

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Артеменков Михаил Николаевич
Должность: Ректор
Дата подписания: 07.10.2026 12:25:58
Уникальный программный ключ:
a63b74166e8f4fc17bd1e0462725f79e393bdfd9

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Смоленский государственный университет»

Кафедра математического анализа

«Утверждаю»
Проректор по учебно-
методической деятельности
Ю.А. Устименко
«25» декабря 2025 г.

Рабочая программа дисциплины по выбору
Б1.В.01.06 Дифференциальные уравнения и уравнения математической физики

Направление подготовки: **44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)**

Направленность (профиль): **Математика, Физика и информатика**

Форма обучения – очная

Курс – 3

Семестр – 5

Всего зачётных единиц – 3, часов – 108

Форма отчетности: экзамен – 5 семестр.

Программу разработал: доктор физико-математических наук, профессор Расулов К.М.;

Одобрена на заседании кафедры
«24» ноября 2025 г., протокол № 4

Заведующий кафедрой _____ К.М. Расулов

Смоленск
2025

1. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина «Дифференциальные уравнения и уравнения математической физики» относится к дисциплинам части, формируемой участниками образовательных отношений, основной образовательной программы по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), направленность (профиль) образовательной программы: Математика, Физика и информатика.

Играет фундаментальную роль в теоретической и практической подготовке бакалавров направления подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)».

Данная дисциплина носит прикладной характер и показывает, как составление дифференциальных уравнений (в том числе с частными производными) и методы их решения позволяют получать адекватные математические модели явлений, происходящих в человеческой практике. Она является вспомогательной для изучения ряда дисциплин учебного плана (теория функций комплексного переменного, математическое моделирование, численные методы, физика и др.), а также для вычислительных и педагогических практик, предусмотренных ОП.

Цели освоения дисциплины:

- овладение основными понятиями дифференциальных уравнений;
- овладение логическими основами курса, необходимыми для решения теоретических и практических задач;
- приобретение навыков использования методов дифференциальных уравнений при решении задач прикладного характера;
- формирование навыков самостоятельной работы, необходимых для использования знаний при изучении специальных дисциплин и дальнейшей практической деятельности;
- развитие математической интуиции, воспитание математической культуры.

Задачи освоения дисциплины:

- познавательная – глубокое освоение основных понятий, изучаемых в курсе «Дифференциальные уравнения и уравнения математической физики», что необходимо для изучения смежных дисциплин.
- воспитательная – привитие и развитие культуры мышления, способности логически верно выстраивать устную и письменную речь, понимать необходимость доказательств, как в математике, так и в реальных жизненных ситуациях, при общении с коллегами и при работе в ученическом и учительском коллективах.
- развивающая – усвоение определенного количества информации по данной дисциплине, накопленной человечеством в процессе развития математики, привитие способности понимания значения дифференциальных уравнений в других разделах математики и возможности применения полученных знаний в своей будущей педагогической (или иной другой) профессиональной деятельности.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине

Компетенция	Индикаторы
ПК-5. Способен использовать научные знания в предметной области (математика) в процессе формирования предметной компетенции обучающихся в рамках реализации основной общеобразовательной программы	Знать: современное состояние и перспективы развития математики как учебной дисциплины, направления развития школьного математического образования, теоретические основы обучения математике, принципы построения методической системы обучения математике, основные линии школьного курса математики, их структуру, содержание и роль, этапы формирования математических понятий, методические подходы к изучению основных тем школьного курса математики; Уметь: анализировать и интерпретировать содержание математических понятий, теорем, задач, разрабатывать

	фрагменты уроков, организовывать образовательный процесс обучения математике, конструировать методику введения понятий, изучения теорем, решения задач; Владеть: основными приемами организации деятельности школьников по изучению математики, навыками разработки методики изучения частных вопросов обучения математике, исследовательскими методами в профессиональной деятельности.
ПК-7 Способен использовать научные знания в предметной области (физика) в процессе формирования предметной компетенции обучающихся в рамках реализации основной общеобразовательной программы	Знать: современное состояние и перспективы развития физики как учебной дисциплины, направления развития школьного физического образования, теоретические основы обучения физике, принципы построения методической системы обучения физике, основные линии школьного курса физики, их структуру, содержание и роль, этапы формирования физических понятий, методические подходы к изучению основных тем школьного курса физики; Уметь: анализировать и интерпретировать содержание физических понятий, теорем, задач, разрабатывать фрагменты уроков, организовывать образовательный процесс обучения физике, конструировать методику введения понятий, изучения теорем, решения задач; Владеть: основными приемами организации деятельности школьников по изучению физики, навыками разработки методики изучения частных вопросов обучения физики, исследовательскими методами в профессиональной деятельности.

