

Документ подписан простой электронной подписью

Информация о владельце:

ФИО: Артеменков Михаил Николаевич

Должность: Ректор

Дата подписания: 07.10.2026 12:25:58

Уникальный программный ключ:

a63b74166e8f4fc17bd1e0462725f79e39b

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»
Кафедра прикладной математики и информатики

«Утверждаю»
Проректор по учебно-
методической деятельности
_____ Ю.А. Устименко
«25» декабря 2025г.

**Рабочая программа дисциплины
Б1.В.01.08 Числовые системы**

Направление подготовки: **44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)**

Направленность (профиль): **Математика, Физика и информатика**

Форма обучения: очная

Курс – 4

Семестр – 7

Всего зачетных единиц – 2, часов – 72

Форма отчетности: зачет – 7 семестр

Программу разработала: кандидат физико-математических наук, доцент Г.А. Банару

Одобрена на заседании кафедры
«20» ноября 2025 г., протокол № 5

Заведующий кафедрой _____ С.В. Козлов

Смоленск
2025

1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Числовые системы» относится к дисциплинам части, формируемой участниками образовательных отношений, основной образовательной программы по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы: Математика, Физика и информатика.

Для успешного изучения этой дисциплины студентам понадобятся компетенции, знания, умения и навыки, полученные при изучении таких дисциплин как «Математический анализ», «Линейная алгебра», «Аналитическая геометрия», «Теория чисел», «Основные алгебраические структуры».

Изучение курса основано на традиционных методах высшей школы, тесной взаимосвязи со смежными курсами, а также на использовании как современной учебной и методической литературы, так и лучших образцов классических книг. Характерной чертой курса является сочетание теоретических основ числовых систем с практическими математическими приемами и методами.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы достижения
ПК-5. Способен использовать научные знания в предметной области (математика) в процессе формирования предметной компетенции обучающихся в рамках реализации основной общеобразовательной программы.	Знать: современное состояние и перспективы развития математики как учебной дисциплины, направления развития школьного математического образования, теоретические основы обучения математике, принципы построения методической системы обучения математике, основные линии школьного курса математики, их структуру, содержание и роль, этапы формирования математических понятий, методические подходы к изучению основных тем школьного курса математики. Уметь: анализировать и интерпретировать содержание математических понятий, теорем, задач, разрабатывать фрагменты уроков, организовывать образовательный процесс обучения математике, конструировать методику введения понятий, изучения теорем, решения задач. Владеть: основными приемами организации деятельности школьников по изучению математики, навыками разработки методики изучения частных вопросов обучения математике, исследовательскими методами в профессиональной деятельности.

3. Содержание дисциплины

Натуральные числа. Аксиоматическая теория натуральных чисел (N). Система аксиом Пеано. Сложение и умножение натуральных чисел и их свойства. Аксиома математической индукции и ее применение в элементарной математике. Отношение строгого (и нестрогого) порядка в N , его свойства. Принципы наименьшего и наибольшего числа. Вычитание и деление в N и их свойства.

Целые числа. Система целых чисел. Задача числового расширения. Аксиомы оперативных числовых расширений. Задача расширения N до кольца. Пары первой ступени, операции над ними, их свойства. Кольцо Z_0 классов эквивалентности, существование в ней части, изоморфной системе натуральных чисел. Построение кольца целых чисел Z из кольца Z_0 . Непротиворечивость и категоричность аксиоматической теории целых чисел. Расположенные кольца. Порядок по расположению. Простейшие свойства кольца Z как расположенного кольца.

Рациональные числа. Система рациональных чисел Q . Задача расширения кольца Z . Связь с задачей измерения. Аксиоматическая теория рациональных чисел. Первичные термины и аксиомы. Пары второй ступени и операции над ними, их свойства. Поле Q_0 классов эквивалентности, существование в ней части, изоморфной кольцу Z целых чисел. Построение

поля Q рациональных чисел из поля Q_0 . Поле Q как поле частных для области целостности Z . Непротиворечивость и категоричность аксиоматической теории рациональных чисел. (Единственность поля Q рациональных чисел). Простейшие свойства поля Q (расположенность, упорядоченность, плотность).

