

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Артеменков Михаил Николаевич
Должность: Ректор
Дата подписания: 07.10.2026 12:25:58
Уникальный программный ключ:
a63b74166e8f4fc17bd1e0462725f79e393bdf9

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»
Проректор по учебно-методической деятельности
_____ Ю.А. Устименко
«25» декабря 2025 г.

**Рабочая программа дисциплины по выбору
Б1.В.01.ДВ.01.02 ИНТЕГРАЛ ТИПА КОШИ**

Направление подготовки: **44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)**

Профиль: **Математика, Физика и информатика**

Форма обучения: очная

Курс – 5

Семестр – 10

Всего зачетных единиц – 2, часов – 72

Форма отчетности: 10 семестр – зачет

Программу разработал доктор физ.-мат. наук, профессор Расулов К.М.

Одобрена на заседании кафедры
«24» ноября 2025 г., протокол № 4

Заведующий кафедрой _____ К.М. Расулов

Смоленск
2025

1. Место дисциплины в структуре ОП

Настоящая дисциплина по выбору относится к той части учебного плана бакалавриата направления подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки: Математика. Информатика), которая формируется участниками образовательных отношений. В ней устанавливается, что интеграл типа Коши является основным математическим инструментом при решении основных линейных краевых задач современной теории аналитических функций комплексного переменного. При этом для решения рассматриваемых краевых задач используются теоретические основы практически всех основных математических дисциплин (математического анализа, алгебры, геометрии, теории функций действительного переменного, теории функций комплексного переменного, теории дифференциальных уравнений, уравнений математической физики), предусмотренных в учебном плане данного направления подготовки. Главное назначение данного спецкурса – научить студентов на основе свойств интеграла типа Коши построить теорию разрешимости двух основных линейных краевых задач комплексного анализа – задачи Римана и задачи Гильберта.

Поскольку краевые задачи Римана и Гильберта для аналитических функций находят многочисленные применения в различных прикладных науках (теория упругости, теория фильтрации, механика сплошной среды и др.), то настоящая дисциплина по выбору преследует две основные цели:

1) комплексное повторение всех ранее изученных студентами математических дисциплин (математического анализа, алгебры, геометрии, теории функций действительного переменного, теории функций комплексного переменного, теории дифференциальных уравнений, уравнений математической физики);

2) практическое применение полученных математических знаний при построении математических моделей сложных явлений, происходящих в окружающем нас мире.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
ПК-5. Способен использовать научные знания в предметной области (математика) в процессе формирования предметной компетенции обучающихся в рамках реализации основной общеобразовательной программы	Знать: основные законы естественнонаучных дисциплин, базовый аппарат математики, необходимые для осуществления профессиональной деятельности; Уметь: применять знания в области естественнонаучных и математических дисциплин для проведения теоретических и экспериментальных исследований в профессиональной деятельности; Владеть: методами комплексного анализа и моделирования, навыками в области естественнонаучного знания, позволяющими осуществлять исследования в профессиональной деятельности.

3. Содержание дисциплины

Раздел 1. Класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера. Интеграл типа Коши и его основные свойства. Аналитические функции комплексного переменного и их связь с гармоническими функциями двух действительных переменных. Гладкие, кусочно-гладкие и аналитические кривые на комплексной

плоскости и их свойства. Классы функций $C(L)$, $C^1(L)$ и $H_\mu(L)$. Понятие интеграла типа Коши и его основные свойства.

Раздел 2. Особый (сингулярный) интеграл с ядром Коши и его вычисление. Особый (сингулярный) интеграл с ядром Коши и его вычисление. Граничные свойства интеграла типа Коши и формулы Сохоцкого-Племели. Формулы обращения особого интеграла с ядром Коши.

Раздел 3. Основные теоремы комплексного анализа, используемые в теории краевых задач. Теорема об аналитическом продолжении, теорема Лиувилля, принцип симметрии, принцип аргумента. Понятие индекса непрерывной функции и его геометрический смысл. Методы вычисления индекса.

Раздел 4. Однородная краевая задача Римана для аналитических функций в односвязных областях и метод ее решения. Задача о скачке. Однородная задача Римана и метод ее решения в классах ограниченных (исчезающих) на бесконечности функций.

Раздел 5. Неоднородная краевая задача Римана для аналитических функций в односвязных областях и метод ее решения. Постановка неоднородной задачи Римана. Метод решения неоднородной задачи Римана в классах ограниченных (исчезающих) на бесконечности функций.

Раздел 6. Краевая задача Гильберта для аналитических функций и методы ее решения. Постановка краевой задачи Гильберта для аналитических функций в односвязных областях. Метод конформного отображения при решении задачи Гильберта. О решении задачи Гильберта в круговых областях. О решении краевых задач Дирихле и Неймана для гармонических функций.

4. Тематический план

№ п/п	Темы	Всего часов	Формы занятий		
			Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа
1.	Аналитические функции комплексного переменного и их связь с гармоническими функциями двух действительных переменных. Класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера. Интеграл типа Коши и его основные свойства. Особый (сингулярный) интеграл и его вычисление. Граничные свойства интеграла типа Коши и формулы Сохоцкого-Племели	18	2	8	8
2.	Основные теоремы комплексного анализа, используемые в теории краевых задач. Понятие индекса непрерывной функции.	6	2	2	2
3.	Однородная краевая задача	8	2	2	4

	Римана для аналитических функций в односвязных областях и метод ее решения				
4.	Неоднородная краевая задача Римана для аналитических функций в односвязных областях и метод ее решения	18	2	8	8
5.	Краевая задача Гильберта для аналитических функций и методы ее решения в круговых областях. Комплексные методы решения краевых задач Дирихле и Неймана для гармонических функций двух действительных переменных в единичном круге	18	2	8	8
6.	Обобщенная задача Римана с вырожденными ядрами	4		2	2
Итого:		72	10	30	32

5. Виды образовательной деятельности

Лекции

Лекция 1. Класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера. Интеграл типа Коши и его основные свойства. Аналитические функции комплексного переменного и их связь с гармоническими функциями двух действительных переменных. Классы функций $C(L)$, $C^1(L)$ и $H_\mu(L)$. Понятие интеграла типа Коши и его основные свойства. Особый (сингулярный) интеграл с ядром Коши его вычисление. Граничные свойства интеграла типа Коши и формулы Сохоцкого-Племели.

Лекция 2. Основные теоремы комплексного анализа, используемые в теории краевых задач. Индекс непрерывной функции. Теорема об аналитическом продолжении, теорема Лиувилля, принцип симметрии, принцип аргумента. Методы вычисления индекса непрерывной функции.

Лекция 3. Однородная краевая задача Римана для аналитических функций в односвязных областях и метод ее решения. Задача о скачке. Однородная задача Римана в классах ограниченных (исчезающих) на бесконечности функций.

Лекция 4. Неоднородная краевая задача Римана для аналитических функций в односвязных областях и метод ее решения. Постановка неоднородной задачи Римана. Метод решения неоднородной задачи Римана в классах ограниченных (исчезающих) на бесконечности функций.

Лекция 5. Краевая задача Гильберта для аналитических функций и методы ее решения. Постановка краевой задачи Гильберта для аналитических функций в односвязных областях. Метод конформного отображения при решении задачи Гильберта. О решении задачи Гильберта в круговых областях. Задача Дирихле и задача Неймана для гармонических функций.

