

Документ подписан простой электронной подписью  
Информация о владельце:  
ФИО: Артеменков Михаил Николаевич  
Должность: Ректор  
Дата подписания: 07.10.2026 12:00:13  
Уникальный программный ключ:  
a63b74166e8f4fc17bd1e0462725f79e393bdf9

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»  
Проректор по учебно-методической работе  
\_\_\_\_\_  
Ю.А. Устименко  
«15» июня 2023 г.

**Рабочая программа дисциплины**  
**Б1.О.13.02 ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

Направление подготовки: **44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)**

Направленность (профиль): **Математика, информатика**

Форма обучения: очная

Курс – 3

Семестр – 5

Всего зачетных единиц – 4, часов – 144

Форма отчетности: экзамен – 5 семестр

Программу разработал  
кандидат физико-математических наук, доцент Хартов А. А.

Одобрена на заседании кафедры  
«8» июня 2023 г., протокол № 10

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_ К.М. Расулов

Смоленск  
2023

## 1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Теория функций действительного переменного» относится к обязательной части и изучается в 5 семестре 3 курса бакалавриата. Она является вспомогательной для изучения таких дисциплин, как «Теория вероятностей и математическая статистика», «Численные методы». Для успешного освоения данной дисциплины необходимы компетенции студентов, сформированные при изучении курса «Математический анализ». Основными целями освоения дисциплины являются:

- обобщение основных понятий математического анализа в абстрактных метрических пространствах;
- знакомство с различными теориями обобщения основных понятий математического анализа;
- приобретение навыков использования абстрактного аппарата математического анализа;
- развитие математической эрудиции, воспитание математической культуры.

Изучение курса основано на традиционных методах высшей школы, тесной взаимосвязи со смежными курсами, а также на использовании современной учебной, методической литературы, информационных и образовательных технологий.

## 2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

| Компетенция                                                                                          | Индикаторы достижения                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>ОПК-8.</b> Способен осуществлять педагогическую деятельность на основе специальных научных знаний | <b>Знать:</b> объект, предмет, основные категории, принципы, закономерности, структуру педагогической науки; сущность, структуру, динамику целостного педагогического процесса; состояние и тенденции развития отечественных и международных педагогических и психологических исследований; методологию педагогического исследования; особенности, логику, закономерности, формы, методы и средства процесса обучения и воспитания; основы психологии личности, основные теоретические подходы к пониманию феномена личности; познавательные процессы, их свойства, закономерности и роль в интеллектуальной и творческой деятельности; общетеоретические основы методики преподавания предмета в объеме, необходимом для осуществления педагогической деятельности; строение и функции организма, основные закономерности развития человека; общие закономерности и возрастные особенности функционирования основных систем организма учащихся; гигиенические требования к организации образовательного процесса и гигиену учебного процесса; инструментальные средства информационных технологий.<br><b>Уметь:</b> применять теоретические знания в решении педагогических задач; планировать, проектировать и осуществлять педагогический процесс в различных типах образовательных учреждений; определять структуру и методологию проведения педагогического исследования; адекватно целям выстраивать учебный и воспитательный процесс, выбирая соответствующие формы, методы и средства его осуществления; использовать в педагогической деятельности и межличностном взаимодействии современные |

