифференцирование сложной и обратной функций. Производные высших порядков. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя. Формула Тейлора. Исследование функций с помощью производной: монотонность, экстремумы, выпуклость, точки перегиба, асимптоты. Построение графика функции.
3. **Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных.** Понятие функции нескольких переменных. Предел и непрерывность функции нескольких переменных. Частные производные. Дифференцируемость и дифференциал функции двух переменных. Экстремум функции двух переменных. Касательная плоскость и уравнение нормали к графику функции двух переменных.
4. **Интегральное исчисление функций одной переменной.** Неопределенный интеграл. Таблица неопределенных интегралов. Основные методы интегрирования. Определенный интеграл и его основные свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Методы интегрирования. Приложения определенного интеграла: площадь фигуры, объем тела, длина кривой. Понятие несобственных интегралов первого и второго рода.
5. **Основы интегрального исчисления функций нескольких переменных**Определение двойного и тройного интеграла и их основные свойства. Замена переменных в двойном интеграле. Приложения кратных интегралов. Криволинейный интеграл второго рода, его основные свойства и вычисление. Приложения криволинейного интеграла.
6. **Числовые ряды.** Понятие числового ряда. Сходящиеся и расходящиеся числовые ряды. Свойства числовых рядов. Знакоположительные ряды. Признаки сходимости знакоположительных рядов. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Теорема Римана.
7. **Функциональные ряды.** Понятие функционального ряда. Область сходимости и равномерная сходимость функционального ряда. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов. Степенные ряды. Разложение основных элементарных функций в степенной ряд. Ряды Фурье.

4. Тематический план

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий		
			лекции	практические занятия	самостоятельная работа
1 семестр					
1.	Введение в анализ	43	18	18	7
2.	Дифференциальное исчисление функций одной переменной	39	16	16	7
3.	Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	35	14	14	7
	Экзамен	27			27
	Всего за семестр	144	48	48	48
2 семестр					
1.	Интегральное исчисление функций одной переменной	34	14	14	6
2.	Основы интегрального исчисления функций нескольких переменных	25	10	10	5
3.	Числовые ряды	25	10	10	5
4.	Функциональные ряды	33	14	14	5

Экзамен	27			27
Всего за семестр	144	48	48	48
Итого	**288**	**96**	**96**	**96**

5. Виды образовательной деятельности[1]

Занятия лекционного типа

1 семестр

1. Действительные числа и их свойства. Модуль действительного числа.
   1.1. Понятиямножества и числа.
   1.2. Операции над множествами.
   1.3. Аксиома непрерывности множества действительных чисел
   1.4. Модуль действительного числа и его свойства.
   1.5. Теоремы о модулях.
2. Числовые последовательности.
   2.1. Понятиечисловой последовательности.
   2.2. Способы задания числовой последовательности.
   2.3. Основные свойства числовых последовательностей: монотонность и ограниченность.
3. Предел числовой последовательности.
   3.1. Определение пределачисловой последовательности.
   3.2. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности.
   3.3. Свойства сходящихся последовательностей.
   3.4. Примеры вычисления пределов последовательностей.
4. Функции одной переменной.
   4.1. Понятие функции одной переменной.
   4.2. Способы задания функций.
   4.3. Классификация функций
5. Свойства функций одной переменной.
   5.1. Монотонность и ограниченность функции.
   5.2. Понятие сложной и обратной функции.
6. Предел функции в точке.
   6.1. Определение предела функции в точке.
   6.2. Свойства пределов функции в точке.
7. Предел функции на бесконечности. Замечательные пределы.
   7.1. Понятие предела функции в бесконечности
   7.2. Первый и второй замечательные пределы и их применение к вычислению пределов.
   7.3. Бесконечно малые и бесконечно большие функции.
   7.4. Сравнение бесконечно малых функций.
8. Непрерывность функции в точке.
   8.1. Понятие непрерывности функции в точке.
   8.2. Локальные свойства непрерывных функций.
   8.3. Точки разрыва функции и их классификация.
   8.4. Глобальные свойства непрерывных функций.
9. Основные элементарные функции. Класс элементарных функций.
   9.1. Линейная функция и её свойства.
   9.2. Степенная функция и её свойства.
   9.3. Показательная и логарифмические функции и их свойства.
   9.4. Тригонометрические функции и их свойства.
10. Производная функции в точке.
    10.1. Задачи, приводящие к понятию производной.
    10.2. Определение производной функции.
    10.3. Геометрический и экономический смысл производной.
    10.4. Таблица производных основных элементарных функций.

[1] Содержание данного раздела может быть представлено в электронной информационно- образовательной среде СмолГУ или в опубликованном учебно-методическом пособии.

11. Дифференцирование функций одной переменной.
    11.1. Правила дифференцирования.
    11.2. Производная сложной функции.
    11.3. Производная обратной функции.
12. Дифференцируемость функции одной переменной.
    12.1. Понятие дифференцируемости функции.
    12.2. Дифференциал и его приложение к приближенным вычислениям.
13. Производные и дифференциалы высших порядков.
    13.1. Понятие производной n-го порядка.
    13.2. Формулы для высших производных некоторых функций
    13.3. Понятие дифференциала n-го порядка.
14. Формула Тейлора для функции одной переменной.
    14.1. Формула Тейлора.
    14.2. Формула Маклорена.
    14.3. Разложение некоторых элементарных функций по формуле Маклорена.
    14.4. Некоторые приложения формулы Маклорена
15. Основные теоремы дифференциального исчисления.
    15.1. Теорема Ферма.
    15.2. Теорема Ролля.
    15.3. Теорема Лагранжа.
    15.4. Правило Лопиталя.
16. Исследование функции с помощью производной первого и второго порядков.
    16.1. Признак монотонности функции.
    16.2. Отыскание экстремумов функции
    16.3. Направления выпуклости и точки перегиба.
17. Исследование функций и построение их графиков.
    17.1. Асимптоты графика функции.
    17.2. Примерная схема исследования функции.
18. Функции нескольких переменных.
    18.1. Понятие функции нескольких переменных.
    18.2. Способы задания функции нескольких переменных.
    18.3. График функции двух переменных, линии уровня.
    18.4. Понятие области на плоскости.
19. Предел и непрерывность функции двух переменных. Частные производные первого порядка для функции двух переменных.
    19.1. Определение предела функции двух переменных.
    19.2. Определение непрерывности функции двух переменных.
    19.3. Понятие точки разрыва функции двух переменных.
    19.4. Определение частной производнойфункции двух переменных.
20. Дифференцируемость функции двух переменных.
    20.1. Понятие дифференцируемости функции двух переменных.
    20.2. Производная сложной функции.
    20.3. Частные производные высших порядков для функции двух переменных.
21. Дифференциал функции и его приложения.
    21.1. Полный дифференциалфункции двух переменных.
    21.2. Уравнения касательной плоскости и нормали к графику функции двух переменных.
    21.3. Геометрический смысл дифференциала.
    21.4. Приложения дифференциала.
    21.5. Дифференциалы высших порядков.
22. Производная по направлению
    22.1. Понятие производной функции двух переменных по заданному направлению.
    22.2. Градиент функции.
23. Исследование функции двух переменных на экстремум.

23.1. Определение экстремума.
23.2. Необходимые условия существования экстремума.
23.3. Достаточные условия существования экстремума.

24. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области.
    24.1. Алгоритм отысканиянаибольшего и наименьшего значения функции двух переменных.
    24.2. Условный экстремум.

2 семестр

1. Первообразная
    1.1. Понятие первообразной и ее свойства.
    1.2. Понятие неопределенного интеграла и его свойства.
    1.3. Таблица основных интегралов.
2. Основные методы интегрирования.
    2.1. Непосредственное интегрирование.
    2.2. Метод подстановки в неопределенном интеграле.
    2.3. Метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле.
3. Приёмы вычисления интегралов
    3.1. Интегрирование рациональных дробей.
    3.2. Интегрирование тригонометрических и иррациональных функций.
4. Определённый интеграл.
    4.1. Задача, приводящая к понятию определенного интеграла.
    4.2. Понятие определенного интеграла.
    4.3. Свойства определенного интеграла.
5. Методы вычисления определенного интеграла.
    5.1. Формула Ньютона-Лейбница.
    5.2. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
6. Приложения определенного интеграла.
    6.1. Вычисление площади криволинейной трапеции.
    6.2. Вычисление дуги кривой.
    6.3. Вычисление объема тела вращения.
7. Несобственные интегралы.
    7.1. Понятие несобственного интегралов первогорода.
    7.2. Понятие несобственного интеграловвторого рода.
8. Двойные интегралы.
    8.1. Задача, приводящая к двойному интегралу.
    8.2. Понятие двойного интеграла и его свойства.
9. Повторные интегралы.
    9.1. Вычисление повторных интегралов.
    9.2. Вычисление двойных интегралов путем сведения к повторным.
    9.3. Замена переменных в двойном интеграле.
10. Тройные интегралы.
    10.1. Понятие тройного интеграла.
    10.2. Приложения двойных и тройных интегралов.
11. Криволинейные интегралы.
    11.1. Задача, приводящая к криволинейному интегралу второго рода.
    11.2. Понятие криволинейного интеграла второго рода и его свойства.
12. Методы вычисления криволинейных интегралов.
    12.1. Вычисление криволинейного интеграла по координатам.
    12.2. Приложения криволинейного интеграла.
13. Числовые ряды.
    13.1. Основные понятия теории числовых рядов.

13.2. Простейшие свойства числовых рядов.
13.3. Геометрический ряд.
13.4. Необходимый признак сходимости числовых рядов.
13.5. Гармонический ряд.

14. Знакоположительные ряды.
    14.1. Теоремы сравнения для знакоположительных числовых рядов.
    14.2. Признак Даламбера и радикальный признак Коши для знакоположительных числовых рядов.
15. Интегральный признак Коши-Маклорена.
    15.1. Формулировка и доказательство признака Коши-Маклорена.
    15.2. Обобщенный гармонический ряд.
16. Знакопеременные ряды.
    16.1. Понятие абсолютной и условной сходимости.
    16.2. Знакочередующиеся ряды.
    16.3. Признак Лейбница.
17. Свойства числовых рядов.
    17.1. Основные свойства числовых рядов.
    17.2. Теорема Римана.
    17.3. Теорема Дирихле.
18. Функциональные ряды.
    18.1. Понятие функционального ряда.
    18.2. Свойства функциональных рядов.
19. Равномерная сходимость функционального ряда.
    19.1. Понятиеравномерной сходимости функционального ряда.
    19.2. Признак Вейерштрасса.
    19.3. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.
20. Степенные ряды.
    20.1. Определение степенного ряда.
    20.2. Теорема Абеля.
    20.3. Интервал и область сходимости степенного ряда.
    20.4. Свойства степенных рядов.
21. Разложение функций в степенной ряд.
    21.1. Ряд Тейлора.
    21.2. Разложение основных элементарных функций в ряд Тейлора.
22. Приложения степенных рядов.
    22.1. Приближённые вычисления значений функций при помощи степенных рядов.
    22.2. Вычисление интегралов при помощи степенных рядов.
    22.3. Вычисление корней при помощи степенных рядов.
23. Тригонометрические ряды.
    23.1. Понятие тригонометрического ряда.
    23.2. Свойства суммы тригонометрического ряда.
    23.3. Тригонометрический ряд Фурье.
24. Сходимость тригонометрического ряда Фурье.
    24.1. Условия сходимости тригонометрических рядов Фурье.
    24.2. Ряды Фурье для чётных и нечётных функций.

Занятия семинарского типа

1 семестр

Занятие1. Действительные числа и их свойства. Модуль действительного числа.

<u>Теоретические вопросы</u>

1. Какие числа называются рациональными?
2. Какими свойствами обладает множество рациональных чисел?
3. В чем заключается свойство плотности рациональных чисел?