Практические занятия

Практическое занятие №1.

Тема. Аналитические функции комплексного переменного и их связь с гармоническими функциями двух действительных переменных.

Контрольные вопросы и задания:

1. Какие подходы к определению аналитических функций комплексного

переменного Вы знаете?

2. Каковы необходимые и достаточные условия дифференцируемости функций комплексного переменного в точке.

3. Дайте определение гармонической функции двух действительных переменных в точке $M_0(x_0, y_0)$. Приведите примеры.

4. Когда функция $U(x, y)$ называется гармонической на множестве D ? Приведите примеры гармонических функций в единичном круге.

5. Верно ли утверждение: если функция $f(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ является аналитической в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, то функции $U(x, y), V(x, y)$ являются гармоническими в точке $M_0(x_0, y_0)$?

6. Всякая ли гармоническая в области D функция $U(x, y)$ является действительной (мнимой) частью аналитической в области D функции $f(z)$?

7. Задана гармоническая в односвязной области G функция $U(x, y)$. По какой формуле можно найти аналитическую в G функцию $f(z)$, для которой $\operatorname{Re} f(z) = U(x, y)$ ($\operatorname{Im} f(z) = U(x, y)$)?

Задания для аудиторной работы:

1. Проверьте, является ли следующие функции гармоническими в своей области определения:

а) $U(x, y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$; б) $\varphi(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$; в) $V(x, y) = x^3 + y^3$.

2. Существует ли аналитическая функция $f(z)$, у которой:

а) $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2$; б) $\operatorname{Im} f(z) = xy^2$; в) $\operatorname{Re} f(z) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$?

3. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по ее действительной части $u(x, y) = x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2}$.

4. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по ее мнимой части $v(x, y) = e^{-2y} \cos 2x$.

5. Найдите аналитическую функцию $f(z)$ такую, что $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2 + x$ и $f(0) = i$.

Задания для самостоятельной работы:

1. Проверьте, является ли следующие функции гармоническими в своей области определения:

а) $U(x, y) = e^x \sin y$; б) $\varphi(x, y) = x^3 - 3xy^2$; в) $V(x, y) = x^4 + y^4 + 1$.

2. Существует ли аналитическая функция $f(z)$, у которой:

а) $\operatorname{Re} f(z) = x^2 + y^2$; б) $\operatorname{Im} f(z) = 3xy^2 - x^3$; в) $\operatorname{Re} f(z) = \frac{x^2 - x + y^2}{x^2 + y^2}$?

3. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по ее действительной части $u(x, y) = e^y \cos x$.

4. Найдите аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ по ее мнимой части $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x - 2y$.

5. Найдите аналитическую функцию $f(z)$ такую, что $\operatorname{Re} f(z) = 3x^2y - y^3$ и $f(0) = 0$.

Практическое занятие №2.

Тема. Кривые на комплексной плоскости. Класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера

Контрольные вопросы и задания:

1. Какая кривая называется жордановой?
2. Дайте определение гладкой кривой на комплексной плоскости переменного $z = x + iy$.
3. Напишите параметрическое уравнение окружности с центром в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ и радиусом ρ .
4. В чем отличие гладкой кривой от аналитической кривой?
5. Какая связь между функцией Шварца аналитической кривой и конформными отображениями?
6. Дайте определение функции, удовлетворяющей условию Гельдера.
7. Каковы основные свойства функций, удовлетворяющих условию Гельдера?

Задания для аудиторной работы:

1. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, заданное соотношением:
 - а) $|z + 1 + i| = 2$;
 - б) $\operatorname{Im} \frac{z}{1+i} = 0$;
 - в) $|z + i| + |z - i| = 2$;
 - г) $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| = 2$;
 - д) $\operatorname{Re} z^2 = 1$;
 - е) $\operatorname{Arg}(2iz - 4) = 0$.
2. Задайте в комплексной форме следующие множества точек:
 - а) окружность с центром в точке $2 - i$ и радиусом 4;
 - б) прямую, проходящую через точку $1 + i$, образующую с действительной осью угол $\frac{\pi}{3}$;
 - в) гиперболу с фокусами $2i$ и -2 , эксцентриситетом $\varepsilon = 2$.
3. Изобразите на комплексной плоскости линию L , которая определяется уравнением $z(t) = x(t) + i \cdot y(t)$, если:
 - а) $z(t) = 2 - 3it, t \in \mathbb{R}$;
 - б) $z(t) = 2t + 1 + (t - 2)i, t \in [-1; 2]$;
 - в) $z(t) = 2 \sin t + i3 \cos t, 0 < t < \pi$.
4. Напишите уравнение линии L в комплексной параметрической форме, если:
 - а) L – парабола с фокусом $z = i$ и директрисой $\operatorname{Im} z = -1$;
 - б) L – верхняя дуга единичной окружности;
 - в) L – отрезок прямой, соединяющей точки $-1 + i$ и $2 - 3i$.
5. Напишите уравнение Шварца окружности с центром в точке $2 - i$ и радиусом 4.
6. Удовлетворяет ли функция $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ \frac{1}{\ln x}, & \text{если } x \in (0; 0,5] \end{cases}$ условию Гельдера на отрезке $[0; 0,5]$?
7. Верно ли соотношение: $C(L) \subset C^1(L) \subset H_\mu(L)$? Ответ обосновать.

Задания для самостоятельной работы:

1. Изобразите на комплексной плоскости множество точек, заданное соотношением:
 - а) $|z + 1 + i| = |iz + 1 + i|$;
 - б) $\operatorname{Re} \frac{z+1}{1-i} = 0$;
 - в) $|iz + 1| + |iz - 1| = 2$;
 - г) $|z - 2| + |z + i| = 4$.
2. Задайте в комплексной форме следующие множества точек:
 - а) окружность с центром в точке $1 + i$ и радиусом 2;
 - б) прямую, проходящую через точку $1 - i$, параллельную прямой $|z - 1| = |z - i|$;
 - в) эллипс с фокусами i и -2 , эксцентриситетом $\varepsilon = 0,5$.
3. Изобразите на комплексной плоскости линию L , которая определяется уравнением $z(t) = x(t) + i \cdot y(t)$, если:
 - а) $z(t) = 3t + 4it, t \in \mathbb{R}$;
 - б) $z(t) = 2t + 1 + (t + 1)^2 i, t \in [-1; 2]$;
 - в) $z(t) = e^t + ie^{-t}, -1 < t < 1$.
4. Напишите уравнение линии L в комплексной параметрической форме, если:

- а) L – эллипс с фокусами $z = i$, $z = -2i$ и большой полуосью $a = 4$;
 б) L – правая ветвь гиперболы $xy = 1$;
 в) L – отрезок прямой, соединяющей точки $1 + 2i$ и $3 - 4i$.
5. Напишите уравнение Шварца окружности с центром в точке $1 + i$ и радиусом 2.
6. Удовлетворяет ли функция $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ \frac{\sin x}{x}, & \text{если } x \in (0; 0,5] \end{cases}$ условию Гельдера на отрезке $[0; 0,5]$?

