

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Артеменков Михаил Николаевич
Должность: Ректор
Дата подписания: 07.10.2026 12:25:58
Уникальный программный ключ:
a63b74166e8f4fc17bd1e0462725f79e393bdfd9

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»
Проректор по учебно-
методической деятельности
_____ Ю.А. Устименко
«25» декабря 2025 г.

Рабочая программа дисциплины
Б1.В.01.05 ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Направление подготовки: **44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)**

Направленность (профиль): **Математика. Физика и информатика**

Форма обучения - очная

Курс – 3

Семестр – 5

Всего зачетных единиц – 3, часов – 108

Форма отчетности: зачет – 5 семестр

Программу разработал: кандидат физико-математических наук Перельман Н.Р.

Одобрена на заседании кафедры
«24» ноября 2025 г., протокол № 4

Заведующий кафедрой _____ К.М. Расулов

Смоленск
2025

1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Теория функций действительного переменного» относится к части ОП, формируемой участниками образовательных отношений, изучается в 5 семестре 3 курса бакалавриата. Она является вспомогательной для изучения таких дисциплин, как «Теория вероятностей и математическая статистика», «Численные методы». Для успешного освоения данной дисциплины необходимы компетенции студентов, сформированные при изучении курса «Математический анализ». Основными целями освоения дисциплины являются:

- обобщение основных понятий математического анализа в абстрактных метрических пространствах;
- знакомство с различными теориями обобщения основных понятий математического анализа;
- приобретение навыков использования абстрактного аппарата математического анализа;
- развитие математической эрудиции, воспитание математической культуры.

Изучение курса основано на традиционных методах высшей школы, тесной взаимосвязи со смежными курсами, а также на использовании современной учебной, методической литературы, информационных и образовательных технологий.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы
ПК-5. Способен использовать научные знания в предметной области (математика) в процессе формирования предметной компетенции обучающихся в рамках реализации основной общеобразовательной программы	Знать: современное состояние и перспективы развития математики как учебной дисциплины, направления развития школьного математического образования, теоретические основы обучения математике, принципы построения методической системы обучения математике, основные линии школьного курса математики, их структуру, содержание и роль, этапы формирования математических понятий, методические подходы к изучению основных тем школьного курса математики; Уметь: анализировать и интерпретировать содержание математических понятий, теорем, задач, разрабатывать фрагменты уроков, организовывать образовательный процесс обучения математике, конструировать методику введения понятий, изучения теорем, решения задач; Владеть: основными приемами организации деятельности школьников по изучению математики, навыками разработки методики изучения частных вопросов обучения математике, исследовательскими методами в профессиональной деятельности.

3. Содержание дисциплины

1. Мощность. Понятие равномощности. Существование бесконечных неравномощных множеств. Мощность. Признаки равномощности. Сравнение мощностей. Признаки счетной мощности. Минимальность счетной мощности. Счетность множества рациональных чисел. Прямое произведение счетных множеств. Алгебраические числа, их счетность. Мощность континуума. Существование трансцендентных чисел, их мощность. Объединение и прямое произведение множеств мощности континуумов. Континуальность $\mathbb{R}^n$. Существование множеств сколь угодно высокой мощности. Понятие о проблеме континуума.

2. Метрические пространства. Понятие метрического пространства. Шары. Ограниченные множества. Линейные нормированные пространства. Предгильбертовы

пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Сходимость в метрических пространствах. Граница. Открытые и замкнутые множества. Фундаментальные последовательности и их свойства. Понятие полного пространства. Признаки полноты и неполноты пространства. Примеры полных и неполных пространств. Гильбертовы пространства. Неподвижная точка отображения. Сжимающие отображения. Принцип сжимающих отображений.

3. Интеграл. Ступенчатые множества. Аппроксимация множества ступенчатыми. Мера Лебега. Свойства меры (обзорно). Критерий Лебега интегрируемости по Риману (без доказательства). Интеграл Лебега. Интегрируемость функции Дирихле. Связь между интегралами Римана и Лебега. Свойства интеграла Лебега (обзорно). Эквивалентные функции. Распространение интеграла Лебега на неограниченные функции с помощью срезов функции. Суммируемые функции. Функциональное пространство L^2 , его полнота.

4. Ряды Фурье. Ряд в предгильбертовом пространстве. Ортогональные системы. Теорема Пифагора. Ортонормированные системы. Ряд Фурье. Критерий Стеклова. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве. Критерий полноты.