4. Что собой представляет множество действительных чисел?
5. Сформулируйте аксиому непрерывности множества действительных чисел.
6. Дайте определение модуля действительного числа. В чем заключается геометрический смысл модуля числа?
7. Перечислите основные свойства модуля.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Докажите, что число $\sqrt{3}$ не является рациональным.
2. Докажите, что если α – рациональное число ($\alpha \neq 0$), β – иррациональное число, то $\alpha\beta$ и $\alpha+\beta$ – иррациональные числа.
3. Приведите пример, показывающий, что сумма двух иррациональных чисел может быть числом рациональным.
4. Решите уравнения:

   а) $\left|\frac{x-1}{x+1}\right|=\frac{x-1}{x+1}$; б) $|x+4|+|x-3|=7$; в) $|x|=x+1$;

   г) $|x^2-5x+6|=-(x^2-5x+6)$; д) $\sqrt{x^2+6x+9}+\sqrt{x^2-6x+9}=7$.
5. Решите неравенства:

   а) $|x-1|\geq 2$; б) $|x-2|\leq 7$;

   в) $|x-5|+|x+2|>7$; г) $||2-3x|-1|>2$.
6. Докажите, что для любых действительных x справедливо неравенство $|3x-1|\leq|2x-1|+|x|$.

Занятие 2.Числовые последовательности.

Теоретические вопросы

1. Дайте определение числовой последовательности. Какие способы задания числовых последовательностей вам известны?
2. Какая числовая последовательность называется ограниченной (ограниченной сверху, ограниченной снизу)? Приведите примеры.
3. Сформулируйте определение возрастающей (убывающей) числовой последовательности. Приведите примеры.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Напишите 5 первых членов последовательности с общим членом:

   а) $x_n=\frac{n+2}{n^3+1}$; б) $x_n=(-1)^n\frac{n+1}{n^2}$.
2. Задайте последовательность рекуррентно:

   а) $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$; б) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{81}, \frac{1}{6561}, \ldots$.
3. Является ли последовательность $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots$ ограниченной?
4. Докажите, что последовательность $x_n=\frac{n}{5^n}$ монотонно убывает.

Занятие 3.Предел числовой последовательности.

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение предела числовой последовательности.
2. Какая последовательность называется бесконечно малой?
3. Пусть последовательность $\{a_n\}$ сходится, а последовательность $\{b_n\}$ расходится. Что можно сказать о сходимости последовательностей $\{a_n+b_n\}$ и $\{a_n b_n\}$?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Пользуясь определением предела, докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5(n-2)}{n}=5$.
2. Докажите, что последовательность $\{a^n\}$ является:

   а) бесконечно большой при $|a|>1$;

   б) бесконечно малой при $|a|<1$;

   в) ограниченной при $|a|=1$.
3. Вычислите пределы:

   а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n}{n+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n}{n^3+1}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n^2}{n+1}$;

   г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{3^n-2^n}$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-n}{n-\sqrt{n}}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n^3+2n^2-1}{n^3-7n^2+7n-7}+\dfrac{\sin 7n}{7n}\right)$.

Занятие 4. Функции одной переменной.

Теоретические вопросы

1. Дайте определение функции.
2. Какие способы задания функций вам известны?
3. Какая функция называется ограниченной сверху (снизу)?
4. Сформулируйте определение четной (нечетной) функции. Приведите примеры.
5. Какая функция называется периодической?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите область определения функции:

   а) $y=1-\lg x$; б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4x}}$;

   в) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$; г) $s=\sin\sqrt{t^2-1}+\ln(2-t)$.
2. Приведите пример аналитически заданной функции, определенной только при $x\in(-2;\,0)\cup(0;\,2)$.
3. Постройте график функции:

$$y=\begin{cases} \cos x, & -\pi\le x\le 0,\\ 1, & 0<x<1,\end{cases}$$

4. Зная график функции $y=f(x)$, постройте график функции:

   а) $y=|f(x)|$; б) $y=\frac{1}{2}\left(|f(x)|+f(x)\right)$.

5. Выясните, является ли функция нечетной:

   а) $y=x^3+x^2$; б) $y=\sin x\cdot\ln\frac{5-x}{5+x}$; в) $y=\frac{3^x+3^{-x}}{3^x-3^{-x}}$.

Занятие 5. Свойства функций одной переменной.

<u>Теоретические вопросы</u>

1. Какая функция называется ограниченной сверху (снизу)?
2. Сформулируйте определение неограниченной функции. Приведите пример.
3. Дайте определение возрастающей (убывающей) на области определения функции. Приведите примеры.
4. Какие функции называются монотонными на некотором множестве?
5. Что такое обратная функция?

<u>Задачи и упражнения для аудиторной работы</u>

1. Пользуясь определением монотонности, докажите, что функция:

   а) $y=x^2-2x$ убывает на промежутке $(-\infty;\,1]$;

   б) $y=\sqrt{x}$ возрастает на всей области определения.

2. Задайте графически функцию $y=f(x)$ с областью определения $D(f)$ и множеством значений $E(f)$:

   а) $D(f)=[2;\,3]$, $E(f)=[4;\,9]$;

   б) $D(f)=[2;\,5]$, $E(f)=[1;\,2]\cup(3;\,4]$;

   в) $D(f)=(-\infty;\,+\infty)$, $E(f)=(0;\,+\infty)$.

3. Найдите функцию, обратную к функции $y=5x+1$.

4. Какие из следующих функций являются ограниченными: $y=\sin x,\ \ y=\frac{1}{x},\ \ y=\ln x$?

Занятие 6. Предел функции в точке

<u>Теоретические вопросы</u>

1. Сформулируйте определение предела функции $y=f(x)$ в точке a на языке «$\varepsilon-\delta$» (по Коши).
2. Сформулируйте определение предела функции $y=f(x)$ в точке a на языке последовательностей (по Гейне).
3. Сформулируйте основные свойства предела функции в точке.
4. Приведите пример функции, не имеющей предела в точке.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Используя определение предела функции (по Коши), докажите, что:

   а) $\lim\limits_{x\to -1}(4x+5)=1$; б) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2+1)=10$.

2. Докажите, что $\lim\limits_{x\to 2}(2x-1)=3$. Найдите такое δ, чтобы для $|x-2|<\delta$ выполнялось неравенство $|f(x)-3|<0{,}01$.

3. Вычислите пределы:

   а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3}{(x-1)(2-x)}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x-3}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\sqrt{3+x}-2}$;

   д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$; е) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-3x-18}{\sqrt{x+1}-2}$.

4. Докажите, что функция $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ в точке $x=0$ не имеет предела.

Занятие 7. Предел функции на бесконечности. Замечательные пределы

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определения (на языке « $\varepsilon-\delta$ »):

   а) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b;$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$.

2. Какая функция называется бесконечно малой при $x\to a$? Приведите примеры.
3. Что означает запись: $\alpha(x)$ ~ $\beta(x)$ при $x\to a$?
4. Сформулируйте определение бесконечно большой функции при $x\to a$. Приведите примеры.
5. Какие пределы называются первым и вторым замечательными пределами?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Вычислите пределы:

   а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-7x}{1-2x^3};$ б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2+1)^{50}}{(x+1)^{100}};$

   в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2+3x}}{\sqrt[3]{x^3-2x^2}};$ г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)$.

2. Является ли функция $\phi(x)=\dfrac{x+5}{x}$ бесконечно малой при $x\to-5$? Ответ обоснуйте.
3. Пусть даны функции $\alpha(x)=\sqrt{x+1}-2$ и $\beta(x)=\sin(x-3)$. Докажите, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ бесконечно малые функции одного порядка при $x\to 3$.
4. Пользуясь замечательными пределами, вычислите:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^x$.

Занятие 8. Непрерывность функции в точке.

Теоретические вопросы

1. Какая функция называется непрерывной в точке x_0 ?
2. Сформулируйте определение функции, непрерывной в точке, на языке приращений (на языке « $\varepsilon-\delta$ »).
3. Что такое точки разрыва функции? Дайте классификацию точек разрыва функции.
4. Сформулируйте теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций.
5. Сформулируйте теоремы о свойствах функций, непрерывных на отрезке [*a; b*].
6. Верно ли утверждение: «Если функция непрерывна в $(a;\ b)$, то она в нем ограничена»? Ответ обоснуйте.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Докажите непрерывность функции $f(x)=(1-x)(5x+3)$ на всей числовой прямой, пользуясь определением непрерывности на языке приращений.
2. Исследуйте функции на непрерывность и определите тип точек разрыва. Схематически постройте графики.

а) $y=\dfrac{1}{x^2-9}$; б) $y=¿|-x+1,\ \text{если}\ x<0,¿¿¿¿$ в)

$f(x)=¿|1,\ \text{если}\ x<1,¿|x^2,\ \text{если}\ 1<x\leq 2,¿¿¿¿$

3. Найдите значения функции $f(x)=x^3-5x+2$ при $x=-3$ и $x=3$. Имеет ли нули данная функция?
4. Для функции $f(x)=¿|x^2-4,\ \text{если}\ 0\leq x<2,¿¿¿¿$ имеем $f(0)=-4$, $f(2)=10$, $f(4)=6$. Существует ли значение *c* такое, что:

а) $f(c)=1;$ б) $f(c)=7.$

5. Можно ли утверждать, что функция, определенная во всех точках отрезка, будет ограничена на нем? Приведите примеры.
6. Решите неравенство: $(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)\geq 0.$

Занятие 9. Основные элементарные функции. Класс элементарных функций.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите область определения функции $y=\arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right)$.
2. Исследуйте функцию $y=2^{\frac{1}{x}}$ на непрерывность.

Контрольная работа
(образец письменного задания)

1. Найдите область определения функции $y=\sqrt{x^2-1}+\sqrt{2-x}$.
2. Исследуйте на непрерывность функцию $y=\frac{2x}{x^2-1}$.

Занятие 10. Производная функции в точке

Теоретические вопросы

1. Что называется приращением функции $y=f(x)$ в точке x_0 ?
2. Сформулируйте определение производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 . Каков геометрический (механический) смысл производной?
3. Какова связь между существованием производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 и непрерывностью функции $y=f(x)$ в этой точке?
4. Назовите производные основных элементарных функций.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Пользуясь определением производной, найдите производную функции $f(x)=\frac{2}{3x+1}$ в точке $x=x_0$.
2. Найдите производные функций:

а) $y=11x^7-13x^5+4x^3-x+100;$ б) $y=\sqrt[3]{x^5}-\frac{5}{x^6}+\frac{3}{x^2}-1;$

в) $y=7\,tgx-2\sqrt{x}+9\ln x;$ г) $y=x^3\log_2 x;$

д) $y=\frac{2x}{4x-1};$ е) $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1};$

3. Составьте уравнения касательных к графику функции $y=9x-x^2$ в точках пересечения с осью абсцисс. Сделайте чертеж.
4. В каких точках касательная к графику функции $y=x^3-x$ параллельна прямой $y=x$.

Занятие 11. Дифференцирование функций одной переменной.

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте теорему о производной сложной функции. Имеет ли производную функция $y=\cos^3 x$ в точке $x_0=\frac{\pi}{2}$? Ответ обосновать.
2. Сформулируйте теорему о существовании производной обратной функции.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите производные функций:

а) $g(x)=ctg(x^3+2)$; б) $\phi(t)=\arcsin^3(\sqrt{t^2+5})$;

в) $f(x)=\ln(\sqrt{1+e^x}-1)-\ln(\sqrt{1+e^x}+1)$; г) $y=-\sqrt{2}\arctan\frac{tg\,x}{\sqrt{2}}-x$;

д) $y=e^{\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{3}$; е) $y=x^x$.

ж) $y=\sqrt[3]{x^2}\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3 x\cos^2 x$; з) $y=(\sin x)^x$;

и) $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$; к) $y=x^{x^x}$.

Занятие 12. Дифференцируемость функции одной переменной.