|                                                                                                                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                                                                                                                                                                                                         | <p>достижения психологической науки; учитывать возрастные физиологические особенности учащихся в педагогическом процессе; использовать информационные технологии для решения профессиональных задач.</p> <p><b>Владеть:</b> категориальным аппаратом педагогической науки; навыками решения педагогических задач; способами планирования и осуществления образовательного процесса; способами проведения педагогического эксперимента; формами и методами осуществления учебной и воспитательной работы; приемами и методами психодиагностики личности, изучения особенностей профессиональной деятельности; навыками организации педагогической деятельности с позиций сохранения здоровья; методами профилактики нарушений физического развития и повышения адаптационных резервов организма; методами оказания первой доврачебной помощи; методами применения информационно-коммуникационных технологий в образовательном процессе.</p>                                                            |
| <p><b>ПК-5.</b> Способен использовать научные знания в предметной области (математика) в процессе формирования предметной компетенции обучающихся в рамках реализации основной общеобразовательной программы</p>        | <p><b>Знать:</b> современное состояние и перспективы развития математики как учебной дисциплины, направления развития школьного математического образования, теоретические основы обучения математике, принципы построения методической системы обучения математике, основные линии школьного курса математики, их структуру, содержание и роль, этапы формирования математических понятий, методические подходы к изучению основных тем школьного курса математики;</p> <p><b>Уметь:</b> анализировать и интерпретировать содержание математических понятий, теорем, задач, разрабатывать фрагменты уроков, организовывать образовательный процесс обучения математике, конструировать методику введения понятий, изучения теорем, решения задач;</p> <p><b>Владеть:</b> основными приемами организации деятельности школьников по изучению математики, навыками разработки методики изучения частных вопросов обучения математике, исследовательскими методами в профессиональной деятельности.</p> |
| <p><b>ПК-7</b> Способен математически корректно ставить естественнонаучные задачи и классические задачи математики, строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата</p> | <p><b>Знать:</b> базовые принципы постановки естественнонаучных задач и классических задач математики, определения основных понятий и доказательства теорем по основным разделам математики;</p> <p><b>Уметь:</b> решать основные типы математических задач, доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть его следствия;</p> <p><b>Владеть:</b> первичными навыками применения математического аппарата к решению конкретных задач из различных областей прикладной математики и информатики.</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |

### 3. Содержание дисциплины

**1. Мощность.** Понятие равномощности. Существование бесконечных неравномощных множеств. Мощность. Признаки равномощности. Сравнение мощностей. Признаки счетной мощности. Минимальность счетной мощности. Счетность множества рациональных чисел. Прямое произведение счетных множеств. Алгебраические числа, их счетность. Мощность континуума. Существование трансцендентных чисел, их мощность. Объединение и прямое произведение множеств мощности континуумов. Континуальность  $\mathbf{R}^n$ . Существование множеств сколь угодно высокой мощности. Понятие о проблеме континуума.

**2. Метрические пространства.** Понятие метрического пространства. Шары. Ограниченные множества. Линейные нормированные пространства. Предгильбертовы пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Сходимость в метрических пространствах. Граница. Открытые и замкнутые множества. Фундаментальные последовательности и их свойства. Понятие полного пространства. Признаки полноты и неполноты пространства. Примеры полных и неполных пространств. Гильбертовы пространства. Неподвижная точка отображения. Сжимающие отображения. Принцип сжимающих отображений.

**3. Интеграл.** Ступенчатые множества. Аппроксимация множества ступенчатыми. Мера Лебега. Свойства меры (обзорно). Критерий Лебега интегрируемости по Риману (без доказательства). Интеграл Лебега. Интегрируемость функции Дирихле. Связь между интегралами Римана и Лебега. Свойства интеграла Лебега (обзорно). Эквивалентные функции. Распространение интеграла Лебега на неограниченные функции с помощью срезов функции. Суммируемые функции. Функциональное пространство  $L^2$ , его полнота.

**4. Ряды Фурье.** Ряд в предгильбертовом пространстве. Ортогональные системы. Теорема Пифагора. Ортонормированные системы. Ряд Фурье. Критерий Стеклова. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве. Критерий полноты.

#### 4. Тематический план

| № п/п        | Разделы и темы           | Всего часов | Формы занятий |          |                      |                      |                        |
|--------------|--------------------------|-------------|---------------|----------|----------------------|----------------------|------------------------|
|              |                          |             | лекции        | семинары | практические занятия | лабораторные занятия | самостоятельная работа |
| 1            | Мощность                 | 39          | 12            | -        | 12                   | -                    | 15                     |
| 2            | Метрические пространства | 33          | 8             | -        | 10                   | -                    | 15                     |
| 3            | Интеграл                 | 27          | 8             | -        | 6                    | -                    | 13                     |
| 4            | Ряды Фурье               | 18          | 4             | -        | 4                    | -                    | 10                     |
| 7            | Экзамен                  | 27          | -             | -        | -                    | -                    | 27                     |
| <b>Итого</b> |                          | <b>144</b>  | <b>32</b>     | -        | <b>32</b>            | -                    | <b>80</b>              |