3. Содержание дисциплины

Раздел 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Уравнения с разделяющимися переменными. Понятие об обыкновенных дифференциальных уравнениях. Общий вид дифференциальных уравнений. Задача Коши. Теорема Коши. Общие, частные и особые решения. Понятие и алгоритм решения уравнений с разделяющимися переменными. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными.

Раздел 2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Однородные и неоднородные линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Методы решения однородных и неоднородных линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Уравнение Бернулли.

Раздел 3. Дифференциальные уравнения первого порядка, неразрешённые относительно производной. Общий вид уравнения. Основные подходы к решению. Метод введения параметра. Уравнения Клеро и Лагранжа.

Раздел 4. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка. Понятие об основных типах дифференциальных уравнений высшего порядка, допускающих понижение порядка. Методы решения уравнений.

Раздел 5. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка. Структура общего решения ЛОДУ 2-го порядка. Понятие фундаментальной системы решений. Вронскиан и его свойства. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Структура общего решения ЛНДУ 2-го порядка. Метод Лагранжа. Метод неопределённых коэффициентов.

Раздел 6. Понятие о нормальной системе дифференциальных уравнений. Сведение дифференциального уравнения высшего порядка к нормальной системе

дифференциальных уравнений. Элементарные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений. Линейная система дифференциальных уравнений. Решение линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Метод Эйлера.

Раздел 7. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными. Линейные и квазилинейные дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. Приведение к канонической форме.

Раздел 8. Уравнения гиперболического типа. Постановка основных задач. Задача Коши для волнового уравнения. Смешанная задача. Понятие корректности постановки задач уравнений математической физики.

Раздел 9. Уравнения параболического типа. Постановка основных задач. Единственность решения задачи Коши. Понятие об интегральных преобразованиях Фурье. Решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности.

Раздел 10. Уравнения эллиптического типа. Постановка основных задач. Гармонические функции на плоскости, их основные свойства. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье. Формула Пуассона.

4. Тематический план

Темы	Всего часов	Формы занятий		
		Лек-ции	Практич. занятия	Самост. работа
1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка.	12	4	6	2
2. Дифференциальные уравнения первого порядка, неразрешённые относительно производной	5	2	2	1
3. Обыкновенные дифференциальные уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка.	5	2	2	1
4. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка.	12	6	4	2
5. Нормальные системы дифференциальных уравнений.	5	2	2	1
6. Системы линейных дифференциальных уравнений.	10	4	4	2
7. Классификация дифференциальных уравнений с частными производными. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка. Приведение к канонической форме.	10	4	4	2
8. Уравнения гиперболического типа. Постановка основных задач. Задача Коши для уравнения колебаний. Существование и единственность решения. Смешанная задача.	5	2	2	1
9. Уравнения параболического типа. Постановка основных задач. Решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности.	6	2	2	2
10. Уравнения эллиптического типа. Постановка основных задач. Уравнения Лапласа и Пуассона. Гармонические функции и их основные свойства.	5	2	2	1
11. Задача Дирихле. Теоремы единственности и		2	2	2

устойчивости. Метод разделения переменных для задачи Дирихле в случае круга. Формула Пуассона.	6			
Экзамен	27			27
Всего за семестр	108	32	32	44

5. Виды образовательной деятельности

Занятия лекционного типа

Лекции 1-2. «Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка»: понятие дифференциального уравнения; порядок и решение обыкновенного дифференциального уравнения; задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям; задача Коши и теорема Коши (о существовании и единственности решения) для уравнения; понятия общего, частного и особого решений дифференциального уравнения; геометрическое истолкование дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ и его решений; дифференциальное уравнение первого порядка в симметричной форме; линейные дифференциальные уравнения первого порядка; уравнение Бернулли; дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными; дифференциальное уравнение первого порядка, однородное относительно x и y ; уравнения в полных дифференциалах.

Лекция 3. «Дифференциальные уравнения первого порядка, неразрешённые относительно производной»: методы интегрирования дифференциальных уравнений вида $F(x, y, y') = 0$; уравнения Лагранжа и Клеро; составление дифференциального уравнения первого порядка по его общему интегралу.