4. Тематический план

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий		
			лекции	практические занятия	самостоятельная работа
1	Мощность	31	4	12	15
2	Метрические пространства	31	6	10	15
3	Интеграл	25	4	6	15
4	Ряды Фурье	21	2	4	15
Итого		108	16	32	60

5. Виды образовательной деятельности

Занятия лекционного типа

Лекции 1. Равномощные множества. Краткая история теории множеств, биография Кантора. Понятие равномощности. Примеры. Существование бесконечных неравномощных множеств. Мощность. Признаки равномощности. Сравнение мощностей.

Лекции 2. Счетные мощности. Признаки счетной мощности. Минимальность счетной мощности. Счетность множества рациональных чисел. Прямое произведение счетных множеств. Алгебраические числа, их счетность.

Лекции 3. Мощность континуума. Существование трансцендентных чисел, их мощность. Объединение и прямое произведение множеств мощности континуум. Континуальность R^n . Существование множеств сколь угодно высокой мощности. Понятие о проблеме континуума.

Лекции 4. Метрические пространства. Понятие метрического пространства. Шары. Ограниченные множества. Линейные нормированные пространства. Скалярное произведение. Предгильбертовы пространства. Неравенство Коши-Буняковского. Сходимость в метрических пространствах. Граница. Открытые и замкнутые множества.

Лекция 5. Полные пространства. Фундаментальные последовательности и их свойства. Понятие полного пространства. Признаки полноты и неполноты пространства. Примеры полных и неполных пространств. Гильбертовы пространства. Принцип сжимающих отображений.

Лекция 6. Мера. Ступенчатые линейные множества. Аппроксимация множества ступенчатыми. Мера Лебега. Свойства меры (обзорно). Критерий Лебега интегрируемости по Риману (без доказательства).

Лекции 7. Интеграл Лебега. Определение интеграла. Интегрируемость функции Дирихле. Связь между интегралами Римана и Лебега. Свойства интеграла Лебега

(обзорно). Эквивалентные функции. Распространение интеграла Лебега на неограниченные функции с помощью срезок функции. Суммируемые функции. Функциональное пространство L^2 , его полнота (без доказательства).

Лекции 8. Ряды Фурье. Ряд в предгильбертовом пространстве. Ортогональные системы. Теорема Пифагора. Ортонормированные системы. Ряд Фурье. Критерий Стеклова. Ряды Фурье в гильбертовом пространстве. Критерий полноты.

Занятия семинарского типа

Практические занятия № 1-3. Равномощные множества. Признаки равномощности

Задания для аудиторной работы: 1.1 - 1.10

Задания для самостоятельной работы: 1.11 - 1.15

Практические занятия №4-6. Счетные множества и множества мощности континуум

Задания для аудиторной работы: 1.16 - 1.25

Задания для самостоятельной работы: 1.26 - 1.33

Практические занятия №7-8. Метрика, норма, скалярное произведение

Задания для аудиторной работы: 2.1 - 2.25

Задания для самостоятельной работы: 2.26 - 2.35

Практические занятия №9-11. Предел и граница. Принцип сжимающих отображений

Задания для аудиторной работы: 3.1 - 3.15, 4.1 - 4.30

Задания для самостоятельной работы: 3.16 - 3.21, 4.31 - 4.41

Практические занятия №12-14. Мера и интеграл Лебега

Задания для аудиторной работы: 5.1 - 5.19

Задания для самостоятельной работы: 5.20 - 5.26

Практические занятия №15-16. Ряды Фурье

Задания для аудиторной работы: 6.1 - 6.2; 6.4 - 6.8

Задания для самостоятельной работы: 6.9 - 6.12

Указаны номера задач из учебно-методического пособия [1] дополнительной литературы (см. раздел 7).

Самостоятельная работа

Задания для самостоятельной работы приводятся в планах практических занятий.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Текущая аттестация осуществляется на каждом практическом занятии в процессе выполнения заданий для аудиторной работы, в процессе проверки домашней самостоятельной работы. Проведение текущего контроля осуществляется также посредством проведения аудиторных проверочных работ.

Оценочные средства

I. Задания для самостоятельной работы.

Перечень практических заданий для самостоятельной работы приводится в планах практических занятий.

Критерии оценивания выполнения заданий для самостоятельной работы

Показатель	Количество баллов
1) Полнота и глубина изложения ответа (усвоенные теории, понятия, факты)	1
2) Логика изложения материала	1
3) Примеры использования описанных явлений, теорий и устройств	1
4) Использование при подготовке ответа на вопрос дополнительных источников информации	1
5) Оформление работы	1
Итоговая (суммарная) оценка	Max - 5

II. Проверочные работы по дисциплине.

Образец проверочной работы:

1. Задать биекцию промежутка $A=[0;1]$ в промежуток $B=(0;1)$.
2. Найти мощность множества всех линейных функций.
3. Проверить, можно ли назвать нормой вектора $a=(x; y)$ число $x^2+|y|$.
4. Является ли сжимающим отображение $f(x; y; z)=(x; y; x^2+y^2+z^2)$ пространства R_1^3 в себя? Найти его неподвижные точки.

