

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Артеменков Михаил Николаевич
Должность: Ректор
Дата подписания: 07.10.2026 12:25:58
Уникальный программный ключ:
a63b74166e8f4fc17bd1e0462725f79e393bfd19

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»
Проректор по учебно-методической
деятельности
_____ Ю.А. Устименко
«25» декабря 2025 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ Б1.В.01.02 ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Направление подготовки: **44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)**

Направленность (профиль): **Математика, Физика и информатика**

Форма обучения – очная

Курс – 2

Семестр – 3

Всего зачетных единиц – 2, часов - 72

Форма отчетности: зачет – 3 семестр

Программу разработали: кандидат физико-математических наук, доцент С.А. Гомонов;
ассистент К.В. Осипян

Одобрена на заседании кафедры
«24» ноября 2025 г., протокол № 4

Заведующий кафедрой _____ К.М. Расулов

Смоленск
2025

1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Теория чисел» входит в часть, формируемую участниками образовательных отношений, программы бакалавриата по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки). Она изучается в третьем семестре и является одной из основных дисциплин, т.к., в основном, завершает значительную часть курса высшей алгебры.

При изучении данной дисциплины необходимы компетенции студентов, сформированные при изучении таких дисциплин, как: «Дискретная математика», «Алгебра» и «Математический анализ»,

Изучение курса основано на традиционных методах высшей школы, а также тесной взаимосвязи со смежными курсами.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
ПК-5. Способен использовать научные знания в предметной области (математика) в процессе формирования предметной компетенции обучающихся в рамках реализации основной общеобразовательной программы	Знать: современное состояние и перспективы развития математики как учебной дисциплины, направления развития школьного математического образования, теоретические основы обучения математике, принципы построения методической системы обучения математике, основные линии школьного курса математики, их структуру, содержание и роль, этапы формирования математических понятий, методические подходы к изучению основных тем школьного курса математики; Уметь: анализировать и интерпретировать содержание математических понятий, теорем, задач, разрабатывать фрагменты уроков, организовывать образовательный процесс обучения математике, конструировать методику введения понятий, изучения теорем, решения задач; Владеть: основными приемами организации деятельности школьников по изучению математики, навыками разработки методики изучения частных вопросов обучения математике, исследовательскими методами в профессиональной деятельности.

3. Содержание дисциплины

1. **Делимость в кольце целых чисел и её свойства.** Деление с остатком и его свойства. Применение свойств отношения делимости к решению задач. НОД и НОК, их свойства и применение.

2. **Деление с остатком в кольце $\mathbb{Z}$ и его свойства.** Основная теорема о делении с остатком в $\mathbb{Z}$. Применение свойств деления с остатком к решению задач, полная индукция по остаткам. Линейные диофантовы уравнения и методы их решения.

3. **Простые числа и их свойства.** Основная теорема арифметики о факториальности кольца $\mathbb{Z}$. Канонические разложения целых чисел. Неравенство Чебышева. Асимптотический закон распределения простых чисел. Теорема Евклида. Теорема Дирихле. Результаты Матиясевича и др.

4. **Теория сравнений. Числовые сравнения и их свойства.** Применение свойств числовых сравнений к решению задач. Полная индукция по остаткам. Примеры.

5. **Кольцо и поле классов вычетов.** Критерий превращения кольца $\mathbb{Z}_m$ в поле. Системы вычетов, их свойства и применение.

6. **Теоремы Эйлера и Ферма.** Доказательство этих теорем и использование при решении задач. Функция Эйлера $\varphi(m)$ и ее свойства

7. **Сравнения и системы сравнений с неизвестной величиной.** Алгебраические сравнения от одной неизвестной. Понятие решения и его свойства. Перебор полной системы вычетов.

8. **Сравнения первой степени.** Критерий разрешимости. Методы поиска решений сравнения первой степени от одного переменного.

9. **Сравнения по простому модулю.** Сравнения по степени простого числа. Редукция сравнения по составному модулю к сравнениям по степени простого числа и, наконец, к сравнениям по простым модулям.

10. **Показатели чисел и классов чисел по данному модулю.** Свойства показателя принадлежности и методы вычисления. Число классов с заданным показателем.

11. **Первообразны корни по простому модулю. Индексы и антииндексы.** Критерий существования первообразных корней по данному модулю. Индексы чисел и классов чисел по данному модулю и их свойства. Антииндексы. Индексирования и потенцирование. Таблицы индексов и антииндексов.

12. **Двучленные сравнения по простому модулю** и методы их решения.