Лекция 4. «Обыкновенные дифференциальные уравнения высшего порядка, допускающие понижение порядка»: задача Коши и теорема Коши для дифференциальных уравнений высшего порядка; понятия общего и частного решений дифференциального уравнения высшего порядка; некоторые классы дифференциальных уравнений высших порядков, допускающие понижение порядка.

Лекции 5-7. «Линейные дифференциальные уравнения второго порядка»: понятие линейного дифференциального уравнения второго порядка; теорема Коши для линейных уравнений второго порядка; построение общего решения для линейных однородных уравнений; структура общего решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений; отыскание частного решения линейного уравнения методом вариации произвольных постоянных; линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами; линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами; метод неопределённых коэффициентов.

Лекция 8. «Нормальные системы дифференциальных уравнений»: нормальная система дифференциальных уравнений; задача Коши и теорема Коши о существовании и единственности решения; сведение дифференциальных уравнений n -го порядка к нормальной системе дифференциальных уравнений; элементарные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений.

Лекции 9-10. «Системы линейных дифференциальных уравнений»: системы линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка; фундаментальная система решений; структура общего решения системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений; метод Лагранжа; системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами.

Лекции 11-12. «Классификация дифференциальных уравнений с частными производными. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка. Приведение к канонической форме»: общая классификация дифференциальных уравнений с частными производными; классификация линейных дифференциальных уравнений 2-го

порядка; приведение к канонической форме линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с 2-мя переменными; случай гиперболического, параболического и эллиптического уравнений.

Лекции 13. «Уравнения гиперболического типа. Постановка основных задач»: постановка задачи Коши, граничной задачи и смешанной задачи для гиперболического уравнения; вывод формулы Даламбера; решение задачи для конечной струны.

Лекция 14. «Уравнения параболического типа. Постановка основных задач»: постановка задачи Коши, граничной задачи и смешанной задачи для уравнения параболического типа; уравнение теплопроводности; единственность решения задачи Коши; интегральные преобразования Фурье; решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности.

Лекция 15. «Уравнения эллиптического типа. Постановка основных задач. Уравнения Лапласа и Пуассона. Гармонические функции и их основные свойства»: физические процессы, описываемые уравнениями Пуассона и Лапласа; постановка задачи Дирихле; гармонические функции 2-х переменных, их связь с аналитическими и основные свойства.

Лекции 16. «Задача Дирихле. Теоремы единственности и устойчивости. Метод разделения переменных для задачи Дирихле в случае круга»: постановка задачи Дирихле; доказательство единственности и устойчивости решения задачи Дирихле; вывод оператора Лапласа в цилиндрической системе координат; метод Фурье для круговых областей; интеграл Пуассона.

Занятия семинарского типа

Практические занятия

Практическое занятие №1-2. Понятия дифференциального уравнения и его решения. Задача Коши и теоремы о существовании и единственности решения для дифференциальных уравнений 1-го порядка

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Дайте определение дифференциального уравнения. Когда дифференциальное уравнение называется *обыкновенным*?
2. Что называется *порядком* дифференциального уравнения? Каков порядок дифференциального уравнения $yy' - 3 \sin(xy''') = 0$?
3. Каков общий вид обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка?
4. Дайте определение *решения* обыкновенного дифференциального уравнения n -го порядка.
5. Что называется *интегральной кривой* обыкновенного дифференциального уравнения?
6. Сколько различных решений, определенных на одном и том же промежутке $\langle a, b \rangle$, может иметь заданное дифференциальное уравнение?
7. Сформулируйте задачу Коши для дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.
8. В чем состоит геометрический смысл задачи Коши для дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?
9. Объясните смысл следующего предложения: «Функция $f(x, y)$ в некотором прямоугольнике $\Pi\{(x_0, y_0); a, b\}$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y ».
10. Приведите пример функции двух переменных $f(x, y)$, непрерывной по переменной y в некотором прямоугольнике $\Pi\{(x_0, y_0); a, b\}$, но не удовлетворяющей в нем условию Липшица по y .

11. Приведите пример функции двух переменных $f(x, y)$, непрерывной в некотором прямоугольнике $\Pi\{(x_0, y_0); a, b\}$ и удовлетворяющей в нем условию Липшица по y , но не имеющей в этом прямоугольнике ограниченной частной производной по y .

