

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Артеменков Михаил Николаевич

Должность: Ректор

Дата подписания: 07.10.2026 12:14:44

Уникальный программный ключ:

a63b74166e8f4fc17bd1e0462725f79e39b

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»
Кафедра прикладной математики и информатики

«Утверждаю»

Проректор по учебно-методической работе

_____ Ю.А. Устименко

«__» _____ 2023 г.

Рабочая программа дисциплины Б1.В.01.03 Основания геометрии

Направление подготовки: **44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)**

Направленность (профиль): **Физика. Математика.**

Форма обучения: очная

Курс – 3

Семестр – 6

Всего зачетных единиц – 3, часов – 108

Форма отчетности: экзамен – 6 семестр

Программу разработал: доцент Усачев В.И.

Одобрена на заседании кафедры

«07» июня 2023 г., протокол № 12

Заведующий кафедрой _____ С.В. Козлов

Смоленск
2023

1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Основания геометрии» относится к дисциплинам части, формируемой участниками образовательных отношений, программы бакалавриата по направлению 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки). Она изучается в шестом семестре и является одной из основных дисциплин, т.к., в основном, завершает геометрическую часть математического блока дисциплин.

При изучении данной дисциплины необходимы компетенции студентов, сформированные при изучении таких дисциплин, как: «Математический анализ», «Аналитическая геометрия», «Линейная алгебра» и др.

Изучение курса основано на традиционных методах высшей школы, а также тесной взаимосвязи со смежными курсами.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
ПК-5. Способен использовать научные знания в предметной области (математика) в процессе формирования предметной компетенции обучающихся в рамках реализации основной общеобразовательной программы	Знать: современное состояние и перспективы развития математики как учебной дисциплины, направления развития школьного математического образования, теоретические основы обучения математике, принципы построения методической системы обучения математике, основные линии школьного курса математики, их структуру, содержание и роль, этапы формирования математических понятий, методические подходы к изучению основных тем школьного курса математики; Уметь: анализировать и интерпретировать содержание математических понятий, теорем, задач, разрабатывать фрагменты уроков, организовывать образовательный процесс обучения математике, конструировать методику введения понятий, изучения теорем, решения задач; Владеть: основными приемами организации деятельности школьников по изучению математики, навыками разработки методики изучения частных вопросов обучения математике, исследовательскими методами в профессиональной деятельности.
ПК-7 Способен математически корректно ставить естественнонаучные задачи и классические задачи математики, строго доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть следствия полученного результата	Знать: базовые принципы постановки естественнонаучных задач и классических задач математики, определения основных понятий и доказательства теорем по основным разделам математики; Уметь: решать основные типы математических задач, доказать утверждение, сформулировать результат, увидеть его следствия; Владеть: первичными навыками применения математического аппарата к решению конкретных задач из различных областей прикладной математики и информатики.

3. Содержание дисциплины

1. Геометрия до Евклида. «Начала» Евклида. Проблема V постулата. Геометрия Вавилоня и Египта, геометрия древней Греции (Фалес Милетский, школа Пифагора, Платон, Аристотель и др.). «Начала» Евклида. Критика системы Евклида. V постулат Евклида. Эквиваленты пятого постулата. Карл Гаусс, Янош Боляи, Н.И. Лобачевский и открытие неевклидовой геометрии.

2. Система аксиом Гильберта. Обзор следствий из аксиом. Аксиомы принадлежности и порядка. Следствие из первых двух групп аксиом. Аксиомы конгруэнтности, непрерывности, аксиом групп 1-V. Понятие об абсолютной геометрии.

3. Аксиома параллельности Лобачевского. Параллельные по Лобачевскому. Признак параллельности прямых. Теорема о существовании параллельных прямых. Условия параллельности. Треугольники и четырехугольники на плоскости Лобачевского.

4. Понятие о математической структуре. Примеры математических структур. Интерпретация системы аксиом. Изоморфизм структур.

5. Требования, предъявляемые к системе аксиом. Непротиворечивость, полнота (в узком и широком смысле), независимость. Способы проверки этих требований.

6. Система аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства. Непротиворечивость этой системы аксиом. Полнота системы аксиом Вейля.

