Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Артеменков Михаил Николаевич
Должность: Ректор
Дата подписания: 09.11.2026 18:37:51
Уникальный программный ключ:
a63b74166e8f4fc17bd1e0462725f79e393bfdf9

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»
Проректор по учебно-
методической работе
_____Ю. А. Устименко.
«7» сентября 2021 г.

Рабочая программа дисциплины

Б1.В.ДВ.03.01 Информационная сложность и задачи высокой размерности

Направление подготовки: **01.04.02 Прикладная математика и информатика**
Направленность (профиль): **Прикладные Интернет-технологии**
Форма обучения - очно-заочная
Курс – 1
Семестр – 2
Всего зачетных единиц – 2, часов – 72

Форма отчетности: зачет – 2 семестр

Программу разработал
кандидат физико-математических наук, доцент Хартов А. А.

Одобрена на заседании кафедры
«26»августа 2020 г., протокол № 1

Смоленск
2021

1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Информационная сложность и задачи высокой размерности» относится к дисциплинам по выбору части, формируемой участниками образовательных отношений.

Для успешного освоения данной дисциплины необходимы компетенции студентов, сформированные при изучении таких курсов, как: математический анализ, функциональный анализ, численные методы, теория вероятностей и математическая статистика, случайные процессы.

Основными целями освоения дисциплины являются 1) приобретение навыков работы с многопараметрическими объектами и связанными с ними актуальными детерминированными и стохастическими задачами, 2) овладение оптимальными методами решения этих задач, 3) формирование навыков их теоретического анализа и компьютерного моделирования.

Изучение курса основано на традиционных методах высшей школы, тесной взаимосвязи со смежными курсами, а также на использовании современной учебной, методической литературы, информационных и образовательных технологий.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
ПК-1. Способен осуществлять поиск, анализ, систематизацию научной информации в области прикладной математики и информатики для реализации научно-исследовательских проектов и решения прикладных задач.	**Знает**: теоретические основы и технологии организации научно-исследовательской деятельности. **Умеет**: осуществлять поиск, анализ, систематизацию научной (в том числе юридической) информации в области прикладной математики и информатики для реализации научно-исследовательских проектов и решения прикладных задач, подготавливать и представлять для обсуждения научно-исследовательские работы. **Владеет**: навыками организации и проведения научно-исследовательской деятельности в ходе выполнения профессиональных функций.

3. Содержание дисциплины

1. **Элементы функционального анализа и теории случайных функций.**

Линейные пространства. Нормированные пространства. Банахово пространство. Евклидовы пространства. Гильбертово пространство. Ортогональные системы. Тензорное произведение пространств. Линейные функционалы и операторы. Сопряженное пространство. Мера и интеграл по мере. Случайные величины и векторы, их распределения и числовые характеристики. Гауссовские случайные величины и векторы. Случайные функции: последовательности, процессы, поля, меры. Характеристики случайных функций. Гауссовские случайные функции и их свойства.

2. **Теория информационной сложности.**

Оператор решения. Общая постановка задачи. Понятие информационной сложности. Типы информации, алгоритмов и ошибок. Постановки: наихудшего случая, в среднем, по вероятности, рандомизированная. Линейные задачи. Оптимальные алгоритмы линейных задач

в различных постановках. Стохастическая интерпретация линейных задач в постановках в среднем и по вероятности. Важнейшие примеры линейных задач.

3. Задачи высокой размерности.

Задачи высокой размерности и информационная сложность. Трактабильность и ее типы. Общие и тензорные линейные задачи. Интегрирование функций из различных классов по сильно многомерным областям и дискрепанс (discrepancy), QMC-алгоритмы, MC-алгоритмы, SparseGrid-алгоритмы и их сложность в различных постановках. Аппроксимации функций, зависящих от большого числа переменных, ANOVA-разложение. Аппроксимация гауссовских случайных полей высокой параметрической размерности в постановках в среднем и по вероятности, разложение Кархунена-Лоэва и связь с методом главных компонент.

4. Тематический план

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий *(в соответствии с учебным планом)*				
			лекции	семинары	практические занятия	лабораторные занятия	самостоятельная работа
1	Элементы функционального анализа и теории случайных функций		4			4	6
2	Теория информационной сложности		6			4	12
3	Задачи высокой размерности		6			8	22
Итого		72	16	-	-	16	40

5. Виды образовательной деятельности[1]

Занятия лекционного типа

Лекции 1-2. «Элементы функционального анализа и теории случайных функций».Линейные пространства. Нормированные пространства. Банаховопространство. Евклидовы пространства. Гильбертово пространство. Ортогональные системы. Тензорное произведение пространств. Линейные функционалы и операторы. Сопряженное пространство. Мера и интеграл по мере. Случайные величины и векторы, их распределения и числовые характеристики. Гауссовские случайные величины и векторы. Случайные функции: последовательности, процессы, поля, меры. Характеристики случайных функций. Гауссовские случайные функции и их свойства.