Теоретические вопросы

1. Какая функция $y=f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0 ?
2. Какая связь между дифференцируемостью функции в точке и существованием в этой точке производной функции?
3. Что называется дифференциалом функции $y=f(x)$ в точке x_0 ?
4. Каков геометрический смысл дифференциала функции в точке?
5. Как применяется дифференциал в приближенных вычислениях?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Пользуясь определением, найдите дифференциал функции $y=x^3-x^2+x$ в точке $x=2$.
2. Найдите дифференциалы функций:

а) $y=xarctgx$; б) $y=\cos^4 5x$; в) $y=\ln\sqrt{x^2+5}$.

3. Вычислите приближенно значения выражений с помощью дифференциала функции:

а) $e^{0,3}$; б) $\cos 121^0$.

Занятие 13.Производные и дифференциалы высших порядков.

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение производной второго порядка функции $y=f(x)$.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите производные второго порядка для функций:

а) $y=\cos^2 x$; б) $y=\ln(5x-4)$; в) $y=\frac{x-3}{x+3}$.

2. Найдите $f'''(x)$, если:

а) $f(x)=5x^2-20x+4;$ б) $f(x)=e^x\sin x;$ в) $f(x)=x^2e^{-2x}.$

Занятие 14. Формула Тейлора для функции одной переменной.

Теоретические вопросы

1. Что такое многочлен Тейлора для функции $y=f(x)$ с центром в точке $x=x_0$?
2. Что называется формулой Маклорена?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Получите разложение функции $f(x)=\ln(x+1)$по формуле Маклорена.
2. Разложите функцию $f(x)=e^{3x-x^2}$ по формуле Маклорена до члена, содержащего x^5 .
3. Вычислите предел

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$ б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right).$

Занятие 15. Основные теоремы дифференциального исчисления.

Теоретические вопросы

1. Дайте определение точки максимума (минимума) функции. Приведите примеры.
2. Сформулируйте теорему Ферма. Приведите пример функции, для которой в точке $x_0=-1$ производная обращается в ноль, но сама точка $x_0=-1$ не является точкой экстремума.
3. Сформулируйте теоремы Ролля, Лагранжа, Коши. Какая из этих теорем является более общей?
4. Сформулируйте правило Лопиталя.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Удовлетворяют ли условиям теоремы Ролля следующие функции? Поясните графически.

а)$f(x)=\begin{cases} x^2, если\, 0\le x<1, \\ 0, если\, x=1, \end{cases}$ б) $f(x)=1-|x|, x\in[-1;1],$ в) $y=\sqrt{x}, x\in[0;1].$

2. Докажите, что уравнение $x^3+3x-5=0$ имеет только один действительный корень.
3. В какой точке касательная к графику функции $y=4-x^2$ параллельна хорде, стягивающей точки $A(-2;\,0)$ и $B(1;\,3)$? Поясните графически.
4. Вычислите пределы с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-x}{x^3};$ б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x};$

в) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot e^{-x};$ г) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{ctgx}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right).$

Занятие 16. Исследование функций с помощью производной первого и второго порядков.

Теоретические вопросы

1. Дайте определение локального экстремума функции.

2. Сформулируйте достаточное условие экстремума функции. Какова примерная схема исследования функции на экстремум?
3. Дайте определение точки перегиба графика функции.
4. В каком случае говорят, что функция $y=f(x)$ имеет график, выпуклый вверх (вниз) на интервале (*a; b*)?
5. Дайте определение точки перегиба графика функции. Сформулируйте необходимое (достаточное) условие точки перегиба.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $y=3x+\frac{3}{x}+5$.
2. Исследуйте на экстремум функцию $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$.
3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=\frac{1}{x^2-1}$ на отрезке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.
4. Найдите интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции:

   а) $y=x^2\cdot\ln x$; б) $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$; в) $y=\frac{2x}{x^2+1}$.
5. При каком значении a кривая $y=x^4+ax^3+\frac{3}{2}x^2+1$ будет иметь выпуклость вниз на всей числовой прямой?

Занятие 17.Исследование функций и построение их графиков

Теоретические вопросы

1. Что такое асимптота графика функции? Какие виды асимптот существуют? Приведите примеры.
2. Какова примерная схема исследования функции и построения ее графика?
3. Дайте определение возрастающей (убывающей) функции на промежутке Δ.
4. Сформулируйте признак постоянства функции на промежутке Δ.
5. Сформулируйте критерий строгой монотонности функции на промежутке Δ.
6. Сформулируйте достаточное условие экстремума функции. Какова примерная схема исследования функции на экстремум?
7. Какова схема исследования функции, заданной на отрезке $[a;b]$, на наибольшее (наименьшее) значение?
8. Что такое асимптота графика функции? Какие виды асимптот существуют? Приведите примеры.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите асимптоты графика функции:

   а) $y=\frac{x}{\sqrt{x^2-3}}$; б) $y=xe^{\frac{1}{x}}$; в) $y=\frac{x^3+1}{x}$.
2. Исследуйте функции и постройте их графики:

а) $y=\dfrac{x}{x^2-4}$; б) $y=x\cdot e^{-\frac{x}{2}}$; в) $y=x-\ln x$.

3. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Каковы должны быть размеры этого окна, чтобы при данном его периметре $2p$ оно пропускало наибольшее количество света?

Занятие 18. Понятие функции нескольких переменных.

Теоретические вопросы

1. Дайте определение функции двух переменных. Приведите примеры.
2. Какое множество точек пространства R^2 называется областью? Приведите примеры.
3. Какая точка множества называется предельной? Докажите, что любая внутренняя точка множества является предельной точкой этого множества.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите и изобразите область определения функции:

   а) $u=\dfrac{1}{9-x^2-y^2}$; б) $z=\dfrac{xy}{x-y}$;

   в) $z=\arcsin(x+y)$; г) $z=\dfrac{1}{\sqrt{y-x}}+\ln(4-x^2-y^2)+\sqrt{2x-y}$.
2. Изобразите линии уровня для функции $z=y-x^2$ при $c=1,\ 2,\ 3$.

Контрольная работа
(образец письменного задания)

1. Найдите производные функций до второго порядка включительно:

   а) $y=\ln(x^2+1)$; б) $y=\sin x\cos x$.
2. Найдите асимптоты графика функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.
3. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y=x^3-3x^2$ на отрезке $[-2;\ 3]$.

Занятие 19. Предел и непрерывность функции двух переменных. Частные производные первого порядка для функции двух переменных.

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение предела функции $z=f(M)$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$.
2. Сформулируйте определение непрерывности функции $z=f(M)$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$.
3. Дайте определение частной производной функции $z=f(x,\ y)$ по переменной x (по y).

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Пользуясь определением, докажите, что функция $z=x^2+y^2$ непрерывна в точке $A(1;-2)$.
2. Найдите частные производные для данных функций:

   а) $z=x^3y-y^3x+2006$; б) $z=\sqrt{x+3y}$;

   в) $u=\sin\frac{xy}{2}$; г) $z=x^y$;

   д) $z=\frac{x}{y}e^{xy}$; е) $z=\frac{2xy}{x^2+y^2}$.
3. Покажите, что функция $z=\sqrt{x}\cos\frac{x}{y}$ удовлетворяет равенству $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z}{2}$.

Занятие 20. Дифференцируемость функции двух переменных.

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение дифференцируемости функции $z=f(x,\ y)$ в точке $M_0(x_0,\ y_0)$. Приведите примеры.
2. Докажите, что если функция дифференцируема в точке, то она в ней непрерывна. Верно ли обратное утверждение?
3. Сформулируйте необходимое условие дифференцируемости функции в точке.
4. Сформулируйте теорему о достаточном условии дифференцируемости.
5. Что называется полным дифференциалом функции $z=f(x,\ y)$ в данной точке?
6. Каково правило дифференцирования сложной функции $z=f(\varphi(t),\psi(t))$?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Докажите, что функция

$$z=¿\begin{cases}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2},\ x^2+y^2\neq 0,¿¿¿\end{cases}$$

   имеет в точке $O(0;\ 0)$ частные производные, но не дифференцируема в этой точке.
2. Докажите, что функция

$$z=¿\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ x^2+y^2\neq 0,¿¿¿\end{cases}$$

   имеет частные производные в окрестности точки $O(0;\ 0)$ и дифференцируема в точке O , но частные производные являются разрывными в данной точке.
3. Докажите, что функция $z=x^2+y^2$ дифференцируема на всей плоскости.
4. Найдите частные производные до второго порядка включительно для функций

   а)$f(x,y)=3x^2+5y^3$; б) $z=x^y$.
5. Найдите производную функции e^{xy}, где $x=\cos t,\ y=\sin t$.

Занятие 21. Дифференциал функции и его приложения.

Теоретические вопросы

1. Что называется полным дифференциалом функции $z=f(x,\ y)$ в данной точке?
2. В чем состоит свойство инвариантности формы полного дифференциала функции?
3. Какие приложения полного дифференциала Вам известны? Приведите примеры.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите дифференциал функции $z=f(x,\ y)$, если:

   а) $f(x,\ y)=\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}$; б) $z=\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)$.
2. Оцените изменение объема конуса при увеличении радиуса его основания на 5%.
3. Вычислите приближенно значение выражения $\sqrt{4{,}1}+\sqrt[3]{7{,}8}$ и найдите границу абсолютной погрешности результата.
4. Составьте уравнение касательной плоскости к графику функции $z=x+y^2$ в точке $A(0,1,1)$.

Занятие 22. Производная функции по направлению.

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение производной функции нескольких переменных по заданному направлению.
2. Верно ли, что производная функции $f(x,\ y)$ в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ по направлению вектора $\vec{i}=(1;\ 0)$ равна $\dfrac{\partial f(x_0,\ y_0)}{\partial x}$?
3. Сформулируйте определение градиента функции нескольких переменных в точке.
4. В чем состоит геометрический и физический смысл градиента функции в точке?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите производную функции f по направлению вектора $\vec{l}$ в точке M_0, если:

   а) $f(x,\ y)=3x^2+5y^2$, $\vec{l}=\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $M_0(1;\ 1)$;

   б) $f(x,\ y,\ z)=x^3+2xy^2+3yz^2$, $\vec{l}=\left(\dfrac{2}{3};\ \dfrac{2}{3};\ \dfrac{1}{3}\right)$, $M_0(3;\ 3;\ 1)$.
2. Найдите производную функции $f(x,\ y)=arctg\dfrac{y}{x}$ в точке $M_0\left(\dfrac{1}{2};\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ по направлению внешней нормали к кривой $x^2+y^2=2x$ в точке M_0.
3. Найдите градиент функции f в точке M_0, если:

   а) $f(x,\ y)=yx^y$, $M_0(2;\ 1)$; б) $f(x,\ y,\ z)=e^{x+xy+xyz}$, $M_0(1;\ 2;-1)$.
4. Решите уравнение $grad\left(x^3+y^3+3xy\right)=\vec{0}$.

5. Найдите угол между градиентами функций $f(x,\ y)=\sqrt{x^2-y^2}$ и $g(x,\ y)=x^3+y^3-3xy$ в точке $A(4;\ 3)$.

Занятие 23. Исследование функции двух переменных на экстремум.

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение локального минимума (максимума) функции двух переменных. Приведите примеры.
2. Каково необходимое условие локального экстремума функции двух переменных?
3. Какие точки называются точками возможного экстремума функции?
4. Приведите пример функции $z=f(x,\ y)$, имеющей в точке $M_0(x_0;\ y_0)$ локальный минимум и такой, что $\frac{\partial z(x_0,\ y_0)}{\partial x}=0$, а $\frac{\partial z(x_0,\ y_0)}{\partial y}$ не существует.
5. Сформулируйте теорему о достаточном условии экстремума функции.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите точки локального экстремума функции $z=f(x,\ y)$, если:
   а) $z=x^2-xy+y^2$; б) $z=e^{x-y}(x^2-2xy+2y^2)$;
   в) $f(x,\ y)=xy\ln(x^2+y^2)$; г) $f(x,\ y)=x+y+4\sin x\sin y$.