13. **Квадратичные вычеты и квадратичные невычеты.** Их свойства. Алгоритм решения алгебраического сравнения второй степени по простому модулю. Символ Лежандра и Якоби и их свойства и применения.

14. **Арифметические приложения теории сравнений.** Показатель принадлежности и его применение в арифметике.

15. **Цепные дроби.** Разложение рационального числа в цепную дробь. Свойства цепных дробей и их применение к решению задач. Подходящие дроби, их свойства и применение.

16. **Представления действительных чисел бесконечными цепными дробями.** Квадратичные иррациональности и их разложение в бесконечные периодические дроби. Теорема Лежандра.

17. **Приближения действительных чисел подходящими дробями.** Квадратичные иррациональности. Результаты Эйлера.

18. **Теорема Дирихле** и её применение к представлению простого числа $P \equiv 1 \pmod{4}$ в виде суммы двух квадратов. Характеристики, их свойства и применения.

19. **Алгебраические и трансцендентные числа.** Теорема Лиувилля и её применение.

4. Тематический план

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий		
			лекции	практические занятия	самостоятельная работа
1	Делимость в кольце целых чисел и её свойства.	6	2	2	2
2	Деление с остатком и его свойства в кольце $\mathbb{Z}$.	6	2	2	2
3	Простые числа и их свойства. Основная теорема арифметики. Неравенство Чебышёва для $\Pi(x)$.	6	2	2	2
4	Теория сравнений. Числовые сравнения и их свойства. НОД и НОК	5	2	2	1
5	Кольцо и поле классов вычетов.	4	1	2	1
6	Теоремы Эйлера и Ферма.	5	1	2	2
7	Сравнения и системы сравнений с неизвестной величиной.	5	2	2	1
8	Сравнения первой степени.	3	—	2	1
9	Сравнения по простому модулю. Сравнения по степени простого числа.	3	—	2	1
10	Показатели чисел и классов чи-	8	2	4	2

	сел по данному модулю.				
11	Первообразные корни по простому модулю. Индексы и антииндексы.	4	–	2	2
12	Двучленные сравнения по простому модулю.	3	–	2	1
13	Квадратичные вычеты и невычеты.	4	1	2	1
14	Арифметические приложения теории сравнений.	2	1	–	1
15	Цепные дроби.	3	–	2	1
16	Представления действительных чисел цепными дробями.	1	–	–	1
17	Приближения действительных чисел подходящими дробями.	1	–	–	1
18	Теорема Дирихле и её применение.	–	–	–	-
19	Алгебраические и трансцендентные числа.	3	–	2	1
ИТОГО		72	16	32	24

5. Виды учебной деятельности

Занятия лекционного типа

Лекция 1. Введение, деление, делимость и деление с остатком в кольце целых чисел и их свойства. Основная теорема о делении с остатком в $\mathbb{Z}$. Свойства остатков.

Лекция 2. Понятия простого и составного числа. Свойства простых чисел. Теорема Евклида о простых числах, теорема об интервалах. Признаки делимости НОД и НОК и их свойства.

Лекция 3. Основная теорема арифметики. Канонические разложения и их применения. Результаты о распределении простых чисел.

Лекция 4. Числовые сравнения, их свойства и применение.

Лекция 5. Кольцо и поле классов вычетов. Теоремы Ферма и Эйлера.

Лекция 6. Сравнение и системы сравнений с неизвестной величиной. Сравнение первой степени. Сравнение по простому модулю и по степени простого числа.

Лекция 7. Показатель числа и класса чисел и его свойства. Первообразные корни по простому модулю и их свойства. Индексы и их антииндексы.

Лекция 8. Двучленные сравнения по простому модулю и методы их решения. Квадратичные вычеты и невычеты. Символ Лежандра, его свойства и применение.

Занятия семинарского типа

Номера задач указываются по неопубликованному сборнику задач по теории чисел, составленному автором данной программы С.А. Гомоновым и предоставляемому студентам в начале семестра (всего в сборнике около 200 задач).

Практическое занятие № 1 - 2. *Делимость и деления с остатком в кольце $\mathbb{Z}$ и их свойства.*

Решение задач №1-17.

Практическое занятие №3. *Метод математической индукции и его модификации. Полная индукция по остаткам.*

Решение задач №18 - 31.

Практическое занятие №4. *Простые и составные числа и их свойства. Основная теорема арифметики. Канонические разложения и их применение.*

Решение задач №32 - 43.

Практическое занятие №5. *НДО и НОК целых чисел и их свойства.*

Решение задач №44 - 58.