Практическое занятие №3

Тема. Интеграл типа Коши и его основные свойства

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение интеграла типа Коши с непрерывной плотностью по замкнутой простой кусочно-гладкой кривой.
2. В каких точках комплексной плоскости является аналитической функция, определяемая интегралом типа Коши?
3. Сформулируйте теорему о дифференцируемости интеграла типа Коши.
4. Верно ли утверждение: если $f(z)$ – аналитическая функция в некоторой области D , то $f'(z)$ также является аналитической в этой области? Ответ обоснуйте.
5. Докажите, что интеграл типа Коши обращается в нуль в точке $z = \infty$.
6. Докажите справедливость следующего утверждения: если функция $f(z)$ является аналитической в односвязной области D , то для любой замкнутой простой гладкой кривой $\gamma \subset D$ имеет место формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(t) dt}{t - z} = \begin{cases} f(z), & \text{если } z \in G^+, \\ \frac{1}{2} f(z), & \text{если } z \in \gamma, \\ 0, & \text{если } z \in D \setminus (G^+ \cup \gamma), \end{cases}$$

где G^+ – конечная область, ограниченная кривой γ .

Задания для аудиторной работы:

1. Докажите, что непрерывная на отрезке $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ функция

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{\ln x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

не удовлетворяет на этом отрезке условию Гельдера.

2. Пользуясь формулой для производных высших порядков аналитических функций, вычислите следующие интегралы:

а) $\oint_L \frac{\cos z}{z^2} dz$, где $L = \{z : |z| = 1\}$;

б) $\oint_L \frac{\sin z}{\left(z - \frac{\pi}{3}\right)^3} dz$, где $L = \{z : |z - i| = 4\}$.

3. Найдите первообразные функций:

а) e^{az} ;

б) $\sin az$;

в) $e^{az} \cos bz$, где a и b – отличные от нуля константы.

4. Вычислите следующие интегралы типа Коши:

а) $\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(\cos \tau - 3\tau^5 - \tau^{-6}) d\tau}{\tau - z}$, где $L = \{\tau : |\tau| = 1\}$;

$$\text{б) } \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(\tau e^\tau + 5\tau^{-2})d\tau}{\tau - z}, \text{ где } L = \{\tau : |\tau + i| = 5\}.$$

Задания для самостоятельной работы:

1. Приведите пример функции, удовлетворяющей на некотором множестве L условию Гельдера, но не дифференцируемой на этом множестве.

2. Пользуясь формулой для производных высших порядков аналитических функций, вычислите следующие интегралы:

$$\text{а) } \oint_L \frac{\cos z}{(z-i)^3} dz, \text{ где } L = \{z : |z-i| = 1\};$$

$$\text{б) } \oint_L \frac{e^z}{(z-1)^3} dz, \text{ где } L = \{z : |z-1| = 1\}.$$

3. Найдите первообразные следующих функций, где a – отличная от нуля константа:

$$\text{а) } \cos az;$$

$$\text{б) } ze^{az};$$

$$\text{в) } z \cos az.$$

4. Вычислите следующие интегралы типа Коши:

$$\text{а) } \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(16\tau - 2\tau^{-5})d\tau}{\tau - z}, \text{ где } L = \{\tau : |\tau| = 8\};$$

$$\text{б) } \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{(4e^\tau - 5\cos \tau + \tau^{-4})d\tau}{\tau - z}, \text{ где } L = \{\tau : |\tau - 2i| = 3\}.$$

Практическое занятие №4

Тема. Особый (сингулярный) интеграл и его вычисление. Граничные свойства интеграла типа Коши и формулы Сохоцкого-Племели

Контрольные вопросы и задания

1. Дайте определение главного значения сингулярного интеграла с ядром Коши и непрерывной (в смысле Гельдера) плотностью.

2. Какова асимптотика интеграла типа Коши вблизи конечных точек кривой интегрирования?

3. По каким формулам определяются граничные значения интеграла типа Коши с плотностью из класса Гельдера?

4. Докажите справедливость следующего утверждения: если Γ – замкнутый гладкий контур и $\varphi(\tau) \in H^{(m)}(\Gamma)$, $m \in \mathbb{N}$, то справедливы формулы:

$$\Phi^{(m)}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad z \notin \Gamma, \quad (2.1)$$

$$[\Phi^{(m)}(t)]^+ = [\Phi^+(t)]^{(m)} = \frac{1}{2} \varphi^{(m)}(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad t \in \Gamma, \quad (2.2)$$

$$[\Phi^{(m)}(t)]^- = [\Phi^-(t)]^{(m)} = -\frac{1}{2} \varphi^{(m)}(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi^{(m)}(\tau)}{\tau - z} d\tau, \quad t \in \Gamma. \quad (2.3)$$

5. Напишите формулы обращения сингулярного интегрального оператора с ядром Коши по замкнутой кривой.

Задачи и упражнения для аудиторной работы

1. Пусть $0 < a < c < b < +\infty$, а n – нечетное натуральное число. Показать, что особый интеграл $\int_a^b \frac{dx}{(x-c)^n}$, определенный как главное значение, существует.

2. Докажите, что всякую функцию $\varphi(t) \in H_\mu(L)$, где $L = \{t: |t|=1\}$, можно представить в виде $\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t)$, где $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ – граничные значения аналитических функций в областях $D^+ = \{z: |z| < 1\}$ и $D^- = \{z: |z| > 1\}$ соответственно.

3. Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым гладким контуром Γ , а $T^- = \bar{C}_z \setminus (T^+ \cup \Gamma)$. Показать, что для любой функции $\varphi(\tau) \in H(\Gamma)$ равенство

$$-\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = 0, \quad t \in \Gamma, \quad (2.4)$$

служит *необходимым* и *достаточным* условием для того, чтобы функция $\varphi(t)$ являлась граничным значением аналитической в области T^+ функции $\Phi^+(z)$.

4. Пусть $\gamma = \{t: |t| = \rho\}$, $\rho > 0$. Вычислите значение сингулярного интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(\tau^2 - \tau^{-1})d\tau}{\tau - t}.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Пусть $0 < a < c < b < +\infty$, а n – нечетное натуральное число и функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условию $|\varphi(x) - \varphi(c)| \leq A|x - c|^\lambda$, где $n - 1 < \lambda < n$. Показать, что при указанных условиях особый интеграл $\int_a^b \frac{\varphi(x)}{(x-c)^n} dx$, определенный как главное значение, существует.

2. Докажите, что для всякой функции $\varphi(t) \in H_\mu(L)$, где $L = \{t: |t|=1\}$, сингулярный интеграл Коши с плотностью $\varphi(t)$ можно представить в виде суммы $\Phi^+(t) + \Phi^-(t)$, где $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ – граничные значения аналитических функций в областях $D^+ = \{z: |z| < 1\}$ и $D^- = \{z: |z| > 1\}$ соответственно.

3. Пусть T^+ – конечная односвязная область на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, ограниченная простым замкнутым гладким контуром Γ , а $T^- = \bar{C}_z \setminus (T^+ \cup \Gamma)$. Показать, что для любой функции $\varphi(\tau) \in H(\Gamma)$ равенство

$$\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau = 0, \quad t \in \Gamma, \quad (2.5)$$

служит *необходимым* и *достаточным* условием для того, чтобы функция $\varphi(t)$ являлась граничным значением аналитической в области T^- функции $\Phi^-(z)$, исчезающей на бесконечности.

