Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Артеменков Михаил Николаевич
Должность: Ректор
Дата подписания: 13.11.2026 14:53:06
Уникальный программный ключ:
a63b74166e8f4fc17bd1e0462725f79e393bfdf9

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»
Начальник управления по научной работе
_____Розанова Н.Н.
«26»сентября 2022 г.

Рабочая программа дисциплины
1.3. Вещественный, комплексный и функциональный анализ

Научная специальность: 1.1.1 Вещественный, комплексный и функциональный анализ
Отрасль науки: физико-математические науки
Форма освоения программы: очная
Срок освоения программы: 4 года
Курс – 2, 3
Семестр – 4, 5
Форма отчетности: экзамен (кандидатский экзамен) – 5 семестр

Программу разработал:
доктор физико-математических наук, профессор К.М. Расулов

Одобрена на заседании кафедры
«02» сентября 2022 г., протокол № 1

Заведующий кафедрой _____ К.М. Расулов

Смоленск
2022

1. Цель и результаты дисциплины

Цель дисциплины: фундаментальная подготовка аспирантов в области теории функций действительного переменного, теории функций комплексного переменного, функционального анализа и теории краевых задач комплексного анализа.

Планируемые результаты освоения дисциплины:

– знание фундаментальных основ и методов вещественного, комплексного и функционального анализа;

– умение использовать полученные знания при постановке новых краевых задач комплексного анализа и разработке методов их решения;

– умение проектировать и осуществлять комплексные исследования, в том числе междисциплинарные, на основе целостного системного научного мировоззрения с использованием знаний в области высшей математики;

– владениеметодологией теоретических и экспериментальных исследований в области высшей математики.

2. Содержание дисциплины

4 семестр

Раздел 1. Теория функций действительного переменного.

1. Мера, измеримые функции, интеграл.
2. Неопределенный интеграл Лебега. Теория дифференцирования.
3. Пространство суммируемых функций
4. Тригонометрические ряды. Преобразование Фурье.
5. Дифференцируемые многообразия и дифференциальные формы.

Раздел 2. Теория функций комплексного переменного.

1. Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты.
2. Целые и мероморфные функции.
3. Конформные отображения.
4. Аналитическое продолжение.

5 семестр

Раздел 3. Функциональный анализ.

1. Метрические и топологические пространства.
2. Нормированные и топологические линейные пространства.
3. Линейные функционалы и линейные операторы.
4. Гильбертовы пространства. Спектральная теория самосопряженных операторов.
5. Элементы дифференциального исчисления в линейных пространствах.
6. Обобщенные функции.

Раздел 4. Теория краевых задач комплексного анализа.

1. Интеграл типа Коши и его свойства.
2. Краевые задачи для аналитических функций.
3. Краевые задачи со сдвигом для аналитических функций.
4. Основные краевые задачи для полианалитических функций.

3. Контактная работа

В соответствии с Положением о программе подготовки научных и научно-педагогических кадров в аспирантуре федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Смоленский государственный университет», утвержденным приказом ректора от 25.02.2022 № 01-24, контактная работа по дисциплине1.3. Вещественный, комплексный и функциональный анализ реализуется в формате консультаций по возникшим вопросам при самостоятельной работе над

дисциплиной и / или для подготовки к промежуточной аттестации (кандидатскому экзамену) по следующему тематическому плану:

Семестр	Обсуждаемые вопросы	Контактные часы
4	Меры, измеримые функции, интеграл. Неопределенный интеграл Лебега и теория дифференцирования. Пространства суммируемых функций и ортогональные ряды. Тригонометрические ряды. Преобразование Фурье. Гладкие многообразия и дифференциальные формы. Интегральные представления аналитических функций. Ряды аналитических функций. Особые точки. Вычеты. Целые и мероморфные функции. Конформные отображения. Аналитическое продолжение.	1
5	Гармонические функции. Метрические и топологические пространства. Нормированные и топологические линейные пространства. Линейные функционалы и линейные операторы. Гильбертовы пространства и линейные операторы в них. Дифференциальное исчисление в линейных пространствах. Обобщенные функции. Интеграл типа Коши с плотностью из класса Гельдера и его свойства.Формула Сохоцкого-Племеля.Теорема Племеля-Привалова.Краевая задача Римана для аналитических функций и ее решение. Краевая задача Гильберта для аналитических функций и ее решение.Свойства гомеоморфизмов простых гладких кривых на себя.Краевая задача Газемана и ее решение.Краевая задача Карлемана и ее решение.Основные краевые задачи типа Гильберта для полианалитических функций и методы их решения. Основные краевые задачи типа Римана для полианалитических функций и методы их решения. Интеграл типа Коши с плотностью из класса $L_p(p>0)$ и его свойства. Краевая задача Римана для аналитических функций с коэффициентами из класса L_p..	2

4. Самостоятельная работа

Вопросы, выносимые на самостоятельное изучение аспирантом

4 семестр

Раздел 1. Теория функций действительного переменного.

1. Аддитивность и счетная аддитивность меры. Лебегово продолжение меры. Измеримые функции. Сходимость по мере и почти всюду. Теоремы Егорова и Лузина. Интеграл Лебега. Предельный переход под знаком интеграла. Сравнение с интегралом Римана. Прямые произведения мер. Теорема Фубини.

2. Дифференцирование монотонной функции. Функция с ограниченным изменением. Производная неопределенного интеграла Лебега. Восстановление функции по ее производной. Абсолютно непрерывные функции. Интеграл Лебега как функция множества. Теорема Радона-Никодима. Интеграл Стилтьеса.

3. Пространство Lp. Ортогональные системы функций в L2 - Ряды по ортогональным системам.

4. Условия сходимости ряда Фурье. Представление функций сингулярными интегралами. Единственность разложения функции в тригонометрический ряд.

Преобразование Фурье в пространствах L1 и L2. Теорема Планшереля. Преобразование Лапласа. Преобразование Фурье-Стилтьеса.

5. Дифференцируемые многообразия. Дифференциальные формы. Формула Стокса.

Раздел 2. Теория функций комплексного переменного.

1. Равномерно сходящиеся ряды аналитических функций; теоремы Вейерштрасса. Разложение аналитических функций в ряды Тейлора и Лорана, неравенства Коши. Нули аналитических функций. Теорема единственности. Изолированные особые точки (однозначного характера). Вычеты, теорема Коши о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов. Принцип аргумента. Теорема Руше. Теорема Рунге о приближении аналитических функций многочленами. Полиномы Фабера, скорость сходимости.

2. Рост целой функции. Порядок и тип. Теорема Вейерштрасса о целых функциях с заданными нулями; разложение целой функции в бесконечное произведение. Случай целых функций конечного порядка. Теорема Адамара. Теорема Миттаг-Леффлера о мероморфных функциях с заданными полюсами и главными частями.

3. Конформные отображения, осуществляемые элементарными функциями. Принцип сохранения области. Критерий однолистности. Теорема Римана. Теоремы о соответствии границ при конформных отображениях.

4. Аналитическое продолжение и полная аналитическая функция (в смысле Вейерштрасса). Понятие римановой поверхности. Продолжение вдоль кривой. Теорема о монодромии. Изолированные особые точки аналитических функций, точки ветвления конечного и бесконечного порядка. Принцип симметрии. Отображение многоугольников, формула Кристоффеля-Шварца. Модулярная функция. Нормальные семейства, критерий нормальности. Теорема Пикара.

5 семестр

Раздел 3. Функциональный анализ.

1. Сходимость. Полнота и пополнение метрического пространства. Сепарабельность. Принцип сжимающих отображений. Компактность в метрических итопологических пространствах.