Практическое занятие №6. *Числовые сравнения, их свойства и применение. Признаки равноостаточности и делимости систематических чисел.*

Решение задач №59 – 80.

Практическое занятие № 7. *Кольцо и поле классов вычетов. Малая теорема Ферма и теорема Эйлера. Решение алгебраических сравнений. Сравнения первой степени.*

Решение задач №81-100.

Практическое занятие №8. *Показатель числа и класса чисел и его свойства. Применение показателя в арифметике. Первообразные корни и их свойства. Индексы и антииндексы.*

Решение задач №101-130.

Практическое занятие №9-10. *Двучленные сравнения по простому модулю и методы их решения. Таблицы индексов и антииндексов.*

Решение задачи №130-140.

Практическое занятие №11-13. *Сравнения второй степени по простому модулю и методы их решения. Символ Лежандра, его свойства и применение.*

Решение задач №140-152.

Практическое занятие №14-16. *Цепные дроби, их свойства и применение.*

Решение задач №152-160.

Самостоятельная работа

Текущая самостоятельная работа студента направлена на углубление и закрепление знаний студентов и развитии практических умений. Она заключается в работе с лекционными материалами, поиске и обзоре литературы и электронных источников, информации по заданным темам курса, опережающей самостоятельной работе, в изучении тем, вынесенных на самостоятельную проработку, подготовке к практическим занятиям.

Самостоятельная внеаудиторная работа студентов состоит в:

- проработке лекционного материала, составлении конспекта лекций по темам, вынесенным на самостоятельное изучение;
- выполнении практических заданий.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Текущая аттестация осуществляется на каждом практическом занятии в процессе фронтального опроса, выполнения заданий для аудиторной работы, в процессе проверки домашней самостоятельной работы.

С целью дифференциации уровня подготовки специалистов и для ликвидации

имеющихся при изучении дисциплины задолженностей студентам предлагаются индивидуальные дидактические задания и домашние работы, которые выполняются в процессе внеаудиторной работы и сдаются на проверку преподавателю.

Проведение текущего контроля осуществляется также посредством проведения аудиторных проверочных работ и разноуровневых самостоятельных работ.

Оценочные средства

I. Контрольные вопросы для проверки теоретической подготовки к практическому занятию.

Критерии оценки ответа на теоретический вопрос

Показатель	Количество баллов
1) Полнота и глубина ответа (усвоенные теории, понятия, факты и пр.)	1
2) Сознательность ответа (понимание излагаемого материала)	1
3) Логика изложения материала (умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться специальной терминологией)	1
4) Умение приводить примеры использования описанных явлений, теорий и устройств	1
5) Использование при подготовке ответа на вопрос дополнительных источников информации	0,5
6) Наличие конспекта ответа на вопрос	0,5
Итоговая (суммарная) оценка	Max - 5

II. Задания для самостоятельной работы.

Критерии оценивания выполнения заданий для самостоятельной работы

Показатель	Количество баллов
1) Полнота и глубина изложения ответа (усвоенные теории, понятия, факты)	1
2) Логика изложения материала	1
3) Примеры использования описанных явлений, теорий и устройств на практике	1
4) Использование при подготовке ответа на вопрос дополнительных источников информации	1
5) Оформление работы	1
Итоговая (суммарная) оценка	Max - 5

III. Проверочные работы по дисциплине.

Проведение текущего контроля осуществляется также посредством проведения аудиторных письменных проверочных работ.

Образец проверочной работы

1. Распределите классы чисел по показателям по модулю:
а) 12; б) 13.
2. Найдите все первообразные корни по модулю 19.
3. Решите сравнение, используя метод индексирования $2x^6 \equiv 5 \pmod{31}$.
4. Разложите в конечную цепную дробь рациональное число $\frac{61}{203}$ и найдите все подходящие к ней дроби.

Критерии оценивания проверочной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно реализован каждый метод решения	1 балл
2	Анализ результатов	2 балла

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация осуществляется посредством проведения зачета