4. Пусть $\gamma = \{t: |t| = \rho\}$, $\rho > 0$. Вычислите значение сингулярного интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(\sin \tau - \tau^{-3}) d\tau}{\tau - t}.$$

Практическое занятие №5.

Тема. Основные теоремы комплексного анализа, используемые в теории краевых задач.

Контрольные вопросы и задания:

1. Сформулируйте теорему об аналитическом продолжении, теорему Лиувилля, принцип симметрии и принцип аргумента.
2. Сколькими способами можно аналитически продолжить функцию с заданного множества, имеющего предельную точку?
3. В чем состоит суть теоремы Руше для аналитических функций?
4. Сформулируйте основную теорему высшей алгебры и докажите ее.

Задания для аудиторной работы:

1. Докажите, что функция $F(z) = \frac{1}{1-i} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-i}{z-1} \right)^n$ является аналитическим продолжением функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$.

2. Может ли функция $f(z) = i \sin 2z$ быть ограниченной по модулю на комплексной плоскости? Ответ обоснуйте.

3. Найдите число нулей функции $f(z) = e^z + 3z^4 - 1$ в единичном круге.

4. Пользуясь теоремой Руше, найдите число корней приведенных уравнений в областях, указанных в скобках:

а) $z^4 - 3z + 1 = 0$ ($|z| < 1$); б) $z^7 - 5z^4 + z^2 - 2 = 0$ ($|z| < 1$).

5. Для аналитической в единичном круге функции $\Phi^+(z) = \frac{2z^4 - 5z + 2}{z^5 - 32}$ постройте функцию $\Phi^-(z)$, аналитическую вне единичного круга и такую, что $\Phi^-(t) = \overline{\Phi^+(t)}$, $t \in L = \{t: |t| = 1\}$. Определите порядок найденной функции $\Phi^-(z)$ в точке $z = \infty$.

Задания для самостоятельной работы:

1. Докажите, что функция $F(z) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{4^n}$ является аналитическим продолжением функции $f(z) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z+1)^n}{3^n}$.

2. Может ли функция $f(z) = \cos z + 5i$ быть ограниченной по модулю на комплексной плоскости? Ответ обоснуйте.

3. Найдите число нулей функции $f(z) = z^8 - 7z^5 - 3z^4 + 1$ в единичном круге.

4. Пользуясь теоремой Руше, найдите число корней приведенных уравнений в областях, указанных в скобках:

а) $2z^4 - 5z + 2 = 0$ ($|z| < 1$); б) $z^8 - 4z^5 + z^2 - 1 = 0$ ($|z| < 1$).

5. Для аналитической в единичном круге функции $\Phi^+(z) = \frac{5iz^5 - 3z^4 + 2i}{z^3 + 27}$ постройте функцию $\Phi^-(z)$, аналитическую вне единичного круга и такую, что $\Phi^-(t) = \overline{\Phi^+(t)}$, $t \in L = \{t : |t| = 1\}$. Определите порядок найденной функции $\Phi^-(z)$ в точке $z = \infty$.

Практическое занятие №6.

Тема. Постановка краевой задачи Римана (задачи сопряжения) для аналитических функций комплексного переменного. Метод решения однородной задачи Римана в односвязных областях.

Контрольные вопросы и задания:

1. Дайте определение индекса Коши непрерывной функции по замкнутому простому гладкому контуру.
2. Сформулируйте основные свойства индекса непрерывных функций.
3. По какой формуле вычисляется индекс функции, являющейся граничным значением аналитической функции (мероморфной функции)?
4. Сформулируйте задачу Римана (задачу сопряжения) для аналитических функций в случае гельдеровых коэффициентов и гладкого контура.
5. Какова структура общего решения неоднородной задачи Римана?
6. Как решается задача о скачке для аналитических функций?
7. Дайте определение канонической функции однородной задачи Римана.
8. Какова формула факторизации коэффициента однородной задачи Римана?
9. В чем состоит основная логическая схема метода решения однородной задачи Римана для аналитических функций?
10. Сколько линейно независимых (над полем $\mathbb{C}$) решений имеет однородная задача Римана в классе ограниченных на бесконечности функций, если ее индекс равен 5?
11. Сформулируйте теорему Ф.Д. Гахова о разрешимости однородной задачи Римана в классе исчезающих на бесконечности функций.

Задания для аудиторной работы:

1. Пусть $L = \{t : |t| = 1\}$. Вычислите индексы следующих функций по контуру L :

$$\text{а) } w = \frac{t^3}{t^2 + 4i}; \quad \text{б) } w = \frac{\operatorname{Re} t}{\operatorname{Im} t}; \quad \text{в) } w = \frac{t + 2i}{t - 2i}; \quad \text{г) } w = 5\overline{t^2}.$$

2. Найдите решение следующей задачи о скачке в классе ограниченных на бесконечности функций:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = 2e^t + \frac{1}{t^5}, \quad t \in L,$$

$$\text{где } L = \{t : |t| = 1\}.$$

3. Решите следующие однородные задачи Римана в классе функций, ограниченных на бесконечности:

$$\text{а) } \Phi^+(t) = \frac{5+t}{t} \Phi^-(t), \quad t \in L; \quad \text{б) } \Phi^+(t) = \frac{t(t-2i)}{t^2+3} \Phi^-(t), \quad t \in L,$$

$$\text{где } L = \{t : |t| = 1\}.$$

4. Решите следующие однородные задачи Римана в классе функций, исчезающих на бесконечности:

$$\text{а) } \Phi^+(t) = \frac{t^3}{t^3 + 9} \Phi^-(t), \quad t \in L; \quad \text{б) } \Phi^+(t) = \frac{t^2(t-4i)}{2t-1} \Phi^-(t), \quad t \in L,$$

где $L = \{t : |t| = 1\}$.

Задания для самостоятельной работы:

1. Пусть $L = \{t : |t| = 1\}$. Вычислите индексы следующих функций по контуру L :

$$\text{а) } w = \frac{3t^2}{t^2 - 4i}; \quad \text{б) } w = \operatorname{Re} t + \operatorname{Im} t; \quad \text{в) } w = \frac{t^4 + 16}{t}; \quad \text{г) } w = \frac{2i}{t^4}.$$

2. Найдите решение следующей задачи о скачке в классе ограниченных на бесконечности функций:

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = 3i \sin t - \frac{\sqrt{2}}{t^2}, \quad t \in L,$$

$$\text{где } L = \{t : |t| = 1\}.$$

3. Решите следующие однородные задачи Римана в классе функций, ограниченных на бесконечности:

$$\text{а) } \Phi^+(t) = \frac{t}{t-3} \Phi^-(t), \quad t \in L; \quad \text{б) } \Phi^+(t) = \frac{t^3(t-5i)}{t^2-2} \Phi^-(t), \quad t \in L,$$

$$\text{где } L = \{t : |t| = 1\}.$$

4. Решите следующие однородные задачи Римана в классе функций, исчезающих на бесконечности:

$$\text{а) } \Phi^+(t) = \frac{t+2}{t^2-9} \Phi^-(t), \quad t \in L; \quad \text{б) } \Phi^+(t) = \frac{t^8}{4t-1} \Phi^-(t), \quad t \in L,$$

$$\text{где } L = \{t : |t| = 1\}.$$

Практическое занятие №7.