Лекции 3-5. «Теория информационной сложности». Оператор решения. Общая постановка задачи. Понятие информационной сложности. Типы информации, алгоритмов и ошибок. Постановки: наихудшего случая, в среднем, по вероятности, рандомизированная. Линейные задачи. Оптимальные алгоритмы линейных задач в различных постановках. Стохастическая интерпретация линейных задач в постановках в среднем и по вероятности. Важнейшие примеры линейных задач.

Лекции 6-8. «Задачи высокой размерности». Задачи высокой размерности и информационная сложность. Трактабильность и ее типы. Общие и тензорные линейные задачи. Интегрирование функций из различных классов по сильно многомерным областям и дискрепанс

1 Содержание данного раздела может быть представлено в электронной информационно- образовательной среде СмолГУ или в опубликованном учебно-методическом пособии.

(discrepancy), QMC-алгоритмы, MC-алгоритмы, SparseGrid-алгоритмы и их сложность в различных постановках. Аппроксимации функций, зависящих от большого числа переменных, ANOVA-разложение. Аппроксимация гауссовских случайных полей высокой параметрической размерности в постановках в среднем и по вероятности, разложение Кархунена-Лоэва и связь с методом главных компонент.

Занятия семинарского типа

Лабораторные работы 1-2 «Элементы функционального анализа и теории случайных функций».

1) Вычислить интеграл Лебега-Стилтьеса:

$$\int_{-2}^{2} (x^3+1)\,dG(x), \quad \text{где} \quad G(x)=\begin{cases} x+2, & x\in[-2,-1], \\ 2, & x\in(-1,0) \\ x^2+3, & x\in[0,2]. \end{cases}$$

2) Покажите, что если последовательность функций сходится по норме в $L_2(X,\mu)$, то она сходится по норме в $L_1(X,\mu)$.

3) Доказать, что всякие два ортонормированных базиса в гильбертовом пространстве равномощны.

4) Пусть случайные величины $X\sim$ U[0,1], $Y\sim\Pi(2)$, $Z\sim N(0,1)$ независимы. Найти **D**$(X-2Y+3Z-4)$.

5) Найти м.о. и ковариацию случайного процесса $Y(t)=X_1 f_1(t)+...+ X_n f_n(t)$, где $X_1, ..., X_n$ - некоррелированные случайные величины с м.о. $a_1,..., a_n$ и дисперсиями $d_1,..., d_n$, а $f_1,..., f_n$ - неслучайные функции.

6) Пусть $W(t)$, $t>0$, --- это винеровский процесс. Покажите, что процесс $e^{-t/2}\,W(e^t)$, $t>0$, является гауссовским, найдите его м. о. и ковариационную функцию.

7) Найдите плотность любого конечномерного распределения винеровского процесса.

8) Пусть $X_1, ..., X_n$ независимые процессы с нулевыми математическими ожиданиями. Найти м.о. и ковариационную функцию случайных полей: а) $Y(t_1,..., t_n)=X_1(t_1)+...+ X_n(t_n)$, б) $Y(t_1,..., t_n)=X_1(t_1)...X_n(t_n)$.

Лабораторная работа 3 «Сложность аппроксимации детерминированных функций одной переменной».

Задано семейство детерминированных функций (в явном виде). Для данного семейства: 1) получить аналитические представления сложности аппроксимации в постановке наихудшего случая, 2) получить верхние и нижние оценки для этой величины, 3) реализовать алгоритм вычисления сложности аппроксимации в постановке наихудшего случая по заданному порогу ошибки, построить соответствующий график зависимости, 4) с помощью величины сложности в постановке наихудшего случая построить на компьютере приближение функций данного семейства с заданной точностью.

Лабораторные работы 4 «Сложность аппроксимации случайных процессов».