Вопросы для подготовки к зачету

1. Система натуральных чисел N . Аксиомы Пеано. Строгий порядок в N и его свойства.
2. Метод математической индукции и его модификации. Примеры.
3. Кольцо целых чисел и его свойства.
4. Операция деления в Z . Отношение делимости в Z и его свойства.
5. Деление с остатком в кольце целых чисел. Основная теорема о делении с остатком в кольце целых чисел. Примеры.
6. Основные свойства деления с остатком в Z и остатков. Метод перебора всех возможных случаев. Полная индукция по остаткам. Примеры.
7. НОД двух целых чисел, его существование и единственность. Алгоритм Евклида и его свойства. Примеры.
8. Свойства НОД двух целых чисел.
9. Взаимно простые числа и их свойства. Примеры.
10. НОК двух целых чисел, его существование и единственность. Связь НОК и НОД двух целых чисел. Примеры.
11. Свойства НОК двух целых чисел.
12. Простые и составные числа. Свойства простых чисел. Примеры.
13. Основная теорема арифметики о факторизации натуральных чисел. Примеры.
14. Каноническое и обобщённое каноническое разложение натурального числа, их свойства и применения. Примеры.
15. Теорема Евклида о простых числах. Теорема об интервалах. Решето Эратосфена. Примеры.
16. Числовые функции $\tau(n)$ и $\sigma(n)$ и их свойства. Примеры.
17. Функция Эйлера и её свойства. Примеры.
18. Функция $\pi(n)$. Асимптотический закон распределения простых чисел. Результаты Чебышёва, Дирихле.
19. Диофантовы уравнения. Великая проблема Ферма. Результаты Матиясевича Ю.В. и А. Вайлза. Линейные (неопределённые) диофантовы уравнения с двумя неизвестными. Понятие частного и общего решения линейного диофантова уравнения с двумя неизвестными и методы их нахождения. Примеры.
20. Числовые сравнения и их свойства. Применение свойств числовых сравнений к решению задач.
21. Признаки делимости для натуральных чисел, представленных их систематическими записями.
22. Классы вычетов по данному модулю и их свойства. Основные операции над классами и свойства этих операций. Кольцо классов вычетов Z_m .

23. Свойства кольца классов вычетов Z_m . Мультипликативная группа $G_{в.п.}$ кольца Z_m . Поле Z_p , где p - простое число. Примеры.
24. Системы вычетов и их свойства.
25. Малая теорема Ферма и теорема Эйлера и их применения к решению задач.
26. Конечные цепные дроби. Теорема существования и единственности представления конечной цепной дробью произвольного рационального, числа. Примеры.
27. Подходящие дроби и их свойства. Примеры. Применение цепных дробей к решению линейных диофантовых уравнений. Примеры.
28. Бесконечные цепные дроби. Сходящаяся бесконечная цепная дробь и её величина. Подходящие дроби к бесконечной цепной дробью. Примеры. Свойства подходящих дробей.
29. Полные частные в представлении действительного числа бесконечной цепной дробью и их свойства. Разложение действительного числа в цепную дробь и его свойства. Примеры нахождения величины бесконечной цепной дроби и разложения в цепную дробь иррационального действительного числа.
30. Теорема существования и единственности разложения любого действительного числа в цепную дробь. Оценки отклонения подходящей дроби от соответствующего действительного числа. Примеры.
31. Квадратические иррациональности и периодические цепные дроби и связь между ними. Теорема Лагранжа. Примеры.
32. Понятие сравнения с неизвестными. Алгебраическое сравнение от одного неизвестного и его решение. Свойства решений алгебраических сравнений. Решение - число и решение - класс. Метод перебора полной системы вычетов. Примеры.
33. Понятие равносильных сравнений и его свойства.
34. Линейные сравнения с одним неизвестным, критерий наличия у них решений. Число решений - классов и их строение. Примеры. Алгоритм решения линейного сравнения с одним неизвестным. Примеры.
35. Степень алгебраического сравнения от одного неизвестного. Алгебраические сравнения по простому модулю и их свойства.
36. Критерии Вильсона и Эйлера простоты натурального числа. Понятие разложения многочлена с целыми коэффициентами по данному модулю.
37. Сравнения второй степени по простому модулю. Квадратичные вычеты и невычеты по простому модулю. Примеры.
38. Критерии квадратичного вычета и невычета по простому модулю (критерий Эйлера, критерий в терминах индексов по первообразным корням). Символ Лежандра, его свойства и примеры применения.
39. Показатель принадлежности числа и класса чисел по данному модулю. Свойства показателя. Алгоритм вычисления показателя принадлежности. Примеры применения показателя принадлежности в арифметике.
40. Число классов с заданным показателем и его свойства. Примеры.
41. Понятие первообразного корня по данному модулю. Число первообразных корней по простому модулю. Свойства первообразных корней.
42. Индексы по первообразным корням и их свойства.
43. Двучленные сравнения по простому модулю. Критерий разрешимости двучленного сравнения по простому модулю в терминах индексов. Примеры.
44. Критерий квадратичного вычета в терминах индексов. Свойства квадратичных вычетов. Примеры.
45. Редукция сравнения по составному модулю к сравнению по степени простого числа и к сравнению по простому модулю.
46. Диофантово уравнение вида $x^2 + y^2 = p$, где p - простое число. Теорема Дирихле и её применение к случаю $p \equiv 1 \pmod{4}$.
47. Понятие алгебраического и трансцендентного числа. Примеры. Теорема Лиувилля и её применение к построению трансцендентных чисел и к доказательству иррациональности.