Тема. Метод решения неоднородной краевой задачи Римана для кусочно аналитических функций, ограниченных на бесконечности

Контрольные вопросы и задания:

1. Сформулируйте постановку неоднородной задачи Римана (задачи сопряжения) для аналитических функций в случае гильбертовых коэффициентов и гладкого контура.
2. Что называется индексом неоднородной задачи Римана для аналитических функций?
3. Какова структура общего решения неоднородной задачи Римана?
4. В чем состоит основная логическая схема метода решения неоднородной задачи Римана для аналитических функций?
5. Сформулируйте теорему Ф.Д. Гахова о разрешимости неоднородной задачи Римана в классе ограниченных на бесконечности функций.
6. Изложите суть «упрощенного» метода решения неоднородной задачи Римана в односвязных областях в случае, когда коэффициент краевого условия есть рациональная функция, не имеющая нулей и полюсов на контуре.

Задания для аудиторной работы:

1. Пусть $L = \{t : |t| = 1\}$. Решите следующие краевые задачи Римана в классе кусочно аналитических функций, ограниченных на бесконечности:

а) $\Phi^+(t) = \frac{5+t}{t} \Phi^-(t) + t^3 - \frac{\sqrt{3}}{t}, \quad t \in L;$

б) $\Phi^+(t) = \frac{t(t-2i)}{t^2+3} \Phi^-(t) - 21t^5 + \frac{7}{t^5}, \quad t \in L;$

в) $\Phi^+(t) = \frac{3}{t^3} \Phi^-(t) + t^6 - \frac{11}{t^{10}}, \quad t \in L.$

2. Требуется решить неоднородную задачу Римана в классе функций, ограниченных на бесконечности, если ее краевое условие имеет вид

$$\Phi^+(t) = \frac{t}{t^2-1} \Phi^-(t) + \frac{t^3-t^2+1}{t^3-t}, \quad t \in L,$$

где L - произвольный простой замкнутый гладкий контур следующего вида:

а) контур L содержит внутри себя точку $z_0 = 0$ и не содержит точек $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$;

б) контур L содержит внутри себя точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$, и не содержит точки $z_0 = 0$.

Задания для самостоятельной работы:

1. Пусть $L = \{t : |t| = 1\}$. Решите следующие краевые задачи Римана в классе кусочно аналитических функций, ограниченных на бесконечности:

а) $\Phi^+(t) = t^2 \Phi^-(t) + t^{10} - \frac{1}{t}, \quad t \in L;$

б) $\Phi^+(t) = \frac{(t-5i)}{t^2} \Phi^-(t) - 2t^4 + \frac{8}{t^5}, \quad t \in L;$

в) $\Phi^+(t) = \frac{t+3}{t^5} \Phi^-(t) + t^2 - \frac{2}{t^4}, \quad t \in L.$

Практическое занятие №8.

Тема. Метод решения неоднородной краевой задачи Римана для кусочно аналитических функций, исчезающих на бесконечности

Контрольные вопросы и задания:

1. Сформулируйте постановку неоднородной задачи Римана (задачи сопряжения) для кусочно аналитических функций, исчезающих на бесконечности.
2. Какова структура общего решения неоднородной задачи Римана?
2. В чем состоит основная логическая схема метода решения неоднородной задачи Римана для кусочно аналитических функций, исчезающих на бесконечности?
3. Сформулируйте теорему Ф.Д. Гахова о разрешимости неоднородной задачи Римана в классе исчезающих на бесконечности функций.

Задания для аудиторной работы:

1. Решите следующие неоднородные задачи Римана в классе функций, исчезающих на бесконечности:

$$\text{а) } \Phi^+(t) = \frac{t^3}{t^3+9} \Phi^-(t) + 4t - \frac{6}{t^2}, \quad t \in L;$$

$$\text{б) } \Phi^+(t) = \frac{t^2(t-4i)}{2t-1} \Phi^-(t) + 8t^3, \quad t \in L;$$

где $L = \{t : |t| = 1\}$.

2. Требуется решить неоднородную задачу Римана в классе функций, исчезающих на бесконечности, если ее краевое условие имеет вид

$$\Phi^+(t) = \frac{t}{t^2-1} \Phi^-(t) + \frac{t^3-t^2+1}{t^3-t}, \quad t \in L,$$

где L - произвольный простой замкнутый гладкий контур следующего вида:

а) контур L содержит внутри себя точку $z_0 = 0$ и не содержит точек $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$;

б) контур L содержит внутри себя точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$, и не содержит точки $z_0 = 0$.

Задания для самостоятельной работы:

1. Решите следующие неоднородные задачи Римана в классе функций, исчезающих на бесконечности:

$$\text{а) } \Phi^+(t) = \frac{t}{t^2+9} \Phi^-(t) + t^3 - \frac{1}{t^2}, \quad t \in L;$$

$$\text{б) } \Phi^+(t) = \frac{t^3(t-8)}{4t-1} \Phi^-(t) + 3t^3 - \frac{\sqrt{2}}{t^2}, \quad t \in L,$$

где $L = \{t : |t| = 1\}$.

Практическое занятие №9.

Тема. Краевая задача Римана для аналитических функций в исключительном случае

Контрольные вопросы и задания:

1. Сформулируйте постановку краевой задачи Римана для аналитических функций в исключительном случае.
2. Как определяются каноническая функция неоднородной краевой задачи Римана в исключительном случае?
3. Сформулируйте теорему Л.А. Чикина о разрешимости неоднородной задачи Римана в исключительном случае?

Задания для аудиторной работы: задачи №№ 5, 7, 9 к главе II книги [5] из списка рекомендованной литературы.

Задания для самостоятельной работы: задачи №№ 4, 6, 8 к главе II книги [5] из списка рекомендованной литературы.

Практическое занятие №10.

Тема. Характеристическое сингулярное интегральное уравнение и его связь с краевой задачей Римана для аналитических функций. Уравнения Фредгольма 2-го рода.

Контрольные вопросы и задания:

1. Дайте определение сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши.
2. Какое сингулярное уравнение называется характеристическим?

3. Какая связь между краевой задачей Римана и характеристическим сингулярным интегральным уравнением?
4. Изложите логическую схему решения характеристического сингулярного интегрального уравнения.
5. Какое интегральное уравнение называется уравнением Фредгольма второго рода?
6. Сформулируйте основные теоремы о разрешимости интегральных уравнений Фредгольма второго рода.

Задания для аудиторной работы: задачи №№ 1, 3, 5 к главе III книги [5] из списка рекомендованной литературы.

Задания для самостоятельной работы: задачи №№ 2, 4, 6 к главе III книги [5] из списка рекомендованной литературы.

Практическое занятие №11.

Тема. Постановка краевой задачи Гильберта для аналитических функций. Метод Н.И. Мусхелишвили решения однородной краевой задачи Гильберта в круговых областях.

Контрольные вопросы и задания:

1. Сформулируйте постановку краевой задачи Гильберта для аналитических функций в односвязных областях.
2. Каким способом краевая задача Гильберта в произвольных односвязных областях можно свести к эквивалентной задаче Гильберта в круговых областях?
3. В чем состоит суть метода Н.И. Мусхелишвили решения внутренней однородной задачи Гильберта в круговых областях?
4. Изложите алгоритм решения внешней однородной задачи Гильберта для единичного круга методом Н.И. Мусхелишвили.