Занятие 24. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области.

Теоретические вопросы

1. Какими свойствами обладает функция $z=f(x,\ y)$, непрерывная в замкнутой ограниченной области D ?
2. Каков алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значения функции $z=f(x,\ y)$ в замкнутой ограниченной области D ?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $z=f(x,\ y)$ в области D , если:
   а) $z=xy+x+y$, $D=\{(x;\ y)\in R^2\ |-2\le x\le 2,\ -2\le y\le 4\}$;
   б) $z=x^2+y^2-4x$, $D=[-2;\ 1]\times[-1;\ 3]$;
   в) $z=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$, $D=\{(x;\ y)\in R^2|x+y\le 2\pi,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$;
   г) $f(x,\ y)=x^2-y^2$, $D=\{(x;\ y)\in R^2|x^2+y^2\le 2x\}$.
2. Определите размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом V так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

3. Разложите положительное число a на сумму трех положительных чисел, чтобы сумма их кубов была наименьшей.

2 семестр

Занятие 1. Понятие неопределенного интеграла.

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение первообразной для функции $f(x)$ на промежутке Δ.
2. Дайте определение неопределенного интеграла.
3. Перечислите основные свойства неопределенного интеграла. Таблица интегралов.
4. В чем суть метода непосредственного интегрирования?
5. Сформулируйте теорему о замене переменной в неопределенном интеграле.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите неопределенные интегралы:

а) $\int \sqrt[3]{x}\,dx;$ б) $\int \left(\frac{x^4}{4}+\frac{4}{x^4}\right)dx;$ в) $\int \frac{dx}{x^2+9};$

г) $\int \frac{dx}{x^2-9};$ д) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}};$ е) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}.$

2. Дополните равенства:

а) $d(x+3)=(\ldots)dx$; б) $d(\ldots)=dx$; в) $d(x^2)=(\ldots)dx$;

г) $d(\ldots)=\frac{dx}{x}$; д) $d(\ldots)=xdx$; е) $d(\ldots)=\sin xdx$.

Занятие 2. Основные методы интегрирования.

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте теорему об интегрировании по частям.
2. Какие методы вычисления неопределенных интегралов вам известны? Приведите примеры.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите неопределенные интегралы с помощью метода интегрирования по частям:

а) $\int x\ln xdx$; б) $\int x^2e^{2x}dx$; в) $\int \frac{\ln x}{x^2}dx$;

г) $\int \arcsin xdx$; д) $\int e^x\cos 2xdx$; е) $\int \sqrt{4-x^2}dx$.

2. Найдите неопределенные интегралы, применяя различные методы интегрирования:

а) $\int x^4\sqrt{1-6x^5}dx$; б) $\int \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}dx$; в) $\int (x^7-\sin 7x)dx$;

г) $\int \frac{dx}{x^2-10x+24}$; д) $\int (2x-3)e^xdx$; е) $\int \cos^3 xdx$.

3. Найдите неопределенные интегралы с помощью замены переменной:

а) $\int \sin 2x dx$; б) $\int (x+1)^2 dx$; в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$;

г) $\int \frac{dx}{x^2-2x+2}$; д) $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2 x^3}$; е) $\int \frac{dx}{x \ln x}$.

Занятие 3-4.Приёмы вычисления интегралов.

<u>Теоретические вопросы</u>

1. Всякая ли рациональная дробь интегрируема в элементарных функциях?
2. Как интегрируются простейшие дроби I–IV типов?
3. В чем состоит метод неопределенных коэффициентов разложения рациональной дроби на простейшие дроби I–IV типов? Приведите пример.
4. Сформулируйте алгоритм интегрирования рациональной дроби. Приведите пример.
5. Запишите универсальную тригонометрическую подстановку для вычисления интегралов вида $\int R(\sin x, \cos x)dx$, где R – здесь и далее символ рациональной функции. Какие формулы используются при ее реализации?
6. Какие подстановки целесообразно применить при вычислении интегралов вида $\int R(\sin x)\cos xdx$ и $\int R(\cos x)\sin xdx$?
7. Какие подстановки более удобны в каждом из случаев:

а) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$; б) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;

в) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$?

8. Как вычисляются неопределенные интегралы $\int tg^n xdx$ и $\int ctg^n xdx$, где $n \in N$?
9. Запишите формулы, которые используются при вычислении интегралов вида

$$\int \sin kx \cos lx\, dx, \quad \int \cos kx \cos lx\, dx, \quad \int \sin kx \sin lx\, dx.$$

<u>Задачи и упражнения для аудиторной работы</u>

1. Найдите неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x\, dx}{(x^2+1)^2}$; б) $\int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}$; в) $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$;

г) $\int \frac{7x-3}{x^2+4x-5} dx$; д) $\int \frac{2x^5+6x^3+1}{x^4+3x^2} dx$; е) $\int \frac{5x-14}{x^3-x^2-4x+4} dx$.

2. Вычислите неопределенные интегралы:

а) $\int \sin^3 x\, dx$; б) $\int \cos^3 2x\, dx$; в) $\int \sqrt[3]{\sin^2 x} \cos^5 x\, dx$;

г) $\int \cos^4 x\, dx$; д) $\int \sin^6 3x\, dx$; е) $\int \sin^4 x \cos^2 x\, dx$;

ж) $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$; з) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$; и) $\int tg^5 x\, dx$;

к) $\int \sin 5x \cos 2x \, dx$; л) $\int \frac{\sin^2 x \, dx}{\cos^4 x}$; м) $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x}$.

Занятие 5. Определенный интеграл.

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение определенного интеграла функции $f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$.
2. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?
3. В чем состоит механический смысл определенного интеграла?
4. Сформулируйте необходимое условие интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$.
5. Перечислите основные свойства определенного интеграла.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Вычислите интегралы:

а) $\int_1^e \frac{dx}{x}$; б) $\int_{-2}^{1} (|x|+1)\, dx$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x^2}{1+x^2} dx$;

г) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; д) $\int_{-1}^{1} xe^{x^2} dx$; е) $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=1-x^2$ и $y=0$.

Занятие 6. Методы вычисления определенного интеграла.

Теоретические вопросы

1. Приведите пример использования формулы Ньютона-Лейбница.
2. Сформулируйте теорему о замене переменной в определенном интеграле.
3. Сравните методы замены переменной в неопределенном и определенном интегралах.
4. Сформулируйте теорему об интегрировании по частям в определенном интеграле.
5. В чем особенность вычисления определенного интеграла от четной, нечетной и периодической функций? Приведите примеры.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Вычислите определенные интегралы с помощью замены переменной:

а) $\int_{-1}^{1} xe^{-x^2} dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$.

2. Вычислите определенные интегралы интегрированием по частям:

а) $\int\limits_{2\pi}^{3\pi} x\sin x dx$; б) $\int\limits_{1}^{e} \ln^2 x dx$; в) $\int\limits_{-1}^{1} x^2 e^{-x} dx$; г) $\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^x \cos x dx$.

Занятие 7. Приложения определенного интеграла

<u>Теоретические вопросы</u>

1. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла от функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;\, b]$?
2. Приведите формулу для вычисления объема тела вращения.
3. Приведите формулу для вычисления длины дуги плоской кривой.

<u>Задачи и упражнения для аудиторной работы</u>

1. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

   а) $xy=4,\ x=1,\ x=4,\ y=0$; б) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
2. Вычислите объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями:

   а) $y=4-x^2,\ x=0,\ y=0,\ x\geq 0$ вокруг оси Ox (оси Oy);

   б) $x^2+(y-2)^2=1$ вокруг оси Ox (оси Oy).
3. Найдите длину дуги кривой:

   а) $y=x^2-1$, отсеченной осью Ox;

   б) $x^2+y^2=a^2$.

Занятие 8. Несобственные интегралы.

<u>Теоретические вопросы</u>

1. Дайте определение понятия несобственного интеграла первого рода.
2. Дайте определение понятия несобственного интеграла второго рода.

<u>Задачи и упражнения для аудиторной работы</u>

1. Вычислить следующие несобственные интегралы:

   а) $+\quad \frac{\quad}{+}$; б) $+$; в) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^x dx$ г) $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

<u>Контрольная работа</u>

(образец письменного задания)

1. Найдите множество всех первообразных функции $y=(3x-1)\sin x$.
2. Вычислите определенные интегралы:

   а) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} (x^2-x+1)dx$; б) $\int\limits_{1}^{2} x^3 \ln x dx$.

3. Найдите объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной кривыми $y=1-(x-2)^2$ и $y=0$.

Занятие 9. Двойной интеграл и его вычисление

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение двойного интеграла.
2. Что называется диаметром ограниченного множества точек на плоскости? Приведите примеры.
3. Перечислите основные свойства двойного интеграла.
4. Сформулируйте определение повторного интеграла по области I (II) типа.
5. Перечислите основные свойства повторных интегралов.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Составьте интегральную сумму для функции $f(x, y)=x+y$, соответствующую разбиению области $D=[0;2]\times[0;2]$ на четыре равновеликих квадрата со сторонами, параллельными координатным осям, и выбору правых верхних вершин этих квадратов в качестве промежуточных точек.
2. Измените порядок интегрирования в интеграле $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} dy$.
3. Вычислите повторный интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int\limits_0^{x} \sin(x+y)dy$.
4. Вычислите двойной интеграл от функции $z=f(x, y)$ по области D, если:

   а) $f(x, y)=x^2y^2$, $D=\{(x; y)\in R^2 \mid x\geq y^2,\ x\leq 1\}$;

   б) $f(x, y)=\dfrac{y}{x^2}$, $D=\{(x; y)\in R^2 \mid x>0,\ x^3\leq y\leq x^2\}$.

Занятие 10. Повторные интегралы

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте теорему о сведении двойного интеграла к повторному. Приведите примеры.
2. Сформулируйте теорему о замене переменных в двойном интеграле. Приведите примеры.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Вычислите:

   а) $\iint\limits_D x\,dx\,dy$, $D=\{(x; y)\in R^2 \mid x^2+y^2\leq 2,\ x^2-y^2\leq 1,\ x\geq 0,\ y\geq 0\}$;

   б) $\iint\limits_D e^{y^2}dx\,dy$, $D=\{(x; y)\in R^2 \mid x\geq 0,\ y\leq 1,\ y\geq x\}$

в) $\iint\limits_D xy^2\,dxdy$, $D=\{(x;\,y)\in R^2|\ x^2+y^2\le 1\}$;

г) $\iint\limits_D \frac{dxdy}{x^2+y^2-1}$, $D=\{(x;\,y)\in R^2|\ 9\le x^2+y^2\le 25\}$;

д) $\iint\limits_D \min\{x,\,y\}\,dxdy$, $D=[0;\,2]\times[0;\,2]$.

2. Найдите площадь области, ограниченной кривыми $4y=x^2-4x$, $x=y+3$.