Задан гауссовский случайный процесс (винеровский процесс, броуновский мост, процесс Орнштейна-Уленбека и т.д.). Для данного процесса: 1) получить аналитические представления сложности аппроксимации в среднем и по вероятности, 2) получить верхние и нижние оценки для этих величин, 3) реализовать алгоритм вычисления сложности аппроксимации в среднем по заданному порогу ошибки, построить соответствующий график зависимости, 4) реализовать

алгоритм вычисления сложности аппроксимации по вероятности по заданным значениям порога ошибки и уровня значимости, построить соответствующий график зависимости. 5) с помощью величин сложности в среднем и по вероятности смоделировать на компьютере данный случайный процесс с любой заданной точностью.

Лабораторные работы 5-6 «Сложность аппроксимации в среднем случайных полей».

Задано гауссовское случайное поле (броуновский лист, броуновская «подушка» и т.д.) с данной параметрической размерностью. Для данного случайного поля: 1) получить аналитическое представление сложности аппроксимации в среднем, 2) получить оценки для этих величин на основе имеющихся теоретических результатов и построить соответствующие графики зависимости, 3) реализовать алгоритм вычисления сложности аппроксимации в среднем по заданному порогу ошибки, построить соответствующий график зависимости, 4) провести сравнительный анализ результатов вычислений и соответствующих теоретических результатов. 5) с помощью величины сложности в среднем смоделировать на компьютере данное случайное поле с любой заданной точностью.

Лабораторные работы 7-8 «Сложность алгоритмов интегрирования функций по многомерным областям».

Задано семейство детерминированных функций (в явном виде), зависящих от заданного числа переменных. Для данного семейства: 1) получить аналитические представления сложности интегрирования в постановке наихудшего случая и в рандомизированной постановке с применением QMC-, MC- и SparseGrid-алгоритмов, 2) получить оценки для этих величин на основе имеющихся теоретических результатов и построить соответствующие графики зависимости, 3) реализовать алгоритмы вычисления сложности интегрирования в постановке наихудшего случая и в рандомизированной постановке по заданному порогу ошибки, построить соответствующие графики зависимости, 4) провести сравнительный анализ результатов вычислений и соответствующих теоретических результатов. 5) с помощью полученных величин сложности смоделировать на компьютере численное интегрирование функций данного класса с любой заданной точностью.

Самостоятельная работа

Примеры заданий по теме 1. «Элементы функционального анализа и теории случайных функций»

1) Найти собственные числа и функции для интегрального оператора с ядром $K(t,s)=\min\{t,s\}$.

2) Найти м.о. и ковариацию случайного поля $Y(t)=X_1(t_1)+...+X_n(t_n)$, где $X_1, ..., X_n$ - некоррелированные случайные процессы с нулевыми м.о. и ковариациями $K_1,..., K_n$.

3) Найти м.о. и ковариацию случайного поля $Y(t)=X_1(t_1)...X_n(t_n)$, где $X_1, ..., X_n$ - независимые случайные процессы с нулевыми м.о. и ковариациями $K_1,..., K_n$.

4) Пусть $W(t)$, $t>0$, --- это винеровский процесс. Покажите, что процесс $W(t)-tW(1)$, $t> 0$, является гауссовским, найдите его м. о. и ковариационную функцию.

Примеры заданий по теме 2. «Теория информационной сложности»

1) Найти представление для сложности аппроксимации наихудшего случая в пространстве Коробова с параметрами $b_1= b_2=1$.

2) Найти сложность аппроксимации в среднем для стандартного винеровского процесса при любом пороге ошибки из (0,1).

3) Найти представление для сложности аппроксимации по вероятности для броуновского моста при любом пороге ошибки из (0,1) и доверительном уровне из (0,1).

4) Записать разложение Кархунена-Лоэва для стационарного процесса Орнштейна-Уленбека.

Примеры заданий по теме 3. «Задачи высокой размерности»

1) Получить представление информационной сложности интегрирования в постановке наихудшего случая для тригонометрического полинома степени 1 по каждой переменной.

2) Получить аналитическое представление сложности аппроксимации в среднем для d-тензорной степени винеровского процесса для заданного порога ошибки.

3) Получить аналитическое представление сложности аппроксимации по вероятности для d-тензорной степени броуновского моста для заданного порога ошибки и доверительного уровня из (0,1).

4) Построить график зависимости сложности аппроксимации в среднем для 2-тензорной степени стационарного процесса Орнштейна-Уленбека от порога ошибки.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Текущая аттестация осуществляется засчет проведения и проверки лабораторных работ, которые выполняются в аудиторное и внеаудиторное время. Также текущая аттестация осуществляется посредством защиты каждым обучающимся каждой выполненной им лабораторной работы путем ответа на вопросы как теоретического характера в рамках темы лабораторной работы, так и непосредственно по полученным в данной работе результатам.