Задания для аудиторной работы:

1. Требуется найти все аналитические в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функции $\Phi^+(z)$, непрерывные в $T^+ \cup \Gamma$ и удовлетворяющие на $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$ краевому условию

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{t} \Phi^+(t) \right\} = 0.$$

2. Требуется найти аналитические в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функции $\Phi^+(z)$, непрерывные в $T^+ \cup \Gamma$ и удовлетворяющие на $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$ краевому условию

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{t}{t - 2i} \Phi^+(t) \right\} = 0.$$

3. Пусть $L = \{w : \operatorname{Im} w = 0\}$ и $C_+ = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$. Найдите аналитическую в полуплоскости C_+ функцию $\Phi^+(w)$, непрерывную в $C_+ \cup L$ и удовлетворяющую на L краевому условию

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{\tau - i}{\tau + i} \Phi^+(\tau) \right\} = 0.$$

4. Пусть D^+ – конечная односвязная область на плоскости C_w комплексного переменного $w = \xi + i\eta$, ограниченная *улиткой Паскаля* L , т.е. замкнутой кривой, задаваемой параметрическим уравнением вида

$$w = \rho(e^{i\theta} + me^{i2\theta}),$$

где $\rho > 0$, $0 < m < \frac{1}{2}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Требуется найти все аналитические в области D^+ функции, непрерывные в $D^+ \cup L$ и удовлетворяющие на L краевому условию

$$\operatorname{Re}\{\overline{h(\tau)}\Phi^+(\tau)\} = 0,$$

где $h(\tau) = a(\tau) + ib(\tau)$, $q(\tau)$ – заданные на L функции класса $H(L)$, причем $h(\tau) \neq 0$.

5. Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$ и $T^- = \bar{C}_z \setminus (T^+ \cup \Gamma)$. Найдите все аналитические в T^- функции $\Phi^-(z)$, непрерывные в $T^- \cup \Gamma$ и удовлетворяющие на Γ краевому условию

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{1}{t} \cdot \Phi^-(t)\right\} = 0.$$

Задания для самостоятельной работы:

1. Разрешима ли в единичном круге $T^+ = \{(r, \varphi) : 0 < r < 1, -\pi \leq \varphi \leq \pi\}$ однородная задача Гильберта с краевым условием:

$$[5 \cos \varphi + \sin 2\varphi] \cdot U(\cos \varphi, \sin \varphi) - [5 \sin \varphi - \cos 2\varphi] \cdot V(\cos \varphi, \sin \varphi) = 0?$$

2. Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$ и $T^- = \bar{C}_z \setminus (T^+ \cup \Gamma)$. Найдите все аналитические в T^- функции $\Phi^-(z)$, непрерывные в $T^- \cup \Gamma$ и удовлетворяющие на Γ краевому условию

$$\operatorname{Re}\{t^{-2} \cdot \Phi^-(t)\} = 0.$$

3. Требуется найти аналитические в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функции $\Phi^+(z)$, непрерывные в $T^+ \cup \Gamma$ и удовлетворяющие на $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$ краевому условию

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{t}{t-3i} \Phi^+(t)\right\} = 0.$$

4. Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$ и $T^- = \bar{C}_z \setminus (T^+ \cup \Gamma)$. Найдите все аналитические в T^- функции $\Phi^-(z)$, непрерывные в $T^- \cup \Gamma$ и удовлетворяющие на Γ краевому условию

$$\operatorname{Re}\{t \cdot \Phi^-(t)\} = 0.$$

Практическое занятие №12.

Тема. Метод Н.И. Мусхелишвили решения неоднородной краевой задачи Гильберта для аналитических функций в круговых областях.

Контрольные вопросы и задания:

1. Сформулируйте постановку неоднородной краевой задачи Гильберта для аналитических функций в односвязных областях.
2. В чем состоит суть метода Н.И. Мусхелишвили решения неоднородной внутренней задачи Гильберта в круговых областях?
4. Изложите алгоритм решения внешней неоднородной задачи Гильберта для единичного круга методом Н.И. Мусхелишвили.

Задания для аудиторной работы:

1. Требуется найти все аналитические в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функции $\Phi^+(z)$, непрерывные в $T^+ \cup \Gamma$ и удовлетворяющие на $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$ краевому условию

$$\operatorname{Re}\{\Phi^+(t)\} = \frac{1}{2i} \left(t - \frac{1}{t} \right).$$

2. Требуется найти аналитические в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функции $\Phi^+(z)$, непрерывные в $T^+ \cup \Gamma$ и удовлетворяющие на $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$ краевому условию

$$\operatorname{Re}\{t^2 \Phi^+(t)\} = t^3 + \frac{1}{t^3}.$$

3. Решите в единичном круге задачу Гильберта с краевым условием:

$$\left(\cos 2s - \cos s + \frac{1}{4} \right) \cdot U(s) + (\sin 2s - \sin s) \cdot V(s) = \left(\frac{5}{4} - \cos s \right)^2 (\cos 2s + h_1 \cos s + h_2),$$

где h_1 и h_2 – некоторые числа.

4. Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$ и $T^- = \bar{C}_z \setminus (T^+ \cup \Gamma)$. Найдите все аналитические в T^- функции $\Phi^-(z)$, непрерывные в $T^- \cup \Gamma$ и удовлетворяющие на Γ краевому условию

$$\operatorname{Re}\left\{ \frac{1}{t} \cdot \Phi^-(t) \right\} = \frac{1}{2i} \left(t^2 - \frac{1}{t^2} \right).$$

Задания для самостоятельной работы:

1. Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$ и $T^- = \bar{C}_z \setminus (T^+ \cup \Gamma)$. Найдите все аналитические в T^+ функции $\Phi^+(z)$, непрерывные в $T^+ \cup \Gamma$ и удовлетворяющие на Γ краевому условию

$$\operatorname{Re}\{\Phi^-(t)\} = \frac{1}{2} \left(t^4 + \frac{1}{t^4} \right).$$

2. Требуется найти аналитические в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функции $\Phi^+(z)$, непрерывные в $T^+ \cup \Gamma$ и удовлетворяющие на $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$ краевому условию

$$\operatorname{Re}\left\{ \frac{t^2}{t + 2i} \Phi^+(t) \right\} = 5.$$

3. Решите в единичном круге задачу Гильберта с краевым условием:

$$\left(\cos 2s - \cos s + \frac{1}{4} \right) \cdot U(s) - (\sin 2s - \sin s) \cdot V(s) = (\cos 2s + h_1 \cos s + h_2),$$

где h_1 и h_2 – некоторые числа.

4. Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$ и $T^- = \bar{C}_z \setminus (T^+ \cup \Gamma)$. Найдите все аналитические в T^- функции $\Phi^-(z)$, непрерывные в $T^- \cup \Gamma$ и удовлетворяющие на Γ краевому условию

$$\operatorname{Re}\{t \cdot \Phi^-(t)\} = \frac{1}{2i} \left(t - \frac{1}{t} \right).$$

Практическое занятие №13.

Тема. О решении краевой задачи Гильберта для аналитических функций в односвязных областях методом регуляризующего множителя.

Контрольные вопросы и задания:

1. Сформулируйте постановку краевой задачи **A** для аналитических функций в односвязных областях.
2. Как определяется регуляризующий множитель для функций, удовлетворяющих условию Гельдера?
3. Каковы основные типы регуляризующих множителей?
4. Изложите алгоритм решения однородной (неоднородной) внутренней задачи Гильберта методом регуляризующего множителя.
5. Каковы основные формулы для общего решения задачи Гильберта в единичном круге?