7. Системы аксиом школьного курса геометрии. Анализ аксиоматик в школьных учебниках А.В. Погорелова, Л.С. Атанасяна и др., А.Д. Александрова.

8. Длина отрезка. Теорема существования и единственности.

9. Площадь многоугольника. Теорема существования и единственности. Равновеликие и равносторонние треугольники. Теорема Бальи-Гервина. Объем многогранника в евклидовом пространстве.

10. Неевклидовы геометрии. Гиперболическая геометрия Лобачевского, эллиптическая геометрия Римана, элементы сферической геометрии.

4. Тематический план

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий		
			лекции	практические занятия	самостоятельная работа
1	Геометрия до Евклида. «Начала» Евклида. Проблема V постулата.	7	1	2	4
2	Система аксиом Гильберта. Обзор следствий из аксиом.	14	2	4	8
3	Аксиома параллельности Лобачевского. Параллельные по Лобачевскому.	12	2	4	6
4	Понятие о математической структуре.	3	–	1	2
5	Требования, предъявляемые к системе аксиом.	4	1	1	2
6	Система аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства.	10	2	2	6
7	Системы аксиом школьного курса геометрии.	11	1	4	6
8	Длина отрезка.	4	–	2	2
9	Площадь многоугольника. Объем многоугольника.	4	–	2	2
10	Неевклидовы геометрии.	12	3	4	5
11	Экзамен	27			27
ИТОГО		108	12	26	43+27

5. Виды образовательной деятельности

Занятия лекционного типа

Лекция 1. Геометрия до Евклида. Система аксиом Гильберта. Геометрия Вавилоня и Египта, геометрия древней Греции (Фалес Милетский, школа Пифагора, Платон, Аристотель). «Начала» Евклида. Критика системы Евклида. Пятый постулат Евклида. Проблема пятого постулата. Эквиваленты пятого постулата. Ложные доказательства пятого постулата. Карл Гаусс, Янош Боляи, Н.И. Лобачевский и открытие неевклидовой геометрии. Аксиомы принадлежности и порядка. Следствия из первых двух групп аксиом.

Лекция 2. Обзор следствий из аксиом Гильберта. Аксиома параллельности Лобачевского. Аксиомы конгруэнтности, непрерывности, аксиома параллельности. Обзор следствий из аксиом групп I-V. Понятие об абсолютной геометрии. Аксиома параллельности Лобачевского. Определение параллельных по Лобачевскому. Признак параллельности прямых. Теорема о существовании параллельных прямых. Угол параллельности.

Лекция 3. Аксиома параллельности Лобачевского. Требования, предъявляемые к системе аксиом. Треугольники и четырехугольники на плоскости Лобачевского. Теорема 1.: Сумма углов треугольника меньше 2π . Теорема 2.: Сумма углов треугольника не постоянна. Теорема 3.: Сумма углов четырехугольника меньше 4π . Теорема 4.: Если три угла одного треугольника соответственно равны трем углам другого треугольника, то эти треугольники равны. Взаимное расположение двух прямых на плоскости Лобачевского. Пересекающиеся, параллельные, расходящиеся прямые. Теорема: Две прямые, имеющие общий перпендикуляр, расходятся. Окружность, эквидистанта, орицикл; их свойства. Требования, предъявляемые к системам аксиом. Непротиворечивость, полнота, независимость. Способы проверки этих требований. Доказательство логической непротиворечивости геометрии Лобачевского.

Лекция 4. Система аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства. Непротиворечивость этой системы аксиом. Полнота аксиом Вейля. Проверка выполнимости аксиом Гильберта в теории, основанной на системе аксиом Вейля. Понятие об эквивалентности систем аксиом Гильберта и Вейля.

Лекция 5. Об аксиомах школьного курса геометрии. Неевклидовы геометрии. Анализ аксиоматик в школьных учебниках А.В. Погорелова «Геометрия 7-11», Л.С. Атанасяна и др. «Геометрия 7-11», А.Д. Александрова и др. «Геометрия 7-11». Гиперболическая геометрия Лобачевского.