Задания и темы лабораторных работ приводятся выше.

Критерии оценивания лабораторной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильное выполнение лабораторной работы	2 балла
2	Правильные ответы на дополнительные вопросы к лабораторной работе	2 балла

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	3,75-4
2	Хорошо	3,0-3,5
3	Удовлетворительно	2,25-2,75
4	Неудовлетворительно	менее 2,25

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация осуществляется по итогам текущей аттестации в рамках зачета. Оценка «зачтено» ставится, если выполнены все лабораторные работы с оценками не меньшими, чем «удовлетворительно». В противном случае ставится «не зачтено».

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Основная литература

1. Кожевникова, И. А. Стохастическое моделирование процессов : учебное пособие для вузов / И. А. Кожевникова, И. Г. Журбенко. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 148 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-09989-8. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/454199
2. Крупский, В. Н. Теория алгоритмов. Введение в сложность вычислений : учебное пособие для вузов / В. Н. Крупский. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 117 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-04817-9. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/454121
3. Пригарин, С. М. Статистическое моделирование многомерных гауссовскихраспределений : учебное пособие для вузов / С. М. Пригарин. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 83 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10209-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/456088

7.2. Дополнительная литература

1. Лифшиц М. А., Гауссовские случайные функции, ТВиМС, Киев, 1995.
2. Лифшиц М. А., Лекции по гауссовским процессам, Лань, СПб., 2016.
3. Adler R. J., Taylor J., Random Fields and Geometry, Springer, New York, 2007.
4. Novak E., Wozniakowski H., Tractability of Multivariate Problems. Volume I: LinearInformation, EMS TractsMath. 6, EMS, Zurich, 2008.
5. Novak E., Wozniakowski H., Tractability of Multivariate Problems. Volume II: Standard Information for Functionals, EMS Tracts Math. 12, EMS, Zurich, 2010.
6. Novak E., Wozniakowski H., Tractability of Multivariate Problems. Volume III: Standard Information for Operators, EMS Tracts Math. 18, EMS, Zurich, 2012.
7. Ritter R., Average-case Analysis of Numerical Problems, Lecture Notes in Math. No 1733, Springer, Berlin, 2000.
8. Traub J. F., Wasilkowski G. W., Wozniakowski H., Information, Uncertainty, Complexity, Addison-Wasley, Reading MA, 1983.
9. Traub J. F., Wasilkowski G. W., Wozniakowski H., Information-Based Complexity, Academic Press, New York, 1988.
10. Traub J. F., Wozniakowski H., A general theory of optimal algorithms, Academic Press, NewYork, 1980.
11. Traub J. F., Werschulz A. G., Complexity and Information, Camb. Univ. Press, Cambridge, 1998.

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

- Тематический ресурс http://www.cs.columbia.edu/~agw/ibc/
- Тематический научный журнал https://www.journals.elsevier.com/journal-of-complexity
- Система дистанционного обучения Смоленского государственного университета http://cdo.smolgu.ru
- Электронно-библиотечная система университета http://biblioteka.smolgu.ru
- Национальный открытый университет http://www.intuit.ru
- Общероссийский математический портал http://www.mathnet.ru
- Кафедральная электронная библиотека.

8. Материально-техническое обеспечение

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используется интерактивная доска; проектор; электронная библиотека кафедры, содержащая электронные учебники и задачники по различным главам математического анализа; система компьютерной математики Mathematica. Осуществляется поиск информации в WWW-пространстве; работа с Web-страницами и ресурсами сети Интернет.

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине в университете имеется следующая необходимая инструментальная база: учебные аудитории для проведения практических занятий; компьютерный класс, оборудованный персональными ЭВМ с необходимым математическим софтом и выходом в Интернет для проведения лабораторных занятий; кабинеты, оборудованные проекторами и электронными досками для проведения лекционных занятий. Имеется кабинет ксерокопирования и кафедральный принтер для подготовки индивидуальных дидактических карточек, контрольных и экзаменационных материалов. Доступна электронная библиотека кафедры математического анализа. Используются портреты великих математиков, необходимые чертёжные инструменты.

9.Программное обеспечение

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине используется Информационно-вычислительный центр физико-математического факультета (Положение о Центре утверждено приказом ректора №01-66 от 28.09.2015 г.).

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используются информационные технологии обработки данных с помощью прикладных программных продуктов MicrosoftExcel, MicrosoftPowerPoint. Осуществляется поиск информации в WWW-пространстве; работа с Web-страницами и социальными ресурсами сети Интернет, а также используются различные системы компьютерной математики.