2. Линейные пространства. Выпуклые множества и выпуклые функционалы, теорема Хана-Банаха. Нормированные пространства. Евклидовы пространства. Топологические линейные пространства.

3. Непрерывные линейные функционалы. Общий вид линейных функционалов в основных функциональных пространствах. Сопряженное пространство. Слабая топология и слабая сходимость. Линейные операторы. Пространство линейных ограниченных операторов. Компактные (вполне непрерывные) операторы.

4. Теория ограниченных операторов. Пространства L1 и L2. Неограниченные операторы.

5. Дифференцирование в линейных пространствах. Сильный и слабый дифференциалы. Производные и дифференциалы высших порядков. Экстремальные задачи для дифференцируемых функционалов. Метод Ньютона.

6. Основные и обобщенные функции. Дифференцирование обобщенных функций. Прямое произведение и свертка обобщенных функций. Обобщенные функции медленного роста. Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Преобразование Лапласа обобщенных функций (операционное исчисление).

Раздел 4. Теория краевых задач комплексного анализа.

1. Интеграл типа Коши с плотностью из H (класса Гельдера) и его свойства. Формула Сохоцкого-Племеля. Теорема Племеля-Привалова.

2. Краевая задача Римана для аналитических функций и ее решение. Краевая задача Гильберта для аналитических функций и ее решение.

3. Свойства гомеоморфизмов простых гладких кривых на себя. Краевая задача Газемана для аналитических функций и ее решение. Краевая задача Карлемана для аналитических функций и ее решение.

4. Полианалитические функции и их основные свойства. Основные краевые задачи типа Гильберта для полианалитических функций и методы их решения. Основные краевые задачи типа Римана для полианалитических функций и методы их решения.

5. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины

5.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущего контроля

Оценочным средством текущего контроля является контрольная работа.

Образец контрольной работы по разделу 1. Теория функций действительного переменного.

1. Доказать, что функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу на [0; 3] и найти интеграл, если

$$f(x)=\begin{cases}-x^2, & \text{если } x=\dfrac{1}{n},\ n\in N,\\ x^3 & \text{при остальных } x.\end{cases}$$

2. Покажите, что любое конечное множество из R_2^n– ступенчатая фигура.

Образец контрольной работы по разделу 2. Теория функций комплексного переменного.

1. Постройте конформное отображение полосы комплексной плоскости на единичный круг.

2. Найти функцию $w=f(z)$, конформно отображающую верхнюю полуплоскость $Im\ z>0$ на область $0<\arg w<\alpha\pi$, где $0<\alpha<2$.

Образец контрольной работы по разделу 3. Функциональный анализ.

1. Пусть $f(x)\in \boldsymbol{C}[a;b]$. Покажите, что уравнение

$$y(x)+\frac{1}{2}\sin y(x)+f(x)\equiv 0$$

имеет единственное решение $y(x)\in \boldsymbol{C}[a;b]$.

2. Проверьте, являются ли аддитивными следующие функционалы, заданные в пространстве $C[0;1]$: $F(f)=\left|f\left(\frac{1}{2}\right)\right|$; $F(f)=\max\limits_{0\le x\le 1} f(x)$.

Образец контрольной работы по разделу 4. Теория краевых задач комплексного анализа.

1. Решите краевую задачу Римана:

$$\Phi^+(t)=t^2\Phi^-(t)+1-\frac{1}{t^2},\ \text{где}\ t\in L=\{t:|t|=1\}.$$

2. Решите краевую задачу типа Римана:

$$\frac{\partial F^+(t)}{\partial x}=\frac{1}{t}\frac{\partial F^-(t)}{\partial x}+t,\quad \frac{\partial F^+(t)}{\partial y}=t^3\frac{\partial F^-(t)}{\partial y}+it,\ \text{где}\ t\in L=\{t:|t|=1\}.$$

Критерий оценивания:

Каждое задание оценивается в 1 балл с возможной градацией в 0,25 балла.

Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

5.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Форма проведения промежуточной аттестации – экзамен (кандидатский экзамен), 5 семестр.

Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации представлены в отдельном документе – рабочая программа Промежуточная аттестация по дисциплинам и практике.

6. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

6.1. Основная литература

1. Никитин А.А. Математический анализ. Углубленный курс: учебник и практикум для вузов / А.А. Никитин, В.В. Фомичев. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 460 с. – URL: https://urait.ru/bcode/489278.

2.Ильин В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 1: учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. – М.: Издательство Юрайт, 2022. — 324 с. – URL: https://urait.ru/bcode/491294.

3. Ильин В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 2: учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. – М.: Издательство Юрайт, 2022. — 315 с. – URL: https://urait.ru/bcode/491295.

4. Далингер В.А. Комплексный анализ: учебное пособие для вузов / В.А. Далингер, С. Д. Симонженков. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 143 с. – URL: https://urait.ru/bcode/492726.

5. Садовничая И.В. Математический анализ. Предел и непрерывность функции одной переменной: учебное пособие для вузов / И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко; под общей редакцией В. А. Ильина. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 115 с. – URL: https://urait.ru/bcode/493095.

6. ХорошиловаЕ. В. Математический анализ: неопределенный интеграл: учебное пособие для вузов / Е. В. Хорошилова. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 187 с. – URL: https://urait.ru/bcode/493087.

7. Потапов А. П. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной в 2 ч. Часть 1: учебник и практикум для вузов / А. П. Потапов. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 256 с. – URL: https://urait.ru/bcode/489992.

8. Потапов А. П. Математический анализ. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной в 2 ч. Часть 2: учебник и практикум для вузов / А. П. Потапов. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 268 с. – URL: https://urait.ru/bcode/493053.

9. Потапов А. П. Математический анализ. Дифференциальное исчисление ФНП, уравнения и ряды: учебник и практикум для вузов / А.П. Потапов. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 379 с. – URL: https://urait.ru/bcode/490236.

10. Чебышёв П. Л. Математический анализ / П. Л. Чебышёв; ответственный редактор И. М. Виноградов; составитель А. О. Гельфонд. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – URL: https://urait.ru/bcode/507844.

11. Математический анализ. Вещественные числа и последовательности: учебное пособие для вузов / И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко, Е. В. Хорошилова; под общей

редакцией В. А. Ильина. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 109 с. – URL: https://urait.ru/bcode/493096.

12. Садовничая И. В. Математический анализ. Функции многих переменных: учебник и практикум для вузов / И. В. Садовничая, Т. Н. Фоменко. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 206 с. – URL: https://urait.ru/bcode/492933.

13. Аксенов А. П. Дифференциальные уравнения в 2 ч. Часть 1: учебник для вузов / А. П. Аксенов. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 241 с. – URL: https://urait.ru/bcode/490792.

14. Аксенов А. П. Дифференциальные уравнения в 2 ч. Часть 2: учебник для вузов / А. П. Аксенов. – М.: Издательство Юрайт, 2022. – 359 с. – URL: https://urait.ru/bcode/490793.

6.2. Дополнительная литература

1. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М., Наука, 1984.

2. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1981.

3. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. М., Наука, 1977.

4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Функциональный анализ. М.: Наука, 1984.

5. Математическое моделирование / Под ред. А.Н. Тихонова, В.А. Садовничего и др. М.: Изд-во МГУ, 1993.

6. Михлин С.Г. Курс математической физики. – С.-Пб.: Лань, 2009.

7. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М., Наука, 1966.

8. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Наука, 1968.

9. Расулов К.М. Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СПГУ, 1998.

10. Расулов К.М. Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. – Смоленск: СмолГУ, 2013.

11. Расулов К.М. Уравнения математической физики. – Смоленск: СмолГУ, 2008.

12. Самарский А.А., Михайлов А.П. Математическое моделирование. М.: Физматлит, 1997.