12. Сформулируйте и докажите теорему Коши-Пикара о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

13. Сформулируйте теорему Коши о существовании и единственности решения задачи Коши для уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

14. Приведите пример задачи Коши, для которой в некотором прямоугольнике $\Pi\{(x_0, y_0); a, b\}$ выполняются условия теоремы Коши-Пикара, но не выполняются условия теоремы Коши.

15. Объясните смысл следующего предложения: «Решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения может быть продолжено вправо (влево)».

16. Какое решение дифференциального уравнения называется *полным*?

17. Что называется *областью единственности решения* дифференциального уравнения?

18. Дайте определение *общего решения (общего интеграла)* дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$.

19. Что называется *частным решением (частным интегралом)* дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$?

20. Дайте определение *особого решения* обыкновенного дифференциального уравнения.

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1) Какие из следующих уравнений являются *дифференциальными*:

а) $x^2 - 5y = 0$;

б) $3y'' + y = 0$;

в) $\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial x} - 7 \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x \partial y} = 0$;

г) $\Phi(x, y, z) = 0$?

2) Проверьте, являются ли следующие функции решениями для указанного дифференциального уравнения (C – произвольная постоянная):

а) $y = \sqrt{x^2 + C}$, $yy' = x$; б) $y = x \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$, $xy' = y + x \sin x$;

в) $y = x + Ce^y$, $(x - y + 1)y' = 1$; г) $\left\{ \begin{matrix} x = t \ln t \\ y = t^2 (2 \ln t + 1) \end{matrix} \right.$, $y' \ln \frac{y'}{4} = 4x$.

3) Пусть $y = \varphi(x)$ – интегральная кривая дифференциального уравнения $y' = y \cos(x - 1) + \ln x$, проходящая через точку $P(1, 3)$. Найдите значения $\varphi'(1)$, $\varphi''(1)$.

4) Докажите, что функция $f(x, y) = y^2 \sin x + e^x$ удовлетворяет условию Липшица по переменной y в прямоугольнике $\Pi\{(0, 0); a, b\}$ и найдите наименьшую из постоянных Липшица для данной функции (здесь a и b – положительные постоянные числа).

5) Докажите, что дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = 2|y|^{\frac{1}{2}}$ имеет более одного решения, удовлетворяющего начальному условию $y|_{x=x_0} = 0$, где x_0 – фиксированное действительное число. Какое из условий теоремы Коши-Пикара не выполняется для рассматриваемой здесь задачи Коши?

6) Составьте интегральное уравнение, эквивалентное следующей задаче Коши:
 $y' = 2x - y, \quad y|_{x=0} = \pi$.

7) Для данных дифференциальных уравнений выделите области, в которых выполняются условия теоремы Коши о существовании и единственности решения:

а) $y' = x^2 + y^2 - 9$; б) $y' = y + 3\sqrt[3]{y}$; в) $y' = \frac{y}{\cos x}$.

8) Проверьте, является ли семейство функций $y = x \left(1 - \frac{1}{\ln x + C} \right)$, где C – произвольная постоянная, общим решением дифференциального уравнения $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x} + 1$ в полуплоскости $G_+ = \{(x, y) \in R^2 \mid x > 0, -\infty < y < +\infty\}$. Будет ли функция $y = x$ особым решением данного дифференциального уравнения?

9) Зная общие решения (общие интегралы) дифференциальных уравнений, найдите их частные решения (частные интегралы), удовлетворяющие заданным начальным условиям:

а) $y = Cx^2, \quad y|_{x=2} = 3$;

б) $\ln^2(x + y) + y \ln x = C$,

$y|_{x=1} = e - 1$; здесь e – основание натурального логарифма.

10) Известно, что семейство функций $y = x + \sqrt{(x + C)^3}$, где C – произвольная постоянная, является общим решением дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{3}{2}(y - x)^{1/3}$ в полуплоскости $G_1 = \{(x, y) \in R^2 \mid y > x\}$. Будет ли функция $y = x$ особым решением данного дифференциального уравнения?

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1) Какие из следующих уравнений являются дифференциальными:

а) $y = xy' - (y')^2$; б) $3y^2 + y = 0$;

в) $\frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi(x, y)}{\partial y^2} = 0$; г) $x^2 + y^2 = 1$?