#### 5. Виды образовательной деятельности<sup>1</sup>

##### Занятия лекционного типа

**Лекции 1-2.** Равномощные множества. Краткая история теории множеств, биография Кантора. Понятие равномощности. Примеры. Существование бесконечных неравномощных множеств. Мощность. Признаки равномощности. Сравнение мощностей.

**Лекции 3-4.** Счетные мощности. Признаки счетной мощности. Минимальность счетной мощности. Счетность множества рациональных чисел. Прямое произведение счетных множеств. Алгебраические числа, их счетность.

**Лекции 5-6.** Мощность континуума. Существование трансцендентных чисел, их мощность. Объединение и прямое произведение множеств мощности континуум.

<sup>1</sup>Содержание данного раздела может быть представлено в электронной информационно-образовательной среде СмолГУ или в опубликованном учебно-методическом пособии.

Континуальность  $R^n$ . Существование множеств сколь угодно высокой мощности. Понятие о проблеме континуума.

**Лекции 7-9.** Метрические пространства. Понятие метрического пространства. Шары. Ограниченные множества. Линейные нормированные пространства. Скалярное произведение. Предгильбертовы пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Сходимость в метрических пространствах. Граница. Открытые и замкнутые множества.

**Лекция 10.** Полные пространства. Фундаментальные последовательности и их свойства. Понятие полного пространства. Признаки полноты и неполноты пространства. Примеры полных и неполных пространств. Гильбертовы пространства. Принцип сжимающих отображений.

**Лекция 11.** Мера. Ступенчатые линейные множества. Аппроксимация множества ступенчатыми. Мера Лебега. Свойства меры (обзорно). Критерий Лебега интегрируемости по Риману (без доказательства).

**Лекции 12-14.** Интеграл Лебега. Определение интеграла. Интегрируемость функции Дирихле. Связь между интегралами Римана и Лебега. Свойства интеграла Лебега (обзорно). Эквивалентные функции. Распространение интеграла Лебега на неограниченные функции с помощью срезов функции. Суммируемые функции. Функциональное пространство  $L^2$ , его полнота (без доказательства).

**Лекции 15-16.** Ряды Фурье. Ряд в предгильбертовом пространстве. Ортогональные системы. Теорема Пифагора. Ортонормированные системы. Ряд Фурье. Критерий Стеклова. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве. Критерий полноты.

### **Занятия семинарского типа**

#### **Практические занятия № 1-3. равномошнне множества. Признаки равномошности**

*Задания для аудиторной работы:* 1.1 - 1.10

*Задания для самостоятельной работы:* 1.11 - 1.15

#### **Практические занятия №4-6. Счетные множества и множества мошности континуум**

*Задания для аудиторной работы:* 1.16 - 1.25

*Задания для самостоятельной работы:* 1.26 - 1.33

#### **Практические занятия №7-8. Метрика, норма, скалярное произведение**

*Задания для аудиторной работы:* 2.1 - 2.25

*Задания для самостоятельной работы:* 2.26 - 2.35

#### **Практические занятия №9-11. Предел и граница. Принцип сжимающих отображений**

*Задания для аудиторной работы:* 3.1 - 3.15, 4.1 - 4.30

*Задания для самостоятельной работы:* 3.16 - 3.21, 4.31 - 4.41

#### **Практические занятия №12-14. Мера и интеграл Лебега**

*Задания для аудиторной работы:* 5.1 - 5.19

*Задания для самостоятельной работы:* 5.20 - 5.26

#### **Практические занятия №15-16. Ряды Фурье**

*Задания для аудиторной работы:* 6.1 - 6.2; 6.4 - 6.8

*Задания для самостоятельной работы:* 6.9 - 6.12

Указаны номера задач из учебно-методического пособия [1] дополнительной литературы (см. раздел 10).