Занятие 11. Тройные интегралы

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение тройного интеграла.
2. Что называется диаметром ограниченного множества точек в пространстве? Приведите примеры.
3. Перечислите основные свойства тройного интеграла.
4. Сформулируйте теорему о сведении тройного интеграла к повторному. Приведите примеры.
5. Сформулируйте теорему о замене переменных в тройном интеграле. Приведите примеры.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Составьте интегральную сумму для функции $f(x,\,y,\,z)=x+y+z$, соответствующую разбиению области $D=[0;\,2]\times[0;\,2]\times[0;\,2]$ на восемь равновеликих параллелепипедов, со сторонами параллельными координатным осям, и выбору правых верхних вершин этих параллелепипедов в качестве промежуточных точек.
2. В интеграле $\int\limits_{-1}^{1}dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}dy\int\limits_{0}^{1}dz$ измените порядок интегрирования на следующий $(z,\,y,\,x)$.
3. Вычислите повторный интеграл $\int\limits_{-1}^{3}dx\int\limits_{0}^{x}dy\int\limits_{0}^{\sqrt{x^2-y^2}}\left(\sqrt{x^2-y^2}+z\right)dz$.
4. Вычислите двойной интеграл от функции $u=f(x,\,y,\,z)$ по области D, ограниченной заданными поверхностями, если:

   а) $f(x,\,y)=x+y+z$, $D: x+y+z=1,\,x=0,\,y=0,\,z=0$;

   б) $f(x,\,y,\,z)=y$, $D: x=0,\,y=0, z=0,\,2x+y+z=4$.
5. Вычислите интеграл $\iiint\limits_D \left((x+y)^2-z\right)dxdydz$, перейдя к цилиндрическим координатам, если область D ограничена поверхностями $z=0$, $(z-1)^2=x^2+y^2$.
6. Найдите объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=1$, $z=e^{-x^2-y^2}$.

Занятие 12. Криволинейные интегралы.Методы вычисления криволинейных интегралов.

Теоретические вопросы

1. Что такое параметрическое задание функции? Приведите примеры.
2. Какая кривая называется гладкой?
3. Дайте определение криволинейного интеграла функции $P(x;\,y)$ по переменной x (по y) вдоль кривой AB.
4. Зависит ли криволинейный интеграл второго рода от направления обхода кривой?
5. Каков физический смысл криволинейного интеграла второго рода?
6. Перечислите основные свойства криволинейного интеграла второго рода.
7. Сформулируйте теорему о вычислении криволинейного интеграла по координатам.
8. Пусть кривая L является графиком функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;\,b]$. Задайте кривую L параметрически.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Задайте следующие кривые параметрически:

   а) $x^2+y^2=4$; б) $x^2+2x+y^2=0$;

   в) $x-2y+3=0$; г) дугу параболы $y=x^2$, $-2\le x\le 1$.
2. Вычислите криволинейные интегралы второго рода вдоль данных кривых:

   а) $\int\limits_{OA} xdy-ydx$, где $O(0;\,0)$, $A(1;\,2)$, OA – отрезок прямой;

   б) $\int\limits_{OA} xdy-ydx$, где $O(0;\,0)$, $A(1;\,2)$, OA – дуга параболы, осью которой является ось Oy;

   в) $\int\limits_{L} (2-y)dx+xdy$, где L – арка циклоиды $x=t-\sin t$, $y=1-\cos t$, $0\le t\le 2\pi$;

   г) $\int\limits_{L} \dfrac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, где L – окружность $x^2+y^2=1$;

   д) $\int\limits_{L} (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$, где L – кривая $y=1-|1-x|$, $0\le x\le 2$.

Занятие 13. Числовые ряды.

Теоретические вопросы

1. Сформулируйте определение числового ряда.
2. Дайте определение n-ой частичной суммы числового ряда.
3. Какой ряд называется сходящимся (расходящимся)? Приведите примеры.
4. Перечислите свойства сходящихся числовых рядов. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ расходится. Что можно сказать о поведении ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n)$?

5. Сформулируйте необходимый признак сходимости числовых рядов. Что можно сказать о сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{\pi n}{2}$?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Укажите одну из возможных формул общего члена ряда:

а) $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{7}+\frac{1}{10}+\ldots$; б) $1-\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{4}{9\cdot 25}-\frac{8}{27\cdot 125}+\ldots$.

2. Напишите 5 первых членов ряда по известной формуле общего члена

$$a_n=\frac{(-1)^n(2n-1)}{n^2}.$$

3. Для каждого ряда: 1) найдите n -ую частичную сумму; 2) докажите сходимость, пользуясь определением; 3) найдите сумму ряда.

а) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}+\ldots$; б) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots$;

в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{4n^2+8n+3}$; г) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\ldots$.

4. Пользуясь необходимым признаком сходимости числовых рядов, выясните, какие из данных рядов заведомо расходятся:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n+2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n^3}}$;

в) $\sum_{n=3}^{\infty}\sqrt{\frac{n^2+3}{n^2-5}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n}$.

Занятие 14-15.Знакоположительные ряды.Интегральный признак Коши-Маклорена.

Теоретические вопросы

1. Какой ряд называется знакоположительным? Приведите примеры.
2. Сформулируйте первый признак сравнения знакоположительных числовых рядов. Приведите примеры.
3. Сформулируйте второй признак сравнения знакоположительных числовых рядов. Приведите примеры.
4. Сформулируйте необходимое и достаточное условие сходимости знакоположительных рядов.
5. Сформулируйте признак Даламбера. Приведите примеры.
6. Сформулируйте признак Коши. Приведите примеры.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Пользуясь признаками сравнения, исследуйте ряды на сходимость:

а) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3-2n+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+3}{6n^4+2n-1}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^n+1}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n}$.

2. Исследуйте ряды на сходимость, применяя признак Даламбера:

   а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5}{7^n+2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2n+1}$.

3. Исследуйте ряды на сходимость, используя признак Коши:

   а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(5-(-1)^n\right)^n}{n^2\cdot 4^{n^2}}$.

4. Применяя различные признаки сходимости, исследуйте сходимость знакоположительных рядов:

   а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{1+2^{2n}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{777}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{15}}{(n+3)!}$;

   г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^4+5n^2+3}}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+3}{3n+2}\right)^{n^2}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{\ln^n 2}$.

5. В зависимости от значений параметра a $(a>0)$, исследуйте ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{7+a^n}$ на сходимость.

Занятие 16-17. Знакопеременные ряды. Свойства числовых рядов.

Теоретические вопросы

1. Дайте определение знакопеременного ряда. Приведите примеры.
2. Какой ряд называется знакочередующимся?
3. Сформулируйте определение абсолютно (условно) сходящегося ряда.
4. Даны сходящиеся ряды $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}a_n b_n$ сходится абсолютно.
5. Сформулируйте признак Лейбница для знакочередующихся числовых рядов.
6. Как оценивается погрешность при приближенном вычислении суммы ряда Лейбница?
7. Сформулируйте теорему Римана об условно сходящихся числовых рядах.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Исследуйте ряды на абсолютную и условную сходимость:

   а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+7}}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+\sin^2 n}$;

   г) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{n^2}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^7}{n!}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

2. Докажите, что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ следует абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$.

3. В зависимости от значений параметра α исследуйте ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos \frac{2}{n}}{n^{\alpha}}$ на абсолютную и условную сходимость.

Занятие 18-19. Функциональные ряды. Равномерная сходимость функциональных рядов

Теоретические вопросы

1. Дайте определение функционального ряда. Приведите примеры.
2. Что такое область сходимости функционального ряда?
3. Какой функциональный ряд называется абсолютно (условно) сходящимся на множестве D ?
4. Дайте определение равномерно сходящегося функционального ряда на множестве D .
5. Сформулируйте признак Вейерштрасса о равномерной сходимости функционального ряда.
6. Перечислите свойства равномерно сходящихся функциональных рядов. Приведите примеры.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Определите область сходимости следующих функциональных рядов:

   а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n(x+4)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n (x+2)$;

   в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\lg(x-1)}}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^n}$.
2. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{-5}}{1+nx^2}$ равномерно сходится на всей числовой оси.
3. Покажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n \cdot 5^n}$ допускает почленное интегрирование на отрезке $[-1;\ 6]$.
4. Определите область E существования функции $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$ и исследуйте ее на дифференцируемость во внутренних точках E .

Занятие 20-21. Степенные ряды. Разложение основных элементарных функций в степенной ряд

Теоретические вопросы

1. Какой функциональный ряд называется степенным? Приведите примеры.
2. Сформулируйте теорему Абеля и следствие из нее.
3. Как определяется радиус сходимости степенного ряда?
4. Всегда ли интервал сходимости степенного ряда совпадает с его областью сходимости? Приведите примеры.
5. Перечислите основные свойства степенных рядов.
6. Что такое ряд Тейлора для функции $f(x)$ в точке x_0 ?
7. Приведите разложения основных элементарных функций в ряд Тейлора.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Найдите интервал и область сходимости следующих степенных рядов:
   а) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n(2n+3)} x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(7x+1)^n}{n}$;
   г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n^n}$; д) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$; е) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{7^n}(x-1)^n$.
2. Найдите сумму ряда:
   а) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) x^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.
3. Разложите функцию $f(x)$ в степенной ряд в окрестности точки x_0, используя разложения основных элементарных функций и свойства степенных рядов:
   а) $f(x)=e^{-2x^2}$, $x_0=0$; б) $f(x)=\ln(5+x)$, $x_0=-1$;
   в) $f(x)=arctgx$, $x_0=0$.

Занятие 22. Приложения степенных рядов

Теоретические вопросы

1. Как применяются степенные ряды для вычисления предела функции в точке? Приведите примеры.
2. Каким образом применяются степенные ряды для приближенных вычислений? Приведите примеры.
3. Каков алгоритм приближенного вычисления интегралов с использованием степенных рядов? Приведите примеры.
4. Как применяются степенные ряды для решения скалярных и дифференциальных уравнений?

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Вычислите:
   а) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x+\ln(1-x)}{1-\cos x}$; б) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-e^{3x})(1-\cos 2x)}{\ln(1+x^4)}$.
2. Вычислите значение e^{-2} с точностью $\varepsilon=10^{-3}$.
3. Вычислите $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ с точностью $\varepsilon=0,0001$.
4. Вычислите $f^{(2013)}(0)$, если $f(x)=\ln(1+x^2)$.
5. Найдите решение уравнения Кеплера $y=\frac{\pi}{2}+x\sin y$ методом степенных рядов.
6. Методом степенных рядов найдите решение дифференциального уравнения $y'=y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$, и сравните с точным решением.

Занятие 23-24. Тригонометрические ряды. Сходимость тригонометрического ряда Фурье.

<u>Теоретические вопросы</u>

1. Какой ряд называют тригонометрическим? Приведите примеры.
2. Каким основным свойством обладает сумма тригонометрического ряда?
3. Каково необходимое условие разложимости функции $f(x)$ в тригонометрический ряд?
4. Какой ряд называется тригонометрическим рядом Фурье для функции $f(x)$ на отрезке $[-l\,;\,l]$?
5. Как находятся коэффициенты ряда Фурье для функции $f(x)$ на отрезке $[-l\,;\,l]$?
6. Сформулируйте достаточные условия сходимости (равномерной сходимости) тригонометрического ряда Фурье.
7. Каков вид тригонометрического ряда Фурье четной (нечетной) функции, заданной на отрезке $[-l\,;\,l]$?

<u>Задачи и упражнения для аудиторной работы</u>

1. Разложите в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x)$ на отрезке $[-\pi\,;\,\pi]$, если:

а) $f(x)=x^2$; б) $f(x)=¿|\pi,\ -\pi\le x<0,¿¿¿¿$

2. Разложите функцию $f(x)=x$ на отрезке $[0\,;\,\pi]$ в ряд:
   а) по косинусам; б) по синусам.
3. Вычислите сумму ряда:

а) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots$; б) $1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots$.

Самостоятельная работа

1 семестр

Занятие1. Действительные числа и их свойства. Модуль действительного числа.

1. Докажите, что число $\sqrt{3}$ не является рациональным.
2. Найдите множества значений x , удовлетворяющих соотношениям:

а) $|x|-|x-3|=4$; б) $|x^2-1|=1-x^2$; в) $||x+1|+2|=2$;

г) $|x^2-4x+3|>x^2-4x+3$; д) $x^2-|3x+2|\ge 0$.

3. Решите уравнение

$$|x+1|+|x-3|=a$$

в зависимости от значений параметра a .

Занятие 2. Числовые последовательности.