2) Проверьте, являются ли для заданного дифференциального уравнения следующие функции его решениями (C – произвольная постоянная):

а) $y^2 - x^2 - 2xyy' = 0, \quad y = \sqrt{2Cx - x^2}$;

б) $y' - y = e^{x+x^2}, \quad y = e^x \int_0^x e^{t^2} dt + Ce^x$; в) $xy' = y \cdot \operatorname{tg}(\ln y), \quad y = e^{\arcsin Cx}$.

3) Проверьте, удовлетворяет ли условию Липшица по переменной y функция $q(x, y) = (2 + \cos x) \cdot y^{\frac{2}{3}} - \sin x$ в прямоугольнике $P\{(0, 0); a, b\}$, где a и b – положительные постоянные числа.

4) Верно ли, что существует единственное решение дифференциального уравнения $y' = x + y$, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=1} = 5$? Ответ обосновать.

5) Составьте интегральное уравнение, эквивалентное следующей задаче Коши:
 $y' = y^2 + xy + x^2, \quad y|_{x=0} = 1$.

6) Для данных дифференциальных уравнений выделите области, в которых выполняются условия теоремы Коши о существовании и единственности решения:

а) $y' = \sqrt{x - 4y^2}$;

б) $y' = y \cdot \operatorname{tg} x$.

7) Зная общие решения (общие интегралы) дифференциальных уравнений, найдите их частные решения (частные интегралы), удовлетворяющие заданным начальным условиям:

$$a) x^2 + 2y^2 = C, \quad y|_{x=-1} = 5;$$

$$б) y = \int_0^x \frac{e^t}{t} dt + C, \quad y|_{x=0} = -5.$$

8) Докажите, что дифференциальное уравнение $y' = \sqrt{1-y^2}$ имеет по крайней мере два решения, удовлетворяющих начальному условию $y|_{x=0} = 1$. Найдите особые решения данного уравнения.

Практическое занятие №3-4. Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, однородные относительно x и y

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Когда дифференциальное уравнение называется интегрируемым в квадратурах?
2. Какое дифференциальное уравнение 1-го порядка называется уравнением с разделенными переменными?
3. Каков общий интеграл уравнения с разделенными переменными?
4. Какое дифференциальное уравнение 1-го порядка называется уравнением с разделяющимися переменными?
5. Каков общий интеграл уравнения с разделяющимися переменными?
6. Может ли уравнение с разделяющимися переменными иметь *особые решения*?

Почему?

7. Когда функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией степени n в области $D \subset \mathbb{R}^2$* ?
8. Какое дифференциальное уравнение называется *однородным относительно x и y* ?
9. Каков общий метод решения дифференциального уравнения, однородного относительно x и y ?
10. Могут ли уравнения, *однородные относительно x и y* , иметь *особые решения*?

11. Каким образом уравнение вида $y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ приводится к однородному?

12. Приведите пример уравнения, которое приводится к однородному путем замены $y = z^m$, $m \in \mathbb{N}$.

II. Задания для аудиторной работы студентов.

- 1) Найдите общий интеграл уравнения $x dx + (1 + y) dy = 0$.
- 2) Найдите общее и особые решения дифференциального уравнения $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0$.
- 3) Найдите частное решение уравнения $y' = 2\sqrt{y} \ln x$, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=e} = 1$.

4) Решите уравнение $y' = \sin(x - y)$, используя замену переменной.

5) Решите дифференциальные уравнения:

$$a) y dx + (2\sqrt{xy} - x) dy = 0; \quad б) (y + \sqrt{x^2 + y^2}) dx - x dy = 0.$$

6) Выделите интегральные кривые, проходящие через точку $M(1; 1)$, для следующих уравнений: а) $y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$; б) $xy' = x \sin \frac{y}{x} + y$.

7) Решите дифференциальное уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$.

8) Найдите кривую, для которой площадь Q фигуры, ограниченной искомой кривой, осью OX и двумя прямыми, параллельными оси OY и пересекающими ось абсцисс в точках 0 и x , является функцией от y вида: $Q = a^2 \ln \frac{y}{a}$, $a > 0$.

9) Решите дифференциальное уравнение

$$(2x + y + 1) dx + (2y - x - 1) dy = 0.$$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1) Найдите общее и особые решения дифференциальных уравнений:

а) $ye^{2x}dx - (1 + e^{2x})dy = 0$; б) $yy' = \frac{1-2x}{y}$.

2) Найдите частное решение дифференциального уравнения $y'tgx - y = 1$, удовлетворяющее начальному условию $y|_{x=\frac{\pi}{2}} = 1$.