Действительные (вещественные) числа. Система действительных чисел R . Недостатки поля Q с точки зрения измерения величин. Расширение поля Q до непрерывного поля. Сечения в упорядоченном множестве, в расположенном поле. Непрерывные поля. Определение поля действительных чисел, построение поля R действительных чисел, его непрерывность. Аксиоматическое построение поля R .

Комплексные числа. Система комплексных чисел. Задача расширения поля R . Исторические сведения. Определение поля C комплексных чисел. Каноническая форма элементов из C . Обзор общего плана построения основных числовых систем.

4. Тематический план

№ п/п	Разделы и темы	Всего часов	Формы занятий		
			лекции	практические занятия	самостоятельная работа
1	Натуральные числа	24	6	12	6
2	Целые числа	14	4	6	4
3	Рациональные числа	12	2	6	4
4	Действительные числа	12	2	4	6
5	Комплексные числа.	10	2	4	4
	ИТОГО	72	16	32	24

5. Виды образовательной деятельности

Занятия лекционного типа

Лекция 1. Натуральные числа. Аксиоматическая теория натуральных чисел (N). Система аксиом Пеано. Сложение натуральных чисел и его свойства.

Лекция 2. Натуральные числа. Умножение натуральных чисел и его свойства. Аксиома математической индукции и ее применение в элементарной математике.

Лекция 3. Натуральные числа. Отношение строгого (и нестрогого) порядка в N , его свойства. Принципы наименьшего и наибольшего числа.

Лекция 4. Целые числа. Система целых чисел. Задача числового расширения. Аксиомы оперативных числовых расширений. Пары первой ступени, операции над ними, их свойства. Кольцо Z_0 классов эквивалентности, существование в ней части, изоморфной системе натуральных чисел.

Лекция 5. Целые числа. Построение кольца целых чисел Z из кольца Z_0 . Непротиворечивость и категоричность аксиоматической теории целых чисел. Расположенные кольца. Порядок по расположению. Простейшие свойства кольца Z как расположенного кольца.

Лекция 6. Рациональные числа. Система рациональных чисел Q . Задача расширения кольца Z . Связь с задачей измерения. Аксиоматическая теория рациональных чисел. Первичные термины и аксиомы. Пары второй ступени и операции над ними, их свойства. Поле Q_0 классов эквивалентности, существование в ней части, изоморфной кольцу Z целых чисел. Построение поля Q рациональных чисел из поля Q_0 . Поле Q как поле частных для области целостности Z . Непротиворечивость и категоричность аксиоматической теории рациональных чисел. (Единственность поля Q рациональных чисел).

Лекция 7. Действительные числа. Система действительных чисел R . Расширение поля Q до непрерывного поля. Сечения в упорядоченном множестве, в расположенном поле. Непрерывность поля. Определение поля действительных чисел, построение поля R действительных чисел, его непрерывность. Аксиоматическое построение поля R .

Лекция 8. Комплексные числа. Система комплексных чисел. Задача расширения поля R . Исторические сведения. Определение поля C комплексных чисел. Каноническая форма элементов из C . Обзор общего плана построения основных числовых систем.

Занятия семинарского типа

Практические занятия

Занятия №1-2. Аксиоматическая теория натуральных чисел (N). Система аксиом Пеано и ее варианты. Сложение и умножение натуральных чисел и их свойства.

Задания для аудиторной работы: № 1, 2, 5, 6, 9 из §1 Гл.2 [1] (здесь и далее [1] – пособие под №1 в списке основной литературы).

Задания для самостоятельной работы: № 3, 4, 7, 8 из §1 Гл.2 [1].

Занятия №3-4. Аксиома математической индукции и ее применение в элементарной математике.

Задания для аудиторной работы: № 1, 2, 4, 7 из §2 Гл.2 [1].

Задания для самостоятельной работы: № 3, 5, 6 из §2 Гл.2 [1].