Задания для аудиторной работы: задачи №№ 5, 7, 9, 13 к главе IV книги [5] из списка рекомендованной литературы.

Задания для самостоятельной работы: задачи №№ 2, 4, 6, 8 к главе IV книги [5] из списка рекомендованной литературы.

Практическое занятие №14.

Тема. Комплексные аналитические методы решения краевых задач Дирихле и Неймана для гармонических функций в единичном круге

Контрольные вопросы и задания:

1. Дайте определение гармонической функции двух действительных переменных в точке $M_0(x_0, y_0)$. Приведите примеры.
2. Когда функция $U(x, y)$ называется гармонической на множестве D ?
3. Какая связь между гармоническими функциями двух действительных переменных и аналитическими функциями комплексного переменного?
4. Сформулируйте постановку внутренней краевой задачи Дирихле (задачи Неймана) для гармонических функций в односвязных областях.
5. Может ли задача Дирихле (задачи Неймана) для гармонических функций иметь более одного решения?
6. Сформулируйте постановку краевой задачи Шварца для аналитических функций комплексного переменного в круговых областях.
7. Какая связь между краевыми задачами Дирихле и Шварца?
8. Какие методы решения краевых задач Дирихле и Неймана в круговых областях Вы знаете?
9. Укажите некоторые практические приложения краевых задач Дирихле и Неймана для гармонических функций.

Задания для аудиторной работы:

1. Проверьте, является ли следующие функции гармоническими в своей области определения:

а) $U(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$; б) $\varphi(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$; в) $V(x, y) = x^3 + y^3$.

2. Существует ли аналитическая функция $f(z)$, у которой:

а) $\operatorname{Re} f(z) = x^2 - y^2$; б) $\operatorname{Im} f(z) = xy^2$; в) $\operatorname{Re} f(z) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$?

3. Напишите краевое условие $u(x, y)|_{\Gamma} = y^2 - x^2 - \frac{1}{2}y$, где $\Gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = \rho^2\}$, в комплексной форме.
4. Найдите гармоническую в единичном круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функцию $U(x, y)$, если известно, что ее граничные значения на $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$ удовлетворяют условию: $U|_{\Gamma} = 5 + t^2 + \frac{1}{t^2}$.
5. Внутри круга $D^+ = \{(x, y) : x^2 + y^2 < \rho^2\}$ найдите гармоническую функцию $u(x, y)$, принимающую на границе $\Gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = \rho^2\}$ следующие значения: $u|_{\Gamma} = x^2 + 2xy - 4y^2$.
6. Внутри единичного круга $0 \leq r \leq 1$ найдите гармоническую функцию $u(r, \varphi)$, принимающую на границе Γ данного круга значения: $u|_{\Gamma} = \pi^2 - \varphi^2$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.
7. Внутри круга $D^+ = \{(x, y) : x^2 + y^2 < \rho^2\}$ найдите гармоническую функцию $u(x, y)$, принимающую на границе Γ данного круга следующие значения: $u|_{\Gamma} = A \sin^2 \varphi + B \cos^2 \varphi$, где A и B - некоторые постоянные, а $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.
8. Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$. Выясните, при каком значении параметра a задача Неймана с краевым условием
- $$\frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 3a + t^3 + \frac{1}{t^3}, \quad t \in \Gamma,$$
- где $\frac{\partial}{\partial n}$ - производная по внешней нормали к Γ , будет иметь решение. Решите задачу при найденном значении a .

Задания для самостоятельной работы:

1. Требуется найти аналитические в круге $T^+ = \{z : |z| < 1\}$ функции $\Phi^+(z)$, непрерывные в $T^+ \cup \Gamma$ и удовлетворяющие на $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$ краевому условию $\operatorname{Re}\{\Phi^+(t)\} = t + \frac{1}{t} + 1$.
2. Напишите краевое условие $u(x, y)|_{\Gamma} = 2x^2 - 4xy$, где $\Gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = \rho^2\}$, в комплексной форме.
3. Внутри круга $0 \leq r \leq \rho$ найдите гармоническую функцию $u(r, \varphi)$, принимающую на границе Γ данного круга значения: $u|_{\Gamma} = \sin 2\varphi$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.
4. Внутри круга $D^+ = \{(x, y) : x^2 + y^2 < \rho^2\}$ найдите гармоническую функцию $u(x, y)$, принимающую на границе $\Gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = \rho^2\}$ следующие значения: $u|_{\Gamma} = y^2 - x^2 - \frac{1}{2}y$.
5. Пусть $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, $\Gamma = \{t : |t| = 1\}$. Выясните, при каком значении параметра b задача Неймана с краевым условием

$$\frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = 10b + t^2 + \frac{1}{t^2}, \quad t \in \Gamma,$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к Γ , будет иметь решение. Решите задачу при найденном значении b .

Практическое занятие №15.

Тема. Обобщенная краевая задача Римана для аналитических функций с вырожденными ядрами

Контрольные вопросы и задания:

1. Сформулируйте постановку обобщенной краевой задачи Римана для аналитических функций.
2. Каким методом можно решить обобщенную краевую задачу Римана в односвязных областях?
3. Изложите логическую схему решения обобщенной краевой задачи Римана с вырожденными ядрами.
4. Каковы условия нетеровости обобщенной краевой задачи Римана для аналитических функций?

Задания для аудиторной работы:

1. Требуется найти все исчезающие на бесконечности кусочно аналитические функции $\Phi(z) = \{\Phi^+(z), \Phi^-(z)\}$ с линией скачков $L = \{t : |t| = 1\}$, удовлетворяющие на L соотношению

$$\Phi^+(t) - t\Phi^-(t) - \left(\frac{1}{2} - t\right) \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\Phi^+(\tau) d\tau}{\tau} = 3t^3 + \frac{1}{2}t^2.$$

2. Требуется найти все ограниченные на бесконечности кусочно аналитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ с линией скачков $L = \{t : |t| = 1\}$, удовлетворяющие на L соотношению

$$F^+(t) - \frac{1}{t}F^-(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L (1 - t\tau)F^+(\tau) d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t^2}{\tau} F^-(\tau) d\tau = t^2 + \frac{1}{2t}.$$

Задания для самостоятельной работы:

1. Требуется найти все кусочно аналитические функции $\varphi(z) = \{\varphi^+(z), \varphi^-(z)\}$ с линией скачков $L = \{t : |t| = 1\}$, имеющие на бесконечности нуль второго порядка и удовлетворяющие на L условию

$$\varphi^+(t) - t^2\varphi^-(t) + \frac{(1 - t^{-1})}{4\pi i} \int_L \frac{\varphi^+(\tau) d\tau}{\tau^2} = t - \frac{1}{t^3}.$$

2. Требуется найти все ограниченные на бесконечности кусочно аналитические функции $F(z) = \{F^+(z), F^-(z)\}$ с линией скачков $L = \{t : |t| = 1\}$, удовлетворяющие на L соотношению

$$F^+(t) - \frac{1}{t^2}F^-(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(1 - \frac{1}{t}\right) \cdot \tau \cdot F^+(\tau) d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{t^2 + 1}{\tau} F^-(\tau) d\tau = 5 + \frac{1}{t^3}.$$

Самостоятельная работа

Задания для самостоятельной работы приводятся в планах практических занятий.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Текущая аттестация осуществляется на каждом практическом занятии в процессе фронтального опроса, выполнения заданий для аудиторной работы, в процессе проверки домашней самостоятельной работы.