3) Решите дифференциальные уравнения:

а) $xy' \cos \frac{y}{x} = y \cos \frac{y}{x} - x$; б) $y' = \frac{y}{x} \ln \frac{y}{x}$.

4) Найдите интегральную кривую уравнения $xydy - y^2dx = (x+y)^2 e^{-\frac{y}{x}}dx$, проходящую через точку $M(1; 1)$.

5) Найдите интегральную кривую уравнения $(1 + e^{\frac{x}{y}})dx + e^{\frac{x}{y}}(1 - \frac{x}{y})dy = 0$, проходящую через точку $P(0; 2)$.

6) Найдите кривую, проходящую через точку $M(-1; 1)$, если угловой коэффициент касательной к ней в любой точке равен квадрату ординаты точки касания.

7) Решите дифференциальное уравнение $(x+y+1)dx + (2x+2y-1)dy = 0$.

Практическое занятие №5. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Уравнения Бернулли и Риккати

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Какое дифференциальное уравнение называется интегрируемым в квадратурах?
2. Каков вид общего решения дифференциального уравнения $y' = Q(x)$?
3. Какое дифференциальное уравнение называется линейным?
4. Каким приемом линейное дифференциальное уравнение $y' + P(x)y = Q(x)$ можно привести к уравнению, явно не содержащему искомой функции?
5. Каков вид общего решения *однородного* линейного дифференциального уравнения (ЛДУ) $y' + P(x)y = 0$?
6. Каков вид общего решения *неоднородного* ЛДУ $y' + P(x)y = Q(x)$?
7. Изложите способ решения *линейного неоднородного* дифференциального уравнения $y' + P(x)y = Q(x)$, который принято называть *методом вариации произвольной постоянной*.
8. Почему уравнение $y' + P(x)y = Q(x)$ относится к уравнениям, разрешимым в квадратурах?
9. Какова структура общего решения линейного *неоднородного* уравнения $y' + P(x)y = Q(x)$?
10. Сформулируйте теорему Коши для ЛДУ. Могут ли ЛДУ иметь особые решения?
11. Какое дифференциальное уравнение называется уравнением Бернулли?
12. Какие способы решения уравнения Бернулли Вы знаете?
13. Каков вид общего интеграла уравнения Бернулли?
14. Может ли уравнение Бернулли иметь особые решения?
15. Запишите общий вид уравнения Риккати. Каким образом уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли?

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1) Найдите общие решения дифференциальных уравнений:

а) $xy' + 2y = x^2$; б) $y' + y = \cos x$.

2) Найдите частные решения следующих дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

$$\text{а) } y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}, \quad y|_{x=0} = 1; \quad \text{б) } y' + x^2 y = x^2, \quad y|_{x=2} = 1.$$

3) Общее решение некоторого дифференциального уравнения имеет вид:
 $y = C\varphi(x) + \psi(x)$, где C - произвольная постоянная, φ, ψ - конкретные функции от x . Докажите, что дифференциальное уравнение, задающее любое семейство кривых этого вида, есть линейное уравнение.

4) Решите уравнение, линейное относительно переменной x : $y' = \frac{1}{x \cos y + \sin 2y}$.

5) За сколько минут тело, нагретое до 100° , охладится до 25° в комнате с температурой 20° , если до 60° оно охлаждается за 10 минут? (По закону Ньютона скорость охлаждения пропорциональна разности температур).

6) Сила тока i в цепи с сопротивлением R , самоиндукцией L и напряжением $U(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $L \frac{di}{dt} + Ri = U(t)$.

Решите это уравнение, считая R, L постоянными, а $U(t) = kt$ ($k > 0$);
 начальное условие $i(0) = 0$.

7) Решите дифференциальное уравнение $y' + 2xy = 2x^3 y^3$.

8) Найдите общее и особые решения дифференциального уравнения $xy' - 4y = x^2 \sqrt{y}$.

9) Найдите общее решение дифференциального уравнения $xy' - (2x + 1)y + y^2 = -x^2$, имеющего частное решение вида $y = ax + b$.

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1) Найдите общее решение дифференциального уравнения $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

2) Найдите частные решения следующих дифференциальных уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

$$\text{а) } xy' - \frac{y}{x+1} = x, \quad y|_{x=1} = 1; \quad \text{б) } y' - 2xy = 0, \quad y|_{x=0} = 5.$$

3) Решите уравнение, линейное относительно переменной x :
 $(x - 2xy - y^2)y' + y^2 = 0$.