Занятия №5-6. Отношение строгого (и нестрогого) порядка в N , его свойства. Принципы наименьшего и наибольшего числа. Вычитание и деление в N и их свойства.

Задания для аудиторной работы: № 1, 3, 4, 6 из §4 Гл.2 [1].

Задания для самостоятельной работы: № 2, 5, 7 из §4 Гл.2 [1].

Занятие №7. Система целых чисел. Задача числового расширения. Аксиомы оперативных числовых расширений. Задача расширения N до кольца. Пары первой ступени, операции над ними, их свойства.

Задания для аудиторной работы: № 1, 2, 4, 6, 10 из §1 Гл.3 [1].

Задания для самостоятельной работы: № 3, 5, 7, 8, 9 из §1 Гл.3 [1].

Занятия №8-9. Построение кольца целых чисел Z из кольца Z_0 . Непротиворечивость и категоричность аксиоматической теории целых чисел. Расположенные кольца. Порядок по расположению. Простейшие свойства кольца Z как расположенного кольца.

Задания для аудиторной работы: № 1, 2, 4, 6, 10 из §2 Гл.3 [1].

Задания для самостоятельной работы: № 3, 5, 7, 8, 9 из §2 Гл.3 [1].

Занятия №10-11. Система рациональных чисел Q . Задача расширения кольца Z . Связь с задачей измерения. Аксиоматическая теория рациональных чисел. Первичные термины и аксиомы. Пары второй ступени и операции над ними, их свойства. Поле Q_0 классов эквивалентности, существование в ней части, изоморфной кольцу Z целых чисел.

Задания для аудиторной работы: № 1, 3, 4, 6, 8 из §2 Гл.3 [1].

Задания для самостоятельной работы: № 2, 5, 7, 9 из §2 Гл.3 [1].

Занятие №12. Построение поля Q рациональных чисел из поля Q_0 . Поле Q как поле частных для области целостности Z . Непротиворечивость и категоричность аксиоматической теории рациональных чисел. Простейшие свойства поля Q .

Задания для аудиторной работы: № 1, 2, 4, 5 из §3 Гл.4 [1].

Задания для самостоятельной работы: № 3, 5, 7, 8, 9 из §3 Гл.4 [1].

Занятия №13-14. Система действительных чисел $\mathbb{R}$. Расширение поля $\mathbb{Q}$ до непрерывного поля. Сечения в упорядоченном множестве, в расположенном поле. Определение поля действительных чисел, построение поля $\mathbb{R}$ действительных чисел, его непрерывность. Аксиоматическое построение поля $\mathbb{R}$.

Задания для аудиторной работы: № 1, 2, 4, 5 из §1 Гл.5 [1].

Задания для самостоятельной работы: № 3, 5, 7, 8 из §1 Гл.4 [1].

Занятия №15-16. Система комплексных чисел. Задача расширения поля $\mathbb{R}$. Определение поля $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Каноническая форма элементов из $\mathbb{C}$.

Задания для аудиторной работы: № 1, 3, 4, 5, 7 из §1 Гл.6 [1].

Задания для самостоятельной работы: № 2 из §1 Гл.6; № 1, 4, 5. [1].

Самостоятельная работа

Самостоятельная работа студента направлена на углубление и закрепление знаний студентов и развитии практических умений. Она заключается в работе с лекционными материалами, поиске и обзоре литературы и электронных источников, информации по заданным темам курса, опережающей самостоятельной работе, в изучении тем, вынесенных на самостоятельную проработку, подготовке к лабораторным занятиям.

Самостоятельная внеаудиторная работа студентов состоит в:

- проработке лекционного материала, составлении конспекта лекций по темам, вынесенным на самостоятельное изучение;
- выполнении домашних заданий.

Темы для самостоятельного изучения

1. Система аксиом Пеано.
2. Аксиома математической индукции и ее применение в элементарной математике.
3. Принципы наименьшего и наибольшего числа.
4. Система целых чисел.
5. Непротиворечивость и категоричность аксиоматической теории целых чисел.
6. Система рациональных чисел $\mathbb{Q}$.
7. Аксиоматическая теория рациональных чисел.
8. Непротиворечивость и категоричность аксиоматической теории рациональных чисел.
9. Система действительных чисел $\mathbb{R}$.
10. Сечения в упорядоченном множестве, в расположенном поле.
11. Система комплексных чисел.
12. Обзор общего плана построения основных числовых систем.