5. Доказать с помощью теоремы Банаха, что последовательность $x_n = \frac{x_{n-1}}{2+x_{n-1}}$ ($x_0=1$) имеет предел и найти его.

Критерии оценивания проверочной работы

1. Нормы оценивания работы

№ п/п	Структурная часть контрольной работы	Количество баллов (*)
1	Правильно решенное задание	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

.Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация осуществляется посредством проведения зачёта. Зачет выставляется по итогам практических занятий, а также на основе представленных обучающимися материалов самостоятельной работы в соответствии с Положением о текущем контроле успеваемости и промежуточной аттестации. Студенты, не выполнившие все задания для самостоятельной работы, предложенные в планах практических занятий, для получения зачета выполняют письменное зачетное задание, образец которого приводится ниже.

Образец зачетного задания

1. Докажите теорему о неравномоощности множества натуральных чисел и множества действительных чисел.
2. Сформулируйте теорему Банаха. Дайте определения *всех* понятий, входящих в ее формулировку.
3. Докажите, что формула $\|a\| = |x| + |y| + |z|$ задает ли норму вектора $a = (x; y; z)$ и найдите расстояние между точками $a = (1; -1; 2)$ и $b = (-1; 2; 1)$.
4. Пусть $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, где $E_n = \left\{ (x, y) \in R^2 \mid x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2} \right\}$. Найдите:
 - а) множество ∂E граничных точек E ;
 - б) мощность множества ∂E .
5. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{если } x - \text{алгебраическое,} \\ x^2, & \text{если } x - \text{трансцендентное} \end{cases}$ интегрируема по Лебегу на отрезке $[0; \sqrt{2}]$ и найдите интеграл $\int_0^{\sqrt{2}} f(x) dx$.

Критерии оценивания зачетного задания

1. Нормы оценивания

№ п/п	Структурная часть	Количество баллов (*)
1	Правильный ответ на вопрос или правильное решение задания	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Зачтено	3-5
2	Не зачтено	2 и менее

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Основная литература

1. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 1 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 324 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07067-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/562115> (дата обращения: 29.11.2025).

2. Ильин, В. А. Математический анализ в 2 ч. Часть 1 в 2 кн. Книга 2 : учебник для вузов / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 315 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07069-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/562116> (дата обращения: 29.11.2025).

3. Далингер, В. А. Теория функций действительного переменного : учебник и практикум для вузов / В. А. Далингер, С. Д. Симонженков. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 242 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-8999-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/562059> (дата обращения: 29.11.2025).

7.2. Дополнительная литература

1. Виленкин Н.Я. Математический анализ: мощность, метрика, интеграл / Н.Я. Виленкин, М.Б. Балк, В.А. Петров. — М., 1980.

2. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М., 1989.
3. Петров В.А. Элементы функционального анализа в задачах / В.А. Петров, Н.Я. Виленкин, М.И. Граев. – М., 1978.
4. Балк М.Б. Метрические пространства / М.Б. Балк, В.А. Петров, А.М. Балк. – Смоленск, 1996.
5. Леонтьева Т.А., Задачи по теории функций действительного переменного / Т.А. Леонтьева, В.С. Панфёров, В.С. Серов. – М., 1997.
6. Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах / Н.Я. Виленкин. – М., 1969.
7. Мир математики: в 40 т. Т.18: Энрике Грасиан. Открытие без границ. Бесконечность в математике. – М., 2014.

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

- Система дистанционного обучения Смоленского государственного университета <http://cdo.smolgu.ru>
- Электронно-библиотечная система университета <http://biblioteka.smolgu.ru>
- Национальный открытый университет <http://www.intuit.ru>
- Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru>

8. Материально-техническое обеспечение

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, оснащенная стандартной учебной мебелью, мультимедиапроектором, ноутбуком, колонками и интерактивной доской.

Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенная стандартной учебной мебелью.

Помещение для самостоятельной работы – компьютерный класс с доступом к сети «Интернет» и ЭИОС СмолГУ.

9. Программное обеспечение

Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), лицензия 66975477 от 03.06.2016 (бессрочно).

Обучающимся обеспечен доступ к ЭБС «Юрайт», доступ в электронную информационно-образовательную среду университета.