Лекция 6. Неевклидовы геометрии. Элементы сферической геометрии. Эллиптическая геометрия Римана. Площадь двугольника, площадь треугольника, теоремы синусов и косинусов и др.

Занятия семинарского типа (практические занятия)

Практическое занятие № 1. Исторический очерк обоснования геометрии. Проблема V постулата.

Цель: познакомить с историей развития геометрии (греческий период)

Занятие начинается с входного контроля. Каждому студенту необходимо знать доказательство эквивалентности аксиомы параллельности и V постулата, а также одно ложное доказательство пятого постулата (на выбор).

Занятие проходит в форме представления и обсуждения докладов-презентаций.

Самостоятельная работа:

[2] Основная литература, задачи
9.41; 9.42; 9.43; 9.44; 9.45; 9.47.

Практическое занятия № 2-3. Система аксиом Гильберта.

Цель: изучить аксиоматику Гильберта

Занятия начинаются с входного контроля. Каждому студенту необходимо знать структуру системы аксиом Гильберта. Уметь доказывать некоторые следствия системы аксиом Гильберта (после 1 и 2 групп аксиом - к занятию №2; после 3 группы аксиом - к занятию №3)

Занятие проходит в форме представления и обсуждения докладов-презентаций.

Самостоятельная работа:

[2] Основная литература, задачи
9.1; 9.2; 9.3; 9.4; 9.5; 9.6
9.8; 9.9; 9.10; 9.11; 9.12; 9.13; 9.14; 9.15
9.17; 9.18; 9.19; 9.20; 9.25; 9.26; 9.28
9.32; 9.33; 9.34; 9.35; 9.37;
9.38; 9.39; 9.40; 9.41

Практическое занятие № 4-5. Элементы геометрии Лобачевского.

Цель: познакомить с геометрией, отличной от евклидовой.

Занятие начинается с входного контроля. Каждому студенту необходимо знать доказательство следующих теорем:

1. О существовании бесконечного множества прямых, проходящих через данную точку и не пересекающих данную прямую (в плоскости, определенной данной точкой и прямой)
2. Признак параллельности прямых.
3. Теорема о существовании параллельных прямых.

Занятие проходит в форме представления и обсуждения докладов-презентаций.

Самостоятельная работа:

[2] Основная литература, задачи
9.51; 9.53; 9.54; 9.55; 9.57; 9.59
9.61; 9.64; 9.66; 9.67; 9.70
9.71; 9.72; 9.74

Практическое занятие № 6-7. Требования, предъявляемые к системе аксиом.

Цель: изучить общие вопросы аксиоматики

К занятию студентам необходимо изучить требования, предъявляемые к системе аксиом (непротиворечивость, независимость, полнота) и способы их проверки.

Занятие проходит в форме представления и обсуждения докладов-презентаций.

Самостоятельная работа:

[2] Основная литература, задачи
10.1; 10.2; 10.3; 10.8; 10.12; 10.17

Практическое занятие № 8-9. Система аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства

Цель: познакомить с векторной аксиоматикой построения евклидовой геометрии.

Каждому студенту необходимо знать систему аксиом Вейля, доказательство эквивалентности аксиоматик Гильберта и Вейля (на примере I группы аксиом Гильберта).

Занятие проходит в форме представления и обсуждения докладов-презентаций.

Самостоятельная работа:

[2] Основная литература, задачи
10.26; 10.27; 10.28; 10.29; 10.30; 10.31; 10.32; 10.33; 10.34; 10.35; 10.36

Практическое занятие №10-11. Система аксиом школьного курса геометрии.

Цель: сопоставить аксиоматическое построение основных школьных учебников геометрии.

Занятие проходит в форме деловой игры.

Обсуждаются теоретические, методические основы построения школьного курса по Погорелову А.В., по Атанасянцу Л.С., по Александрову А.Д. (возможны варианты).

Самостоятельная работа:

Используя систему аксиом А.Д. Александрова выполнить следующие задания:

1. Докажите, что две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются (Указание: предположите противное и рассмотрите наложение, совмещающее равные прямые углы).

2. Докажите, что если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (Указание: рассмотрите наложение, совмещающее равные углы).