1. Напишите 5 первых членов последовательности с общим членом

а) $x_n=\frac{n}{2^{n+1}}$; б) $x_n=\frac{(-1)^n}{n^3-2}$

2. Зная несколько первых элементов последовательности, напишите формулу её общего элемента

а) $1;\ \frac{1}{1\cdot 2};\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3};\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4};\dots$, б) $1;\ 2\frac{1}{4};\ 2\frac{7}{9};\ 3\frac{1}{16};\ 3\frac{6}{25};\dots$.

3. Ограничена ли последовательность $y=\frac{1}{\log_5(1-3x)}$?

Занятие 3. Предел числовой последовательности.

1. Докажите существование предела последовательности $\left\{\frac{3^n+1}{3^n}\right\}$.
2. Пользуясь определением предела, докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2}=0$.
3. Вычислите пределы:

   а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+n+1}{3n^2-1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$; в) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-3}{n^2+1}$;

   г) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n+\cos n}{2^n-\sin n}$; е) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\frac{n}{7n^2+1}$.

4. Приведите примеры последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, для которых $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\infty$, а произведение $\{x_n y_n\}$ является:

   а) сходящейся последовательностью;
   б) бесконечно малой последовательностью;
   в) бесконечно большой последовательностью;
   г) расходящейся последовательностью.

Занятие 4. Функции одной переменной.

1. Найдите область определения функции:

   а) $y=\frac{1}{\log_5(1-3x)}$; б) $y=\arccos(\lg x)$.

2. Определите, какие из функций являются четными, а какие – нечетными:

   а) $y=x^3-2x$; б) $y=x(x+1)^3$;

   в) $y=\sin 2x\cdot tg^2 4x$; г) $y=\frac{x-tg\,2x}{\cos 4x}$.

3. Зная график функции $y=f(x)$, постройте график функции:

   а) $y=f(|x|)$; б) $y=\frac{1}{2}\left(|f(x)|-f(x)\right)$.

Занятие 5. Свойства функций одной переменной.

1. Ограничены ли следующие функции:

а) $f(x) = x^3$на $[-1;3]$; б) $f(x) = x^2$на $[-1;+\infty)$?

2. Найдите функцию, обратную к функции y=-7x+5.

Занятие 6. Предел функции в точке

1. Пользуясь определением предела, докажите, что:

а) $\lim\limits_{x\to 4}(x-7)=-3$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{3}{5}$.

2. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 7}\frac{x^2-7}{7x^2+x-13}$.

Занятие 7. Предел функции на бесконечности. Замечательные пределы

1. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to \infty}\frac{2x^5+7x-3}{4x^2+1}$; б) $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{x-1}$; в) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to \pi}\frac{\sin x}{x}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3}$; е) $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^x$.

2. Даны функции $\alpha(x)=x$ и $\beta(x)=x^2\cos x$. Докажите, что функция $\beta(x)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\alpha(x)$ при $x\to 0$.

3. Докажите, что $\lim\limits_{x\to \infty}\sin x$ не существует.

Занятие 8. Непрерывность функции в точке.

1. Исследуйте функцию на непрерывность и постройте график:

$$f(x)=¿\left\{\frac{|x-1|}{x-1},\ \text{если}\ x\neq 1,¿¿¿¿\right.$$

2. Докажите, что уравнение $x^5-6x^2+3x-7=0$ имеет корень на отрезке $[0;\,2]$.

3. Докажите, что функция $f(x)=(x^2+x-2)\cdot\sin\sqrt{3+x^2}+5^x$ ограничена на отрезке $[0;\,100]$.

4. Можно ли утверждать, что функция, определенная на отрезке и принимающая на концах значения разных знаков, будет в некоторой точке отрезка принимать значение 0 ?

Занятие 9. Основные элементарные функции. Класс элементарных функций.

1. Исследуйте на непрерывность основные тригонометрические функции: y=sin$x$, y=cos$x$, y=tg x.

2. Вычислите пределы

а) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1+\sin x}{1-\cos 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$; в) $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{\sin 2x-\cos 2x-1}{\sin x-\cos x}$.

Занятие 10.Производная функции в точке

1. Пользуясь определением производной, найдите производную функции $y=x^3$ в точке x_0 .
2. Найдите производные функций:

   а) $y=\dfrac{tgx}{\sqrt{x}};$ б) $y=x^8\cdot e^x;$

3. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=x^2$, перпендикулярной к прямой $y=2x-1$.

Занятие 11. Дифференцирование функций одной переменной.

1. Найдите производные функций:

   а) $y=\sin\left(\sqrt[3]{x}-2\right)$; б) $y=\ln^3\sin x;$

   в) $y=e^{\frac{1}{x}};$ г) $y=2^{x^2}\cdot\sqrt{x-1}.$

Занятие 12. Дифференцируемость функции одной переменной.

1. Пользуясь определением, найдите дифференциал функции $y=x^2-5x+4$ в точке $x=1$.
2. Вычислите приближенно с помощью дифференциала значение выражения $\ln 0{,}998$.

Занятие 13.Производные и дифференциалы высших порядков.

1. Найдите производные второго порядка от функций:

а) $y=x^3\cdot e^{-x};$ б) $y=\ln\left(\cos x^2\right)$; в) $y=\dfrac{x}{x^2+5}.$

Занятие 14. Формула Тейлора для функции одной переменной.

1. Получите разложение функции $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$ по формуле Маклорена.

2. Разложите функцию $y=e^{1-x}$ по формуле Тейлора с центром в точке $x=1$ до членов, содержащих $(x-1)^2$.

3. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$.

Занятие 15. Основные теоремы дифференциального исчисления.

1. Удовлетворяет ли функция $f(x)=\sin x$ условиям теоремы Ролля на отрезке $[0;\pi]$?
2. Докажите, пользуясь теоремой Лагранжа, что $|\sin x_2-\sin x_1|\le|x_2-x_1|$ при любых $x_1,\, x_2\in R$.

3. Вычислите пределы с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln(x-1)}{ctg\,\pi x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$.

Занятие 16. Исследование функций с помощью производной первого и второго порядков.

1. Определите промежутки монотонности функции $y=6x-x^3$.
2. Исследуйте на экстремум функцию $y=x^3-27x+4$.
3. Найдите интервалы выпуклости и точки перегиба графика функции:

   а) $y=x^3-6x^2+x$; б) $y=\ln x$;
4. При каком значении параметра a кривая $y=x^3+ax^2+1$ имеет точку перегиба при $x=1$?

Занятие 17. Исследование функций и построение их графиков

1. Найдите асимптоты графика функции:

   а) $y=x+1-\frac{1}{x-1}$; б) $y=\frac{x^4}{x^3-1}$.
2. Исследуйте функции и постройте их графики:

   а) $y=\frac{x^4}{4}-2x^2$; б) $y=x^3e^x$.
3. Разложите число 10 на два слагаемых так, чтобы произведение их было наибольшим.

Занятие 18. Понятие функции нескольких переменных.

1. Найдите и изобразите область определения функции:

   а) $z=\sqrt{x^2-y^2}$; б) $u=\ln(7y+5x)$; в) $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{xy}}$.
2. Постройте линии уровня для функции $f(x,y)=\frac{x}{y}$ при $c=1, 2, 3$.

Занятие 19. Предел и непрерывность функции двух переменных. Частные производные первого порядка для функции двух переменных.

1. Найдите частные производные для данных функций:

   а) $z=x^3\cos\sqrt{y}$; б) $z=x\ln(x+y)$; в) $z=\ln\sqrt{x^2+y^2}$;

   г) $u=arctg\frac{y}{x}$; д) $u=(x^2+y)^{10}tgx$; е) $z=x^my^n$.
2. Докажите, что функция $z=ye^{x^2-y^2}$ удовлетворяет равенству $\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{z}{y^2}=0$.

Занятие 20. Дифференцируемость функции нескольких переменных.

1. Докажите, что функция $z=f(x,\ y)$ дифференцируема в точке $O(0;\ 0)$, если:

а) $f(x,\ y)=|y|\cdot\sin x$; б) $z=¿\left\{x\sin\frac{y}{\sqrt{|x|}},\ x\neq 0, ¿¿¿¿\right.$

2. Докажите, что функция $z=f(x,\ y)$ не дифференцируема в точке $O(0;\ 0)$, если:

а) $z=\sqrt{x^2+y^2}$; б) $f(x,\ y)=\sqrt[5]{\sin x(1-\cos xy)}$.

3. Докажите, что функция $z=(x^2+y^2)\sin xy$ дифференцируема на всей плоскости.
4. Найдите частные производные второго порядка для данных функций:

а) $z=4x^3+3y^2$; б) $z=x\ln(x+y)$; в) $z=x^3\cos\sqrt{y}$.

5. Найдите производную функции $z=\cos(2x+4x^2-y)$, где $x=\frac{1}{t}$, $y=\frac{\sqrt{t}}{\ln t}$.

Занятие 21. Дифференциал функции и его приложения.

1. Найдите дифференциал данной функции, если:

а) $f(x,\ y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; б) $f(x,\ y,\ z)=arctg\frac{xy}{z^2}$.

2. Оцените изменение объема усеченного конуса при увеличении радиусов его оснований на 5%.
3. Вычислите приближенно значение выражения $\ln(2+0,01^2-\sqrt{1,1})$ и найдите границу абсолютной погрешности результата.
4. Составьте уравнение касательной плоскости к графику функции $z=x^2+y^2$ в точке $A(1,2,5)$.

Занятие 22. Производная функции по направлению.

1. Найдите производную функции f по направлению вектора $\vec{l}$ в точке M_0, если:

а) $f(x,\ y)=x\sin(x+y)$, $\vec{l}=(-1;\ 0)$, $M_0\left(\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4}\right)$;

б) $f(x,\ y,\ z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$, $\vec{l}=\left(-\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{3}\right)$, $M_0(1;\ 2;\ 1)$.

2. Найдите градиент функции f в точке M_0, если:

а) $f(x,\ y)=1+x^2y^3$, $M_0(-1;\ 1)$; б) $f(x,\ y,\ z)=arctg\frac{xy}{z^2}$, $M_0(0;\ 1;\ 2)$.

3. Найдите производную функции $f(x,\ y,\ z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ в точке $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ по направлению градиента данной функции в точке M_0.

4. Решите уравнение $grad\left(x^3+y^3+z^3+3xyz\right)=\vec{0}$.

5. Найдите угол между градиентами функций $f(x,y)=\frac{y^2}{x}$ и $g(x,y)=2x^2+y^2$ в точке $A(1;2)$.

6. Докажите, что угол между градиентами функций $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$ и $g(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+4x+5y+6z$ в точке $M_0(x_0;y_0;z_0)$ стремится к нулю, если точка M_0 удаляется в бесконечность.

Занятие 23. Исследование функции двух переменных на экстремум.

1. Найдите точки локального экстремума функции $z=f(x,y)$, если:

   а) $z=4(x-y)-x^2-y^2$; б) $z=e^{2x}\left(x+y^2+2y\right)$.

Занятие 24. Наибольшее и наименьшее значения функции двух переменных в замкнутой области.

1. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $z=f(x,y)$ в области D , если:

   а) $z=x^2+2xy-4x+8y$, $D=\{(x;y)\in R^2\,|0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2\}$;

   б) $z=x^2y(4-x-y)$, $D=\{(x;y)\in R^2|x+y\le 6,\ x\ge 0,\ y\ge 0\}$;

   в) $u=xy$, $D=\{(x;y)\in R^2|x^2+y^2\le 1\}$;

   г) $f(x,y)=e^{-x^2-y^2}\left(2x^2+3y^2\right)$, $D=\{(x;y)\in R^2|x^2+y^2\le 4\}$.

2. Найдите наибольший объем, который может иметь прямоугольный параллелепипед, если:

   а) площадь его полной поверхности равна S ;

   б) сумма длин его ребер равна a .

3. Докажите, что из всех прямоугольных параллелепипедов заданного объема V наименьшую поверхность имеет куб.

2 семестр

Занятие 1. Понятие неопределенного интеграла.