13. АпарцинА.С.. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999. – 193с.

14. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.

15. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: Физматлит, 2001.

16. Болотин И.Б. Кусочно-непрерывные краевые задачи типа Римана в классах бианалитических функций: Дисс … канд. физ.-мат. наук. – Смоленск, 2004. – 106.

17. Верлань А.Ф., Сизиков В.С. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие. Киев: Наукова думка, 1986. – 543с.

18. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

19. Воеводин В.В. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.

20. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. 2-е изд. М.: Наука, 1977.

21. Денисов А.М. Введение в теорию обратных задач. М.: Изд-во МГУ, 1994.

22. Канторович Л.А., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.: Изд-во ФМ, 1962. – 708с.

23. Кристалинский В.Р. Приближенные методы решения краевых задач типа Гильберта и типа Римана для бианалитических функций: Дисс … канд. физ.-мат. наук. – Смоленск, 1999. – 90.

24. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы. Т. II. М.: Наука, 1977. – 399с.

25. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973.
26. Лебедев В.И. Функциональный анализ и вычислительная математика. 4-е изд. М.: Физматлит, 2000.
27. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977.
28. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977.
29. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976.
30. Морозов В.А.. Регулярные методы решения некорректно поставленных задач. М.: Изд-во МГУ, 1974. – 310с.
31. Мысовских И.П. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.
32. Петров А.А., Поспелов И.Г., Шананин А.А. Опыт математического моделирования экономики. М.: Энергоатомиздат, 1996.
33. Пытьев Ю.П. Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем. М.: Физматлит, 2002.
34. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1982.
35. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989.
36. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
37. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. - М.: Наука, 1972.
38. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986. – 287с.
39. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. 6-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1999.
40. Треногин В.А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
41. Фатулаев Б.Ф. Краевые задачи типа Газемана и тиап Карлемана для метааналитических функций: Дисс … канд. физ.-мат. наук. – Смоленск, 2000. – 107.
42. Heinrich Begehr. Boundary value problems in complex analysis I // Boletin de la AsociacionMatematicaVenezolana. Vol. 12, No. 1 (2005). – P. 65-85.
43. Heinrich Begehr. Complex analytic methods for partial differential equations. – Singapure: World Scientific Publishing, 1994.

6.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Образовательная платформа «Юрайт»https://urait.ru/
2. Цифровой образовательный ресурс «IPR MEDIA» https://iprmedia.ru/
3. Справочно-правовая система «КонсультантПлюс»https://www.consultant.ru/
4. Академия Гугл https://scholar.google.ru/
5. Научная электронная библиотека https://elibrary.ru/
6. Архив научных журналов http://archive.neicon.ru/
7. Национальная электронная библиотека http://нэб.рф/
8. Portal to Mathematics Publications http://www.emis.de/projects/EULER/

7. Материально-техническое обеспечение

Учебная аудитория для проведения групповых и индивидуальных консультаций, промежуточной аттестации, в том числе:

- стандартная учебная мебель (40 посадочных мест);
- стол и стул для преподавателя (по 1 шт.);
- кафедра для лектора (1 шт.);
- доска настенная трехэлементная (1 шт.);
- интерактивная доска (напольная) SMART BOARD (1 шт.);

- мультимедийный проектор NEC (1 шт.);
- ноутбук Asus (1 шт.);
- колонки Genius (1 пара)

Помещение для самостоятельной работы, оснащенное компьютерной техникой с возможностью подключения к сети «Интернет» и доступом в электронную информационно-образовательную среду организации, в том числе:

- компьютеры (12 шт.);
- компьютерный студенческий стол (12 шт.);
- стол и стул для преподавателя (по 1 шт.);
- доска настенная трехэлементная (1 шт.)

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат: 6314D932A1EC8352F4BBFDEFD0AA3F30
Владелец: Артеменков Михаил Николаевич
Действителен: с 21.09.2022 до 15.12.2023