### **Самостоятельная работа**

Задания для самостоятельной работы приводятся в планах практических занятий.

## 6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

### 6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Текущая аттестация осуществляется на каждом практическом занятии в процессе выполнения заданий для аудиторной работы, в процессе проверки домашней самостоятельной работы. Проведение текущего контроля осуществляется также посредством проведения аудиторных контрольных работ.

#### Оценочные средства

##### I. Задания для самостоятельной работы.

Перечень практических заданий для самостоятельной работы приводится в планах практических занятий.

##### II. Контрольные работы по дисциплине.

*Образец контрольной работы:*

1. Задать биекцию промежутка  $A = [0; 1]$  в промежуток  $B = (0; 1)$ .
2. Найти мощность множества всех линейных функций.
3. Проверить, можно ли назвать нормой вектора  $a = (x; y)$  число  $x^2 + |y|$ .
4. Является ли сжимающим отображение  $f(x; y; z) = (x; y; x^2 + y^2 + z^2)$  пространства  $R_1^3$  в себя? Найти его неподвижные точки.
5. Доказать с помощью теоремы Банаха, что последовательность  $x_n = \frac{x_{n-1}}{2+x_{n-1}}$  ( $x_0 = 1$ ) имеет предел и найти его.

#### Критерии оценивания контрольной работы

##### 1. Нормы оценивания работы

| № п/п | Структурная часть контрольной работы | Количество баллов (*) |
|-------|--------------------------------------|-----------------------|
| 1     | Правильно решенное задание           | 1 балл                |

(\*) Возможна градация в 0,25 балла.

.Шкала оценивания работы:

| п/п | Оценка              | Количество баллов |
|-----|---------------------|-------------------|
| 1   | Отлично             | 4,75-5            |
| 2   | Хорошо              | 3,75-4,5          |
| 3   | Удовлетворительно   | 3-3,5             |
| 4   | Неудовлетворительно | менее 3           |

### 6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация осуществляется проведением экзамена.

Знать определения всех понятий и формулировки теорем, приведенных в методическом пособии [1] дополнительной литературы, указанном в разделе 10. Знать доказательства теорем из [1]: 1.4-1.11, 1.13, 1.14, 2.1, 2.4, 2.6, 2.7, 3.1, 3.4, 4.2, 4.4, 4.5, 4.7, 4.8, 4.9, 4.10, 5.4, 5.7, 5.12, 6.1, 6.3, 6.5, 6.7

Уметь решать задачи типа 1.2-1.5, 1.8, 1.9, 1.13, 1.14, 1.16, 1.17, 1.18, 1.21, 1.23, 1.29, 1.33, 2.1, 2.3, 2.10-2.14, 2.17-2.24, 3.2, 3.4, 3.8, 3.9, 3.17, 4.1-4.3, 4.5, 4.9, 4.17, 4.20, 4.26, 4.27-4.30, 4.32-4.35, 5.1, 5.4, 5.5, 5.8, 5.9, 5.10, 5.13, 5.19 из пособия [1] дополнительной литературы, указанном в разделе 10.

Образец экзаменационного билета

1. Докажите теорему о неравномоности множества натуральных чисел и множества действительных чисел.
2. Сформулируйте теорему Банаха. Дайте определения *всех* понятий, входящих в ее формулировку.

3. Докажите, что формула  $\|a\| = |x| + |y| + |z|$  задает ли норму вектора  $a = (x; y; z)$  и найдите расстояние между точками  $a = (1; -1; 2)$  и  $b = (-1; 2; 1)$ .

4. Пусть  $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ , где  $E_n = \left\{ (x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} \right\}$ . Найдите:

- а) множество  $\partial E$  граничных точек  $E$ ;
- б) мощность множества  $\partial E$ .