1. Найдите неопределенные интегралы:

   а) $\int\frac{dx}{x+5}$; б) $\int\frac{\left(x\sqrt{x}-5\right)^2}{x^3}dx$;

   в) $\int x^4\left(1-2x^2\right)dx$; г) $\int\left(x^5-4x^3+x-1\right)dx$;

   д) $\int e^{4x+7}dx$; е) $\int\frac{2x+1}{x^4+2x^3+3x^2+2x+1}dx$.

Занятие 2. Основные методы интегрирования.

1. Найдите неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$; б) $\int tgx dx$; в) $\int x\sin 3x dx$;

г) $\int \frac{3x^2-1}{x^3-x+2005}dx$; д) $\int \sin^4 x dx$; е) $\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$.

Занятие 3-4.Приёмы вычисления интегралов.

1. Найдите неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{dx}{x^3+8}$; б) $\int \frac{x^2 dx}{x^3+5x^2+8x+4}$; в) $\int \frac{(x+3)\,dx}{x^3+x^2-2x}$;

г) $\int \frac{11x+16}{(x-1)(x+2)^2}dx$; д) $\int \frac{dx}{x^4-1}dx$; е) $\int \frac{x^2}{x^4-81}dx$.

2. Вычислите неопределенные интегралы:

а) $\int \sin^5 5x dx$; б) $\int \cos^3 x \sin^4 x\ dx$; в) $\int \sqrt{1+\sin x}dx$;

г) $\int \frac{\sin^4 x dx}{\cos^2 x}$; д) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x+1}dx$; е) $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x}dx$;

ж) $\int \frac{dx}{1-\sin^4 x}$; з) $\int \sin 5x \sin 3x\ dx$; и) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$;

к) $\int \frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}$.

Занятие 5. Определенный интеграл.

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_1^4 \sqrt{x}dx$; б) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{(11+5x)^3}$; в) $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}dy$;

г) $\int_0^{2\pi} \cos\frac{t}{2}dt$; д) $\int_0^1 e^{7x}dx$; е) $\int_0^8 \left(\sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$.

2. Найдите площадь круга радиуса R, используя понятие определенного интеграла.

Занятие 6Методы вычисления определенного интеграла.

1. Вычислите определенные интегралы:

а) $\int_0^{\pi} \sin 2x dx$; б) $\int_0^1 \ln(x+1)dx$; в) $\int_1^3 \frac{dx}{x+x^2}$;

г) $\int_{0}^{1} \frac{dx}{e^{x}+e^{-x}}$; д) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\sin x dx$; е) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx$, ($m, n \in N$).

Занятие 7. Приложения определенного интеграла

1. Найдите площадь фигуры, заключенной между параболой $y=x^2-2x+2$, касательной к ней в точке $(3;\,5)$ и осью Oy.
2. Найдите длину дуги кривой $y=x^{\frac{3}{2}}$ от $x=0$ до $x=4$.
3. Вычислите объем тела, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вокруг оси Ox.

Занятие 8. Несобственные интегралы.

1.Вычислите следующие несобственные интегралы

а) $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$, б) —, где α– некоторое число.

Занятие 9. Двойной интеграл и его вычисление

1. Пусть $D=\{(x;\,y)\in R^2 \mid x\geq 0,\ y\leq\sqrt{3}x,\ y\leq 2\sqrt{3}-\sqrt{3}x\}$. Для функции $f(x,\,y)=xy$ составьте интегральную сумму, соответствующую разбиению области D на четыре равносторонних треугольника со стороной 1, и выбору в качестве промежуточных точек вершин этих треугольников, наиболее удаленных от начала координат.
2. Измените порядок интегрирования в интеграле $\int_{-1}^{1} dy \int_{0}^{y^2} dx$.
3. Вычислите повторный интеграл $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} e^{x+y} dx$.

Занятие 10. Повторные интегралы

1. Вычислите:

а) $\iint_D y dx dy$, $D=\{(x;\,y)\in R^2 \mid |x|+|y|\leq 1\}$;

б) $\iint_D dx dy$, $D=\left\{(x;\,y)\in R^2 \mid x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\leq 1\right\}$;

в) $\iint_D xy dx dy$, $D=\{(x;\,y)\in R^2 \mid 1\leq x^2+y^2\leq 4\}$;

г) $\iint\limits_D \max\{\sin x, \sin y\}\,dxdy$, $D=[0;\pi]\times[0;\pi]$.

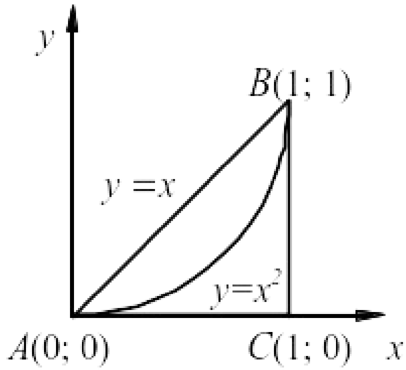
2. Для фигуры $G=\{(x;y)\in R^2 \mid x+y\geq 1, 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$ с плотностью $\rho(x,y)=x$ найдите:
   а) массу;
   б) координаты центра тяжести;
   в) моменты инерции относительно осей Ox и Oy.

Занятие 11. Тройные интегралы

1. Составьте интегральную сумму для функции $f(x,y,z)=xyz$, соответствующую разбиению области $D=\{(x;y;z)\in R^3 \mid x^2+y^2+z^2\leq 4\}$ на четыре части плоскостями $z=-1$, $z=0$ и $z=1$, и выбору точек оси Oz, наиболее удаленных от плоскости xOy, в качестве промежуточных.
2. В интеграле $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{x+y} dz$ измените порядок интегрирования на следующий (z, x, y).
3. Вычислите повторный интеграл $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{\frac{x}{2}}^{2x} dy \int\limits_{x-y}^{x+y} (x+y+z)\,dz$.
4. Вычислите:
   а) $\iiint\limits_D xyzdxdydz$, $D=[0;1]\times[-1;1]\times[-1;0]$;
   б) $\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 (xy+xz+yz)\,dxdydz$.
5. Вычислите интеграл $\iiint\limits_D \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$, перейдя к сферическим координатам, если $D=\{(x;y;z)\in R^3 \mid 1\leq x^2+y^2+z^2\leq 4\}$.
6. Для сплошного цилиндра длины l, радиуса R и массы m найдите координаты его центра тяжести.
7. Найдите массу пирамиды, образованной плоскостями $x+y+z=a$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, если плотность в каждой ее точке пропорциональна аппликате этой точки.

Занятие 12. Криволинейные интегралы.Методы вычисления криволинейных интегралов.

1. Вычислите криволинейный интеграл второго рода $\int\limits_{AB} 2xydx+x^2dy$ по трем кривым, соединяющим точки $A(0;0)$ и $B(1;1)$, изображенным на рисунке.



2. Вычислите криволинейные интегралы второго рода вдоль данных кривых:

а) $\int\limits_L \left(x^2-2xy\right)dx+\left(y^2-2xy\right)dy$,

где L – дуга параболы $y=x^2$, $-1\le x\le 1$;

б) $\int\limits_L (x+y)dx+(x-y)dy$, где L – окружность $(x-1)^2+(y-1)^2=4$;

в) $\int\limits_Г \frac{3x}{y}dx-\frac{2y^3}{x}dy$, где $Г$ – дуга параболы $x=y^2$, соединяющая точки $A(4;\,2)$, $B(1;\,1)$.

Занятие 13. Числовые ряды.

1. Укажите одну из возможных формул общего члена ряда:

а) $1-\frac{2}{7}+\frac{4}{49}-\frac{8}{343}+\ldots$; б) $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\ldots$.

2. Напишите 5 первых членов ряда по известной формуле общего члена

$$a_n=\frac{\sin\frac{\pi}{3}n}{n}.$$

3. Для каждого ряда: 1) найдите n-ую частичную сумму; 2) докажите сходимость, пользуясь определением; 3) найдите сумму ряда.

а) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots$; б) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\ldots$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6}{n^2+6n+8}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$.

4. Установите, пользуясь необходимым признаком сходимости числовых рядов, что данные ряды расходятся:

а) $1-1-1+1+1+1-1-1-1-1-1+\ldots$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{7n}}$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^3-1\right)\sin\frac{1}{n^3+n^2+n+1}$; г) $\sum\limits_{n=7}^{\infty}\left(\frac{7n^2+1}{7n^2-1}\right)^{n^2}$.

Занятие 14-15. Знакоположительные ряды. Интегральный признак Коши-Маклорена.

1. Исследуйте ряды на сходимость:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,(2n+1)\,!}{(3n)\,!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n(n+2)}{n\,!}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{2^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n}{5^n\cdot n}$; е) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

2. В зависимости от значений параметра a $(a>0)$, исследуйте ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{n!}$ на сходимость.

3. Пусть $\{b_n\}$ – последовательность неотрицательных чисел. Докажите, что из расходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ следует расходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{1+b_n}$.
4. Пользуясь признаками сравнения, исследуйте ряды на сходимость:
   а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+7)7^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$;
   г) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^{2006} n}{n^{2006}}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$.
5. В зависимости от значений параметров a, b, c и d исследуйте ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+2}{an^4+bn^3+cn+d}$ на сходимость.

Занятие 16-17.Знакопеременные ряды. Свойства числовых рядов.
1. Исследуйте ряды на абсолютную и условную сходимость:
   а) $1-\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{3\sqrt[3]{3}}-\frac{1}{4\sqrt[3]{4}}+\ldots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n}$;
   в) $-1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}-\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{4}}-\ldots$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$;
   д) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\frac{1}{n+\sqrt{n}}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\cos n}{n^2}$.
2. В зависимости от значений параметра α исследуйте ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$ на абсолютную и условную сходимость.
3. Докажите, что из сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$.
4. Докажите, что $\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$.

Занятие 18-19.Функциональные ряды. Равномерная сходимость функциональных рядов
1. Определите область сходимости функциональных рядов:
   а) $x+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^4}{4^2}+\ldots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 x}$.

2. Исследуйте равномерную сходимость ряда на множестве E :

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n^2x^2}}{n^3}$, $E=R$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi-x)\sin^2 nx}{\sqrt[5]{n^7+7}}$, $E=[0;\pi]$.

3. Докажите, что если $|x|<1$, то из абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ следует абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)x^n$.

Занятие 20-21. Степенные ряды. Разложение основных элементарных функций в степенной ряд

1. Найдите интервал и область сходимости степенного ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n x^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n(n+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n}\,x)^n$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{n(5^n+1)}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n\left(\frac{x+3}{3}\right)^n$; е) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n}-\sqrt{n-1})x^n$.

2. Разложите данную функцию в степенной ряд с центром в заданной точке:

а) $g(x)=\ln(3+x)$, $x_0=-1$; б) $\phi(t)=\frac{1}{4-t}$, $t_0=1$;

в) $y=\cos^2 x$, $x_0=0$; г) $f(x)=\ln(1+x+x^2)$, $x_0=0$.

3. В зависимости от значений параметра c ($c>0$) найдите область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n^2}x^n$.

Занятие 22. Приложения степенных рядов

1. Вычислите значение π с точностью $\varepsilon=10^{-3}$.
2. Найдите $\int_0^{0,5}\cos x^2 dx$.
3. Вычислите $f^{(2013)}(0)$, если $f(x)=x^2\cos x$.
4. Найдите решение уравнения Кеплера $y=x+b\sin y$, $b\in R$, методом степенных рядов.
5. Методом степенных рядов найдите решение дифференциального уравнения $y''=y$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=1$, $y'(0)=1$, и сравните с точным решением.
6. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^{n-1} x}{n}$.

Занятие 23-24. Тригонометрические ряды. Сходимость тригонометрического ряда Фурье.

1. Разложите в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x)$ на отрезке $[-\pi;\pi]$, если:

а) $f(x) = x\sin x$; б) $f(x) = \cos ax$, $a \in R$.