Образец зачетной работы

1. Числовые сравнения и их свойства. Применение свойств числовых сравнений к решению задач.
2. Понятие алгебраического и трансцендентного числа. Примеры. Теорема Лиувилля и её применение к построению трансцендентных чисел и к доказательству иррациональности.
3. Задача.
Докажите, что для любого $n \in \mathbb{N}$:
а) $(25^n - 17^n) : 8$, б) $(8^n - 1) : 7$, в) $(9^{2n-1} + 7^{2n-1}) : 16$.

Критерии оценивания ответа на зачете

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть работы	Количество баллов
1	Теоретический вопрос	2 балла
2	Математическая модель	1 балл
3	Реализация решения задачи	2 балла

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Зачтено	3-5
2	Неудовлетворительно	менее 3

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Список основной литературы

1. Виноградов, И. М. Основы теории чисел / И. М. Виноградов. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 123 с. — (Антология мысли). — ISBN 978-5-534-12085-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/564451> (дата обращения: 21.11.2025).
2. Ларин, С. В. Алгебра и теория чисел. Группы, кольца и поля : учебник для вузов / С. В. Ларин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 160 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-05567-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563870> (дата обращения: 21.11.2025).
3. Чебышёв, П. Л. Теория чисел. Теория вероятностей. Теория механизмов / П. Л. Чебышёв ; ответственный редактор И. М. Виноградов ; составитель А. О. Гельфонд. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 457 с. — (Антология мысли). — ISBN 978-5-534-05214-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563670> (дата обращения: 21.11.2025).

7.2 Список дополнительной литературы

1. Айерлэнд К., Роузен М. Классическое введение в современную теорию чисел. М., Мир, 1987.
2. Алгебра и теория чисел. Учебное пособие для студентов-заочников 2 курса ф.-м.ф.-тов пединститутов. Под ред Н.Я.Виленкина. М., Просвещение, 1984.
3. Александров В.А., Горшенин С.М. Задачник-практикум по теории чисел. М., Просвещение, 1972.
4. Борович З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. Наука, 1972.
5. Босс В. Лекции по математике. Т.14: Теория чисел. М., Либроком, 2010.

4. Босс В. Лекции по математике. Т.6: От Диофанта до Тьюринга, Ком Кинга, 2010.
- Бухштаб А.А. Теория чисел. М., Просвещение, 1966.
5. Кочева А.А. Задачник-практикум по алгебре и теории чисел. Часть 3. Учебное пособие для студентов-заочников 2 курса физ.-мат.ф-тов пединститутов, М., Просвещение, 1984.
6. Кудреватов Г.А. Сборник задач по теории чисел, М., Просвещение, 1970.
7. Нестеренко Ю.В. Теория чисел. М., «Академия», 2008.
8. Сизый С.В. Лекции по теории чисел. Учебное пособие. М., Физматлит, 2006.
6. Чандрасекхаран К. Арифметические функции. Наука, 1975.
7. Шнеперман Л.Б. Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях. Ч.1,2. Учебное пособие для физ.-мат.ф-тов пединститутов.- Минск, Высшая школа, 1986-1987.

7.3 .Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети Интернет

1. Электронная библиотека <https://www.biblio-online.ru>
2. Электронно-библиотечная система <http://znanium.com>
3. Математическое бюро: решение задач по высшей математике (по разделу теории чисел) - www.matburo.ru
4. <http://www.exponenta.ru/> сайт материалов по математическим пакетам.

8. Материально-техническое обеспечение

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, оснащенная стандартной учебной мебелью, мультимедиапроектором, ноутбуком, колонками и интерактивной доской.

Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенная стандартной учебной мебелью.

Помещение для самостоятельной работы – компьютерный класс с доступом к сети «Интернет» и ЭИОС СмолГУ.

9. Программное обеспечение

Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), лицензия 66975477 от 03.06.2016 (бессрочно).

Обучающимся обеспечен доступ к ЭБС «Юрайт», доступ в электронную информационно-образовательную среду университета.