4) Закон распада радия состоит в том, что скорость распада пропорциональна наличному количеству радия. Известно, что половина его первоначального запаса распадается по истечении 1600 лет. Определите количество нераспавшегося радия по истечении 100 лет, если первоначальное его количество равно 1 кг.

5) Найдите общее и особые решения дифференциального уравнения $xy' + y = y^2 \ln x$.

6) Решите дифференциальное уравнение $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2$, имеющее частное решение вида $y = ax + b$.

Практическое занятие №6-7. Геометрическое истолкование уравнения $y' = f(x, y)$ и его решений. О приближенных методах решения дифференциальных уравнений. Уравнения в полных дифференциалах

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Какой геометрический смысл имеет дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ и его решение?
2. Что такое изоклины дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$?
3. Может ли изоклина быть интегральной кривой данного дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$?
4. В каких точках плоскости XOY интегральные кривые уравнения $y' = f(x, y)$ могут быть параллельны оси OY ?
5. Что называется областью задания поля направлений дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$?

6. Какова симметричная форма записи дифференциального уравнения 1-го порядка?
7. Какая точка называется особой точкой дифференциального уравнения $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$?
8. В чем основная суть приближенного решения уравнения $y' = f(x, y)$ методом изоклин (методом последовательных приближений)?
9. Дайте определение решения дифференциального уравнения $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$.
10. Когда уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ называется уравнением в полных дифференциалах?
11. Если $dU(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$, то каков общий интеграл дифференциального уравнения $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$?
12. Каков признак того, что уравнение $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ является уравнением в полных дифференциалах?
13. В чем суть метода решения уравнения в полных дифференциалах?
14. Что называется интегрирующим множителем дифференциального уравнения?

II. Задания для аудиторной работы студентов.

- 1) Найдите особые точки следующих дифференциальных уравнений:
 - а) $y' = \frac{x + 3y - 5}{x - 2y}$;
 - б) $y' = \frac{x^3 + y^3 - 28}{x + y - 4}$.
- 2) Методом изоклин приближенно постройте интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = y - x^2$.
- 3) Методом последовательных приближений решите задачу Коши: $\frac{dy}{dx} = y$, $y(0) = 1$.
- 4) Сколько решений дифференциального уравнения $(x - 1)\frac{dy}{dx} + y = 0$ определяет соотношение $y(x - 1) = C$ при каждом фиксированном значении $C \in \mathbf{R}$?
- 5) Решите дифференциальное уравнение $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4}\right)dx = \frac{2y}{x^3}dy$.
- 6) Выделите интегральную кривую уравнения $\frac{x}{x^2 + y^2}dy = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} - 1\right)dx$, проходящую через точку $M(1; 1)$.
- 7) Найдите кривую, для которой площадь, ограниченная этой кривой, осью абсцисс и двумя прямыми, параллельными оси OY , пропорциональна отношению абсциссы к ординате правой конечной точки дуги кривой.

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

- 1) Решите дифференциальные уравнения:
 - а) $3x^2e^y dx + (x^3e^y - 1)dy = 0$;
 - б) $(\sin xy + xy \cos xy)dx + x^2 \cos xy dy = 0$.
- 2) Выделите интегральную кривую уравнения $(3y^2 + 2xy + 2x)dx + (6xy + x^2 + 3)dy = 0$, проходящую через точку $M(0; 1)$.
- 3) Найдите особые точки дифференциального уравнения $y' = \frac{x^2 + y^2 - 13}{xy - 6}$.
- 4) Методом изоклин приближенно постройте интегральные кривые дифференциального уравнения $y' = \frac{y}{2x}$.
- 5) Найдите три последовательных приближения решения следующей задачи Коши: $\frac{dy}{dx} = x + y$, $y(0) = 1$.

Практическое занятие №8. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, неразрешенные относительно производной.

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Какие методы решения уравнений неразрешенных относительно производной вы знаете?
2. Как решаются уравнения вида $F(y') = 0$?
3. Опишите метод введения параметра применительно к уравнениям вида $F(x, y') = 0$.
4. Опишите метод введения параметра применительно к уравнениям вида $F(y, y') = 0$.
5. Расскажите о методе введения параметра в общем случае для уравнения вида $F(x, y, y') = 0$.
6. Как решается уравнение вида $y = f(x, y')$?
7. Как решается уравнение вида $x = f(y, y')$?
8. Какое уравнение называется уравнением Лагранжа? Как оно интегрируется?
9. Какое уравнение называется уравнением Клеро? Как оно интегрируется?