Оценочные средства

I. Контрольные вопросы для проверки теоретической подготовки к практическому занятию.

Перечень вопросов приводится в планах практических занятий (см. п.5).

Критерии оценивания ответа на теоретический вопрос

Показатель	Количество баллов
1) Полнота и глубина изложения ответа (усвоенные теории, понятия, факты)	1
2) Логика изложения материала	1
3) Примеры использования описанных явлений, теорий и устройств на практике	1
4) Использование при подготовке ответа на вопрос дополнительных источников информации	1
5) Грамотность и связность ответа	1
Итоговая (суммарная) оценка	Max - 5

II. Выполнение заданий для аудиторной работы

Перечень задач для аудиторной работы к каждому практическому занятию приведен в планах практических занятий (см. п.5)

Критерии оценивания выполнения заданий для аудиторной работы

Показатель	Количество баллов
1) Приведена краткая форма условия задания	1
2) Проведен анализ условия задания	1
3) Представлены определения, теоремы, законы и формулы, необходимые для решения	1
4) Представлена необходимая последовательность рассуждений и/или вычислений, ведущих к ответу	1
5) Приведен ответ на вопрос задачи, проведен анализ полученного ответа	1
Итоговая (суммарная) оценка	Max - 5

III. Задания для самостоятельной работы.

Перечень заданий для самостоятельной работы приводится в планах практических занятий (см. п.5).

Критерии оценивания выполнения заданий для самостоятельной работы

Показатель	Количество баллов
1) Приведена краткая форма условия задания	1

2) Проведен анализ условия задания	1
3) Представлены определения, теоремы, законы и формулы, необходимые для решения	1
4) Представлена необходимая последовательность рассуждений и/или вычислений, ведущих к ответу	1
5) Приведен ответ на вопрос задачи, проведен анализ полученного ответа	1
Итоговая (суммарная) оценка	Max - 5

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация осуществляется посредством проведения зачёта. Зачёт выставляется по итогам практических занятий, а также на основе представленных обучающимися материалов самостоятельной работы в соответствии с Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации. Студенты, не выполнившие все задания для самостоятельной работы, предложенные в планах практических занятий, для получения зачёта выполняют письменное зачетное задание, образец которого приводится ниже.

Оценочные средства

I. Задания для итогового (зачетного) занятия.

Образец зачетного задания

Примечание. Во всех заданиях значение параметра k равно порядковому номеру студента в учебном журнале

1. Задача Римана. Пусть T^+ - единичный круг на комплексной плоскости переменного $z = x + iy$, т.е. $T^+ = \{z : |z| < 1\}$, а $T^- = \bar{C} \setminus (T^+ \cup L)$, где $L = \{t : |t| = 1\}$. Требуется найти две аналитические функции: $\Phi^+(z)$ - аналитическую в T^+ и $\Phi^-(z)$ - аналитическую в T^- ($\Phi^-(\infty) = k$), если их граничные значения на L удовлетворяют следующему условию:

$$\Phi^+(t) = t^{10-k} \Phi^-(t) + kt^k + (10-k)t^{-k}.$$

2. Задача Гильберта. Пусть T^+ - единичный круг на комплексной плоскости переменного $z = x + iy$, а $L = \{t : |t| = 1\}$ - граница этого круга. Требуется найти аналитическую в T^+ функцию $\Phi^+(z)$, если ее граничные значения на L удовлетворяют следующему условию:

$$\operatorname{Re}\{t^{-1}\Phi^+(t)\} = \frac{1}{2i^k} (t^{10-k} + (-1)^k t^{k-10}), \text{ где } i - \text{мнимая единица.}$$

Критерии оценивания ответа на зачёте

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Правильное решение задачи 1	2,5 балла
2	Правильное решение задачи 2	2,5 балла

(*) Возможна градация в 0,25, 0,5 и 0,75 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Зачтено	3-5
2	Не зачтено	2 и менее

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Основная литература

1. *Далингер, В. А.* Комплексный анализ : учебник для вузов / В. А. Далингер, С. Д. Симонженков. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 143 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08399-6. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563389> (дата обращения: 25.11.2025).

2. *Привалов, И. И.* Введение в теорию функций комплексного переменного : учебник для вузов / И. И. Привалов. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 402 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01450-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/561162> (дата обращения: 25.11.2025).

3. *Расулов К.М.* Методы решения линейных краевых задач комплексного анализа: учебное пособие. – Смоленск: «Принт-Экспресс», 2019.

4. *Расулов К.М.* Метод сопряжения аналитических функций и некоторые его приложения. – Смоленск: СмолГУ, 2013.

7.2. Дополнительная литература

5. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – М., Наука, 1977.

6. *Зверович Э.И.* Линейные краевые задачи теории аналитических функций. – Минск: БГУ, 2015.

7. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. М., Наука, 1968.

8. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. - М., Наука, 1966.

9. *Расулов К.М.* Краевые задачи для полианалитических функций и некоторые их приложения. – Смоленск: СПГУ, 1998.

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

- Система дистанционного обучения Смоленского государственного университета <http://cdo.smolgu.ru>
- Электронно-библиотечная система университета <http://biblioteka.smolgu.ru>
- Национальный открытый университет <http://www.intuit.ru>
- Образовательный математический сайт <http://exponenta.ru>
- Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru>

8. Материально-техническое обеспечение

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используется интерактивная доска; проектор. Осуществляется поиск информации в WWW-пространстве; работа с Web-страницами и ресурсами сети Интернет.

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине в университете имеется следующая необходимая инструментальная база: учебные аудитории для проведения практических занятий; компьютерный класс, оборудованный персональными ЭВМ с необходимым математическим софтом и выходом в Интернет для проведения практических занятий; кабинеты, оборудованные проекторами и электронными досками для проведения лекционных занятий. Имеется кабинет ксерокопирования и кафедральный принтер для подготовки индивидуальных дидактических материалов.

9. Программное обеспечение

Для осуществления образовательного процесса используется Информационно-вычислительный центр физико-математического факультета (Положение о Центре утверждено приказом ректора №01-66 от 28.09.2015 г.), включающий компьютерные

классы, оснащённые выходом в интернет и системой компьютерной математики Wolfram Mathematica в текущей модификации.

Программное обеспечение: Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), Лицензия 66920993 от 24.05.2016, обновление раз в три года; Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), Лицензия 66975477 от 03.06.2016, обновление раз в три года; Dr. Web Server/Desktop Security Suite (Антивирус) Лицензия EE4E-QN5S-6FG2-N76B (Ежегодное обновление); Kaspersky Endpoint Security для бизнеса – Стандартный, Лицензия 1FB6151216081242, ежегодное обновление.

Электронные библиотечные системы и электронная информационно-образовательная среда: электронная библиотечная система «ЭБС ЮРАЙТ», Договор № 3074 от 15.11.2017, ежегодное обновление; СДО Русский Moodle 3KL Norm с техническим обслуживанием, Акт на передачу прав №УТДЮ0001785 от 06.12.2016, ежегодное обновление.