Задания для самостоятельной работы представлены к каждому практическому занятию.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

1. Теоретические вопросы

1. Аксиоматическая теория натуральных чисел ($\mathbb{N}$).
2. Система аксиом Пеано.
3. Сложение натуральных чисел и его свойства.
4. Умножение натуральных чисел и его свойства
5. Аксиома математической индукции и ее применение в элементарной математике.
6. Отношение строгого (и нестрогого) порядка в $\mathbb{N}$, его свойства.
7. Принципы наименьшего и наибольшего числа.
8. Система целых чисел. Задача числового расширения.

9. Аксиомы оперативных числовых расширений.
10. Пары первой ступени, операции над ними, их свойства.
11. Кольцо Z_0 классов эквивалентности, существование в ней части, изоморфной системе натуральных чисел.
12. Построение кольца целых чисел Z из кольца Z_0 .
13. Непротиворечивость и категоричность аксиоматической теории целых чисел.
14. Расположенные кольца. Порядок по расположению.
15. Простейшие свойства кольца Z как расположенного кольца.
16. Система рациональных чисел Q .
17. Задача расширения кольца Z . Связь с задачей измерения.
18. Аксиоматическая теория рациональных чисел. Первичные термины и аксиомы.
19. Пары второй ступени и операции над ними, их свойства.
20. Поле Q_0 классов эквивалентности, существование в ней части, изоморфной кольцу Z целых чисел. Построение поля Q рациональных чисел из поля Q_0 .
21. Поле Q как поле частных для области целостности Z .
22. Непротиворечивость и категоричность аксиоматической теории рациональных чисел. (Единственность поля Q рациональных чисел).
23. Система действительных чисел R .
24. Расширение поля Q до непрерывного поля.
25. Сечения в упорядоченном множестве, в расположенном поле.
26. Непрерывность поля. Определение поля действительных чисел, построение поля R действительных чисел, его непрерывность.
27. Аксиоматическое построение поля R .
28. Система комплексных чисел.
29. Задача расширения поля R . Исторические сведения.
30. Определение поля C комплексных чисел. Каноническая форма элементов из C .

Критерии оценки ответа на теоретический вопрос

Показатель	Количество баллов
1) Полнота и глубина ответа (усвоенные теории, понятия, факты и пр.)	1
2) Сознательность ответа (понимание излагаемого материала)	1
3) Логика изложения материала (умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться специальной терминологией)	1
4) Умение приводить примеры использования описанных явлений, теорий и устройств	1
5) Использование при подготовке ответа на вопрос дополнительных источников информации	0,5
6) Наличие конспекта ответа на вопрос	0,5
Итоговая (суммарная) оценка	Max - 5

2. Задания для практических занятий

Задания по темам курса предложены к каждому практическому занятию в пособии [1] из списка литературы.

Образец задания

1. Докажите, что $3+4=7$.
2. Сложите и перемножьте пары $(2, 4)$ и $(3, 1)$, считая их: а) парами первой ступени; б) второй ступени; в) третьей ступени.
3. Докажите, что в любом расположенном кольце справедливо равенство: $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$, при $y \neq 0$.

Критерии оценивания выполнения практических заданий

Показатель	Количество баллов
1) Полнота и глубина изложения ответа (усвоенные теории, понятия, факты)	1
2) Логика изложения материала	1
3) Примеры использования описанных явлений, теорий и устройств на практике	1
4) Использование при подготовке ответа на вопрос дополнительных источников информации	1
5) Оформление работы	1
Итоговая (суммарная) оценка	Max - 5

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Зачетная работа (типовая)

- Докажите, что: а) $2+3=5$, б) $2 \times 2 = 4$, в) $7 > 2$.
- Сложите и перемножьте пары (3, 4) и (2, 1), считая их: а) парами первой ступени; б) второй ступени; в) третьей ступени.
- Используя принцип математической индукции, докажите, что: а) $(n^3 - n) : 6, n \in \mathbb{Z}$; б) $2^n > n^2, n \in \mathbb{N}, n \geq 5$; в) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \in \mathbb{N}$.
- Докажите, что в любом расположенном кольце справедливо равенство: $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.