2. Разложите в ряд Фурье на $[-\pi;\pi]$ функцию $f(x) = x\cos x$ по косинусам кратных дуг.
3. Найдите сумму ряда:

а) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\dots$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Текущая аттестация включает по две контрольные работы в каждом семестре.

Контрольная работа №1 (первый семестр, типовой вариант)

1. Сформулируйте определение числовой последовательности, ограниченной сверху. Приведите пример.
2. Сформулируйте определение предела функции в точке по Коши.
3. Вычислите пределы последовательностей:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3n^3}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}\right)$.

4. Вычислите пределы функций:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x^2-x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{2x-3}$.

5. Исследуйте функцию на непрерывность и постройте ее график:

$$f(x)=\begin{cases}1-x^2, & \text{если } x\le -1,\\ x+2, & \text{если } -1<x\le 2,\end{cases}$$

Критерии оценивания контрольной работы №1

1. Нормы оценивания: каждое правильно выполненное задание оценивается в 1 балл, с возможностью градации в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

№ п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

Контрольная работа №2 (первый семестр, типовой вариант)

1. Найдите производную второго порядка от функции $y=(x+1)\cdot e^x$.
2. Исследуйте функцию $y=x^3-x$ и постройте ее график.
3. Найдите и изобразите область определения функции $z=\sqrt{xy-1}$.

4. Найдите частные производные первого порядка функции $z=(xy+1)e^{x^2y^3}$.

Критерии оценивания контрольной работы №2

1. Нормы оценивания: каждое правильно выполненное задание №№1, 3, 4 оценивается в 1 балл, а задание №2 – в 2 балла, с возможностью градации в 0,25 балла.
2. Шкала оценивания работы:

№ п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

Контрольная работа №3 (второй семестр, типовой вариант)

1. Найдите следующие неопределенные интегралы:

   а) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$; б) $\int x\cos 3x dx$.

2. Вычислите определенный интеграл: $\int_{-2}^{1} |x^2-3x-4|\, dx$.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=x+2$.
2. Вычислите двойной интеграл $\iint_D e^{-(x^2+y^2)}dxdy$, где $D=\{(x;y)\in R^2\,|\,x^2+y^2\leq 16\}$, перейдя к полярной системе координат.
3. Вычислите криволинейный интеграл $\int_L 4x\sin^2 y dx + y\cos^2 2x dy$, где L - отрезок прямой, соединяющий точки $O(0;0)$ и $A(3;6)$.

Критерии оценивания контрольной работы №3

1. Нормы оценивания: каждое правильно выполненное задание оценивается в 1 балл, с возможностью градации в 0,25 балла.
2. Шкала оценивания работы:

№ п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

Контрольная работа №4 (второй семестр, типовой вариант)

1. Исследуйте ряды на сходимость:

   а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n-1}{3n^2+2n^3+7}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n-1}}{(n-1)!}$.

2. Исследуйте ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+6}$ на абсолютную или условную сходимость.

3. Найдите область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{2n-1} x^n$.

4. Разложите функцию $y=\frac{1}{4-x}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0=0$.

Критерии оценивания контрольной работы №4

1. Нормы оценивания: каждое правильно выполненное задание оценивается в 1 балл, с возможностью градации в 0,25 балла.
2. Шкала оценивания работы:

№ п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация включает экзамен по итогу каждого семестра.

Вопросы к экзамену (1 семестр)

Введение в анализ

1. Действительные числа и их основные свойства.
2. Модуль действительного числа и его свойства.
3. Понятие функции. Основные классы функций.
4. Понятие числовой последовательности. Виды последовательностей.
5. Предел последовательности и его свойства.
6. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Связь между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями.
7. Предел функции в точке и его свойства.
8. Предел функции на бесконечности.
9. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Сравнение бесконечно малых функций.
10. Замечательные пределы и их применение к вычислению пределов.
11. Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке.
12. Точки разрыва функции и их классификация.
13. Основные свойства функций, непрерывных на отрезке.
14. Основные элементарные функции. Класс элементарных функций.

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

15. Понятие производной функции. Геометрический и экономический смысл производной.
16. Правила дифференцирования.
17. Теорема о производной сложной функции. Теорема о производной обратной функции.
18. Дифференцируемость функции в точке. Связь дифференцируемости и непрерывности.
19. Понятие дифференциала функции и его применение.
20. Производные основных элементарных функций. Таблица производных.
21. Производные и дифференциалы высших порядков.
22. Теорема Ферма. Примеры.
23. Теорема Ролля. Примеры.
24. Теорема Лагранжа. Примеры.
25. Теорема Коши. Примеры.
26. Правило Лопиталя. Примеры.

27. Формула Тейлора.
28. Представление элементарных функций по формуле Тейлора.
29. Исследование функции на монотонность.
30. Исследование функции на экстремумы.
31. Точки перегиба графика функции. Выпуклость графика функции.
32. Асимптоты графика функции.
33. Схема исследования функции и построение ее графика.

Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

34. Понятие функции двух переменных. Область определения и множество значений функции двух переменных. Примеры.
35. Предел и непрерывность функции двух переменных. Точки разрыва.
36. Частные производные первого порядка функции двух переменных. Примеры.
37. Понятие дифференцируемости функции двух переменных. Полный дифференциал.
38. Производная сложной функции. Примеры.
39. Частные производные высших порядков.
40. Экстремумы функции двух переменных. Необходимые условия существования экстремума. Достаточные условия существования экстремума. Пример.
41. Алгоритм отыскания наибольшего и наименьшего значений функции двух переменных.

Практические задания на экзамен

Полный список задач к экзамену находится на кафедре.

Образец экзаменационного билета (первый семестр)

1. Точки разрыва функции одной переменной и их классификация.
2. Найдите частные производные первого порядка функции двух переменных $z=e^{\frac{x}{y}}xy$.
3. Найдите промежутки возрастания и убывания функции $f(x)=3x+\frac{3}{x}+5$.

Критерии оценивания ответа на экзамене

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Теоретический вопрос	1 балл
2	Задача	2 балла

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

№ п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

Вопросы для подготовки к экзамену (2 семестр)

Интегральное исчисление функций одной переменной

1. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла.
2. Непосредственное интегрирование. Таблица неопределенных интегралов.
3. Метод замены переменной в неопределенном интеграле.
4. Метод интегрирования по частям в неопределенном интеграле.
5. Интегрирование рациональных дробей.

6. Интегрирование тригонометрических выражений.
7. Понятие определенного интеграла. Необходимое условие интегрируемости функции. Интегрируемость непрерывной функции. Интегрируемость монотонной функции.
8. Свойства определенного интеграла (линейность и аддитивность).
9. Свойства определенного интеграла (интегрирование неравенств, оценка интеграла). Теоремы о среднем для определенного интеграла.
10. Интеграл с переменным верхним пределом. Формула Ньютона-Лейбница.
11. Замена переменной под знаком определенного интеграла.
12. Интегрирование по частям определенного интеграла.
13. Интегрирование четных, нечетных и периодических функций.
14. Длина дуги кривой.
15. Площадь криволинейной трапеции. Площадь криволинейного сектора.
16. Несобственный интеграл первого рода. Несобственный интеграл второго рода.

Основы интегрального исчисления функций нескольких переменных

17. Понятие двойного интеграла. Свойства двойного интеграла.
18. Понятие повторного интеграла и его свойства.
19. Вычисление двойного интеграла с помощью повторных.
20. Замена переменных в двойном интеграле. Пример.
21. Понятие криволинейного интеграла второго рода и его основные свойства.
22. Условия существования криволинейного интеграла по координатам и его вычисление.
23. Криволинейный интеграл по замкнутому контуру. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.

Числовые и функциональные ряды

24. Основные понятия: числовой ряд, частичная сумма, сумма ряда, сходящийся и расходящийся ряды. Геометрический ряд.
25. Простейшие свойства сходящихся рядов. Остаток ряда.
26. Необходимый признак сходимости. Гармонический ряд. Критерий Коши сходимости ряда.
27. Знакоположительные ряды. Необходимое и достаточное условие сходимости знакоположительных рядов.
28. Первая теорема сравнения. Примеры.Вторая теорема сравнения. Примеры.
29. Признак Даламбера.Радикальный признак Коши.
30. Интегральный признак Коши. Обобщенный гармонический ряд.
31. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимость.
32. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Оценка погрешности.
33. О некоторых свойствах числовых рядов. Теоремы Дирихле и Римана.
34. Функциональные ряды (основные понятия). Примеры.Простейшие свойства функциональных рядов. Абсолютная и условная сходимость функциональных рядов.
35. Понятие равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов. Примеры. Критерий Коши равномерной сходимости рядов. Признак Вейерштрасса. Примеры.
36. Свойства равномерно сходящихся функциональных рядов.
37. Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал сходимости и радиус сходимости степенного ряда.
38. Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность суммы степенного ряда. Почленное интегрирование и дифференцирование степенных рядов.
39. Разложение функции в степенной ряд. Необходимое условие. Единственность разложения. Ряд Тейлора.
40. Разложение в ряд Тейлора элементарных функций.
41. Тригонометрические ряды. Свойства суммы тригонометрического ряда. Единственность разложения. Тригонометрический ряд Фурье.
42. Условия разложения функции в тригонометрический ряд Фурье.

Практические задания на экзамен

Полный список задач к экзамену находится на кафедре.

Образец экзаменационного билета (2 семестр)

1. Понятие криволинейного интеграла второго рода и его основные свойства.
2. Найдите сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$.
3. Найдите неопределенные интегралы:

   а) $\int e^{e^x} e^x dx$; б) $\int x \operatorname{arctg} x dx$.

Критерии оценивания ответа на экзамене

3. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Теоретический вопрос	1 балл
2	Задача	2 балла

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

4. Шкала оценивания работы:

№ п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Основная литература

1. Шипачев, В. С. Высшая математика : учебное пособие для вузов / В. С. Шипачев. — 8-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 447 с. — (Бакалавр и специалист). — ISBN 978-5-534-12319-7. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/447322.
2. Шипачев, В. С. Дифференциальное и интегральное исчисление : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / В. С. Шипачев. — Москва :Издательство Юрайт, 2019. — 212 с. — (Бакалавр. Прикладной курс). — ISBN 978-5-534-04282-5. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/437924.
3. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 1 : учебник для академического бакалавриата / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 324 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-07067-5. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/437203.
4. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 2 : учебник для академического бакалавриата / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 315 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-07069-9. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/437204.
5. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 2 : учебник для академического бакалавриата / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 3-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 324 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-09085-7. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/427043.

6. Кудрявцев, Л. Д. Курс математического анализа в 3 т. Том 1 : учебник для бакалавров / Л. Д. Кудрявцев. — 6-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2019. — 703 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-3701-5. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/425369.

7.2. Дополнительная литература

1. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 1. М.: Наука. Физматлит. 2014.
2. Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А. Математический анализ в вопросах и задачах. Под ред. В.Ф. Бутузова. М.: Физматлит, 2002.
3. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу. Кн. 2. М.: Высшая школа , 2000.
4. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис Пресс, 2015. – Ч. 1.

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Национальный открытый университет «Интуит». URL: http://www.intuit.ru
2. Система дистанционного обучения СмолГУ https://cdo.smolgu.ru
3. Национальная платформа открытого образования https://openedu.ru

8. Материально-техническое обеспечение

Для проведения занятий лекционного типа имеется аудитория с проектором и ноутбуком (нестационарными) – ауд. 409, для проведения занятий семинарского типа – ауд. 409; для самостоятельной работы –ауд. 235, оснащённая ПК с выходом в Интернет.

9.Программное обеспечение

KasperskyEndpointSecurity для бизнеса Стандартный АО «Лаборатория Касперского», лицензия 1FB6-161215-133553-1-6231.
Microsoft Open License, лицензия 49463448 всоставе:
1. Microsoft Windows Professional 7 Russian.
2. Microsoft Office 2010 Russian.