5. Докажите, что функция  $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } x - \text{алгебраическое,} \\ x^2, & \text{если } x - \text{трансцендентное} \end{cases}$  интегрируема по Лебегу

на отрезке  $[0; \sqrt{2}]$  и найдите интеграл  $\int_0^{\sqrt{2}} f(x) dx$ .

### Критерии оценивания ответа на экзамене

#### 1. Нормы оценивания

| № п/п | Структурная часть                                         | Количество баллов (*) |
|-------|-----------------------------------------------------------|-----------------------|
| 1     | Правильный ответ на вопрос или правильное решение задания | 1 балл                |

(\*) Возможна градация в 0,25 балла.

#### 2. Шкала оценивания:

| п/п | Оценка              | Количество баллов |
|-----|---------------------|-------------------|
| 1   | Отлично             | 4,75-5            |
| 2   | Хорошо              | 3,75-4,5          |
| 3   | Удовлетворительно   | 3-3,5             |
| 4   | Неудовлетворительно | менее 3           |

## 7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

### 7.1. Основная литература

1. Ильин В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 1: учебник для академического бакалавриата / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 324 с. [электронный ресурс: <https://urait.ru/bcode/452409>].
2. Ильин В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 2: учебник для академического бакалавриата / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 315 с. [электронный ресурс: <https://urait.ru/bcode/437204>].
3. Ильин В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 2: учебник для академического бакалавриата / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2019. — 324 с. [электронный ресурс: <https://urait.ru>].
4. Далингер, В. А. Теория функций действительного переменного : учебник и практикум для вузов / В. А. Далингер, С. Д. Симонженков. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 242 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-

8999-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/471145>

## **7.2. Дополнительная литература**

1. Виленкин Н.Я. Математический анализ: мощность, метрика, интеграл / Н.Я. Виленкин, М.Б. Балк, В.А. Петров. – М., 1980.
2. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М., 1989.
3. Петров В.А. Элементы функционального анализа в задачах / В.А. Петров, Н.Я. Виленкин, М.И. Граев. – М., 1978.
4. Балк М.Б. Метрические пространства / М.Б. Балк, В.А. Петров, А.М. Балк. – Смоленск, 1996.
5. Леонтьева Т.А., Задачи по теории функций действительного переменного / Т.А. Леонтьева, В.С. Панфёров, В.С. Серов. – М., 1997.
6. Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах / Н.Я. Виленкин. – М., 1969.
7. Мир математики: в 40 т. Т.18: Энрике Грасиан. Открытие без границ. Бесконечность в математике. – М., 2014.

## **7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»**

- Система дистанционного обучения Смоленского государственного университета <http://cdo.smolgu.ru>
- Электронно-библиотечная система университета <http://biblioteka.smolgu.ru>
- Национальный открытый университет <http://www.intuit.ru>
- Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru>

## **8. Материально-техническое обеспечение**

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине может использоваться обычная или интерактивная доска; проектор; система компьютерной математики Mathematica. Осуществляется поиск информации в WWW-пространстве; работа с Web-страницами и ресурсами сети Интернет.

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине в университете имеется следующая необходимая инструментальная база: учебные аудитории для проведения практических занятий; компьютерный класс, оборудованный персональными ЭВМ с необходимым математическим софтом и выходом в Интернет для проведения лабораторных занятий; кабинеты, оборудованные проекторами и электронными досками для проведения лекционных занятий. Имеется кабинет ксерокопирования и кафедральный принтер для подготовки индивидуальных дидактических карточек, контрольных и экзаменационных материалов. Используются портреты великих математиков, необходимые чертёжные инструменты.

## **9. Программное обеспечение**

Для осуществления образовательного процесса по дисциплине используется Информационно-вычислительный центр физико-математического факультета (Положение о Центре утверждено приказом ректора №01-66 от 28.09.2015 г.).

При осуществлении образовательного процесса по дисциплине используются информационные технологии обработки данных с помощью прикладных программных продуктов Microsoft Excel, Microsoft PowerPoint. Осуществляется поиск информации в WWW-пространстве; работа с Web-страницами и социальными ресурсами сети Интернет, а также используются различные системы компьютерной математики.