Критерии оценивания зачетной работы

1.

Нормы оценивания:

№п/п	Структурная часть зачетной работы	Количество баллов(*)
1	Задание 1	1 балл
2	Задание 2	1 балл
3	Задание 3	1 балл
4	Задание 4	2 балла

(*) Возможна градация в 0,25 балла.

2. Шкала оценивания работы:

№ п/п	Оценка	Количество баллов
1	Зачтено	3 балла и более
2	Не зачтено	Менее 3 баллов

Критерий получения зачета

Зачет выставляется по результатам работы студента в течение семестра.

Для получения зачета студент должен:

- уметь отвечать на теоретические вопросы, рассмотренные на лекциях;
- уметь решать задачи, предложенные на практических занятиях;
- выполнить зачетную работу на оценку «зачтено».

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Список основной литературы

1. Ларин С. В. Числовые системы: учебник для вузов / С. В. Ларин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 130 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19859-1. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563869>.
2. Пожидаев А. П. Высшая алгебра : учебник для вузов / А. П. Пожидаев, С. Р. Сверчков, И. П. Шестаков. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 203 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-20177-2. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/569208>.
3. Богомолов Н. В. Математика: учебник для вузов / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2022. — 401 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-07001-9. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/488864>.

7.2. Список дополнительной литературы

1. Банару Г.А. Элементы математической логики. Множества. Отношения. Метод математической индукции. Смоленск. СГПУ. 2008.
2. Виленкин Н.Я. Современные основы школьного курса математики. Пособие для студентов пединститутов. М., Просвещение, 1980.
3. Задачи по математике. Алгебра. Справочное пособие. М., Наука, 1987.
4. Нечаев В.И. Числовые системы. М., Просвещение, 1975.
5. Соминский И.С. Метод математической индукции. М., Наука, 1974.
6. Соминский И.С., Головина Л.И., Яглом И.М. О математической индукции. М., Наука, 1967.
7. Числовые системы: Учебное пособие / Ю.Н. Смолин. - М.: Флинта: Наука, 2009. — 112 с.: 60x88 1/16. (обложка) ISBN 978-5-9765-0794-4

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети Интернет

1. Алгебра матриц и линейные пространства. Национальный открытый университет «Интуит». URL: <http://www.intuit.ru/studies/courses/992/207/info>
2. Основные сервисы и технологии Mathcad 14. URL: <http://www.intuit.ru/studies/courses/10678/1113/info>
3. Введение в алгебру. Национальный открытый университет. URL: <http://www.intuit.ru/studies/courses/1009/197/info>
4. Общероссийский математический портал MATH-NET URL: www.mathnet.ru

8. Материально-техническое обеспечение

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного и семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенная следующим оборудованием: стандартная учебная мебель (28 учебных посадочных мест), стол и стул для преподавателя – по 1 шт., кафедра для лектора – 1 шт., доска настенная трехэлементная – 1 шт., напольный мобильный проекционный экран DA-LITE – 1 шт., мультимедиапроектор BenQ – 1 шт., ноутбук Lenovo – 1шт., колонки Genius – 1 шт., персональные компьютеры, объединенные в сеть с выходом в Интернет, – 16 шт.

Помещение для самостоятельной работы – компьютерный класс с доступом к сети «Интернет» и ЭИОС СмолГУ.

9. Программное обеспечение

Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), лицензия 66975477 от 03.06.2016 (бессрочно).

PTC Mathcad 15.0 (Лицензия 449732)

Обучающимся обеспечен доступ к ЭБС «Юрайт», доступ в электронную информационно-образовательную среду университета.