3. Докажите, что через точку, не лежащую на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой и притом только один (Указание: обозначим точку А, отметим на прямой две точки В и С. Рассмотрим угол АВС и равный ему в другой полуплоскости. Далее накладываем один угол на другой. Единственность доказываем от противного).

4. Докажите, что если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (Указание: рассмотрите наложение, совмещающее равные стороны).

5. Докажите, что если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (Указание: рассмотрите наложение, совмещающее одну пару равных сторон и отображающее второй треугольник в другую полуплоскость).

6. Докажите, что если биссектрисы углов АВС и CBD перпендикулярны, то точки А, В и D лежат на одной прямой (Указание: докажите, что угол ABD развернутый).

7. Даны две пересекающиеся прямые а и b и точка А, не лежащая на этих прямых. Через точку А проведены прямые m и n так, что m перпендикулярно а, n перпендикулярно b. Докажите, что прямые m и n не совпадают (Указание: предположите противное и воспользуйтесь результатом задачи 1).

8. Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медианам, проведенным к третьим сторонам (Указание: продлите медианы на отрезки, равные им, и рассмотрите полученные треугольники).

9. Докажите, что если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую (Указание: докажите от противного).

10. Докажите, что внутренние накрест лежащие углы при пересечении двух параллельных прямых и секущей равны (Указание: проведите отрезок через середину отрезка секущей).

Практическое занятие №12-13. Неевклидовы геометрии.

Цель: Рассмотреть общую схему построения неевклидовых геометрий – Эрлангенская программа Ф.Клейна.

Занятие проходит в форме представления и обсуждения докладов-презентаций.

Самостоятельная работа:

[2] Основная литература, задачи

12.25; 12.26; 12.27; 12.30; 12.31

12.33; 12.34; 12.35

12.53; 12.54; 12.55

Самостоятельная работа

Задания для самостоятельной работы представлены к каждому практическому занятию.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Виды текущего контроля, предусмотренные рабочей программой дисциплины:

- 1) устный опрос;
- 2) выполнение практических заданий;
- 3) контрольная работа.

1. Требования к устному ответу на вопросы семинарского (практического) занятия

Ответы студенты должны иллюстрировать конкретными примерами, опираться на нормативно-правовую базу, проследить связи между теоретическими и практическими положениями учебной дисциплины, применять теоретические знания к решению вопросов.

Устный ответ предполагает:

- грамотность устной речи;
- убедительность устной речи;
- ясность, точность;
- строгая последовательность, иллюстрация.

Критерии оценки устного ответа

При оценке ответа учитывается:

- полнота и правильность ответа;
- логика изложения;
- степень осознанности и понимания изученного;
- связь теории с практикой.

«Отлично» ставится, если студент:	- обстоятельно и достаточно полно излагает материал; - обнаруживает полное понимание материала, может обосновать свои суждения, привести примеры; - строит ответ последовательно.
«Хорошо» ставится, если студент обнаруживает знание и понимание материала, однако:	- допускает единичные ошибки, но исправляет их самостоятельно после замечаний преподавателя; - не всегда может убедительно обосновать свое суждение; - допускает отдельные погрешности.
«Удовлетворительно» ставится, если студент обнаруживает знание и понимание основных теоретических положений темы, но:	-излагает материал недостаточно полно; - не может обосновать свои суждения и привести необходимые примеры; нарушает последовательность в изложении материала.
«Неудовлетворительно» ставится, если студент:	- обнаружил незнание большей части темы (раздела, вопроса); - при ответе на вопрос искажает его смысл; - излагает материал беспорядочно и неуверенно.

Оценка может быть поставлена студенту как за единовременный ответ, так и за ответ, рассредоточенный во времени, т.е. за сумму ответов, данных в процессе занятий.

2. Требования к выполнению практических заданий

Показатели и критерии оценки задания:

- полнота выполнения задания – от 0 до 3 баллов;
- правильность выполнения задания (технологически) – от 0 до 3 баллов;
- точность расчётов / логичность рассуждений – от 0 до 3 баллов;
- аккуратность выполнения – от 0 до 3 баллов.

Шкала оценки: 0 – требование не выполнено; 1 – требование выполнено частично; 2 – требование выполнено, но есть недочёты; 3 – требование выполнено.

Контрольная работа

Образец контрольной работы

- Докажите, что эквидистанта (на плоскости Лобачевского) не является прямой линией.
- Даны отрезки длиной a , b и c . Опишите построение циркулем и линейкой отрезка длиной $\frac{c\sqrt{2a^2 - b^2 + c^2}}{a + b}$.
- Дан угол 7° . Разделите его на 7 равных частей с помощью циркуля и линейки.

Критерии оценивания контрольной работы

- Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно реализован каждый метод решения	1 балл
2	Анализ результатов	2 балла

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

- Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Вопросы к экзамену

- Геометрия до Евклида.
- Проблема пятого постулата.
- Система аксиом Гильберта.
- Аксиомы конгруэнтности, непрерывности, аксиома параллельности.
- Аксиома параллельности Лобачевского.
- Треугольники и четырехугольники на плоскости Лобачевского.
- Взаимное расположение двух прямых на плоскости Лобачевского.
- Понятие о математической структуре.
- Требования, предъявляемые к системам аксиом.
- Система аксиом Вейля трехмерного евклидова пространства.
- Об аксиомах школьного курса геометрии.
- Длина отрезка.
- Площадь многоугольника.
- Равновеликие и равносторонние многоугольники.
- Неевклидовы геометрии.
- Элементы сферической геометрии.

Образец экзаменационного билета

- Система аксиом Гильберта.
- Понятие о математической структуре.
- Задача. Доказать, что сумма углов сферического треугольника больше 180° , но меньше 540° .

Критерии оценивания ответа на экзамене

- Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Теоретический вопрос	2 балла
2	Математическая модель	1 балл
3	Реализация решения задачи	2 балла

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Основная литература

1. Попов, В. Л. Аналитическая геометрия: учебник и практикум для академического бакалавриата / В. Л. Попов, Г. В. Сухоцкий. — 2-е изд., перераб. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2018. — 232 с. — (Серия : Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-03003-7. — Режим доступа: www.biblio-online.ru/book/5DE8BF32-7795-4199-9C4A-7DA0853CCAF2.

7.2. Дополнительная литература

1. Атанасян, С.Л. Геометрия 1 [Электронный ресурс] : учебное пособие для вузов / С.Л. Атанасян, В.Г. Покровский ; под ред. С.Л. Атанасяна. — Эл. изд.—Электрон. текстовые дан. (1 файл pdf : 334 с.). — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2014.—Систем. требования: AdobeReader XI ; экран 10". - ISBN 978-5-9963-2371-5

2. Геометрия 2 [Электронный ресурс] : учеб. пособие для вузов / С.Л. Атанасян, В.Г. Покровский, А.В. Ушаков ; под ред. С.Л. Атанасяна.—М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. —547 с.— ISBN 978-5-9963-2876-5 Высшая геометрия / Н.В. Ефимов, - 7-е изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. - 584 с. ISBN 5-9221-0267-2

3. Гусева Н.И. Сборник задач по геометрии: в 2 ч. — Ч. II : учебное пособие / Н.И. Гусева. Н.С. Денисова. О.Ю. Тесля. — Москва: КНОРУС, 2021. — 528 с. ISBN 978-5-406-05200-6

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Электронная библиотека <https://www.biblio-online.ru>
2. <http://www.intuit.ru> – Интернет-Университет Информационных Технологий
3. <http://window.edu.ru> – Каталог образовательных Internet-ресурсов.

8. Материально-техническое обеспечение

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, оснащенная стандартной учебной мебелью, мультимедиапроектором, ноутбуком, колонками и интерактивной доской.

Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенная стандартной учебной мебелью.

Помещение для самостоятельной работы – компьютерный класс с доступом к сети «Интернет» и ЭИОС СмолГУ.

9. Программное обеспечение

Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), лицензия 66975477 от 03.06.2016 (бессрочно).

PTCMathcad 15.0 (Лицензия 449732)

Установленный дистрибутив языка R и дистрибутив Microsoft Ropen (GPLv2 license).

Обучающимся обеспечен доступ к ЭБС «Юрайт», доступ в электронную информационно-образовательную среду университета.