II. Задания для аудиторной работы студентов.

- 1) Найти все решения данных дифференциальных уравнений.
 - а) $(y')^2 - y^2 = 0$
 - б) $y(y')^3 + x = 1$
 - в) $x(y')^2 - 2yy' + x = 0$
- 2) Решить дифференциальные уравнения методом введения параметра.
 - а) $x = (y')^3 + y'$
 - б) $y = (y')^2 + 2(y')^3$
 - в) $(y')^2 - (y')^3 = y^2$
 - г) $2xy' - y = y' \ln y y'$
- 3) Решить уравнения Лагранжа и Клеро.
 - а) $y = 2xy' - 4(y')^3$
 - б) $y = x(y')^2 - 2(y')^3$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

- 1) Найти все решения данных дифференциальных уравнений.
 - а) $8(y')^3 = 27y$
 - б) $(y')^2 - 4y^3 = 0$
- 2) Решить дифференциальные уравнения методом введения параметра.
 - а) $x = y' \sqrt{(y')^2 + 1}$
 - б) $y = \ln(1 + (y')^2)$
- 3) Решить уравнения Лагранжа и Клеро.
 - а) $y + xy' = 4\sqrt{y'}$

Практическое занятие №9. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Каким образом решается простейшее уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$?
2. Как достигается понижение порядка в уравнении не содержащим неизвестную функцию y ?
3. Как достигается понижение порядка в уравнении не содержащим независимую переменную x ?
4. Какие еще способы понижения порядка вам известны?

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1) Решить дифференциальные уравнения.

а) $2xy' \cdot y'' = (y')^2 - 1$

б) $(y')^2 + 2yy'' = 0$

в) $y'' - xy''' + (y''')^3 = 0$

г) $(y' + 2y)y'' = (y')^2$

д) $xy'' = y' + x \sin \frac{y'}{x}$

2) Решить уравнения, преобразовав их к такому виду, чтобы обе части уравнения являлись полными производными.

а) $yy''' + 3y'y'' = 0$

б) $yy'' + (y')^2 = 1$

в) $xy'' = 2yy' - y'$

3) Решить уравнения, понизив их порядок, пользуясь их однородностью.

а) $xyy'' - x(y')^2 = yy'$

б) $x^2 yy'' + (y')^2 = 0$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1) Решить дифференциальные уравнения.

а) $x^2 y'' = (y')^2$

б) $y''' = (y'')^2$

в) $yy'' + y = (y')^2$

2) Решить уравнения, преобразовав их к такому виду, чтобы обе части уравнения являлись полными производными.

а) $yy'' = y'(y' + 1)$

б) $y' \cdot y''' = 2(y'')^2$

3) Решить уравнения, понизив их порядок, пользуясь их однородностью.

а) $xyy'' + x(y')^2 = 2yy'$

Практическое занятие №10. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка. Фундаментальная система решений. Структура общего решения. Метод вариации произвольных постоянных

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Каков общий вид линейного дифференциального уравнения 2-го порядка?
2. Сформулируйте задачу Коши для линейных уравнений 2-го порядка.
3. Могут ли у линейных уравнений быть особые решения? Почему?
4. На каком множестве определены решения однородного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка?
5. Что называется фундаментальной системой решений линейного однородного уравнения 2-го порядка?
6. Что называется определителем Вронского системы функций?
7. Какая система функций называется линейно независимой (зависимой) на промежутке (a, b) ?

8. Какова структура общего решения однородного линейного дифференциального уравнения 2-го порядка?

9. Какова структура общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения?

10. В чём состоит метод вариации произвольных постоянных интегрирования неоднородного линейного дифференциального уравнения?

11. Дайте определение аналитической (голоморфной) функции в точке.

12. Как можно сформулировать теорему Коши для линейных дифференциальных уравнений с голоморфными коэффициентами?

13. В чем суть метода интегрирования линейных дифференциальных уравнений при помощи степенных рядов?

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1) Исходя из определения, докажите, что следующая система функций линейно независима на $(-\infty; +\infty)$: $y_1 = e^{2x} \sin 3x$; $y_2 = e^{2x} \cos 3x$.

2) Исследуйте, являются ли данные три функции линейно зависимыми или нет:
 $y_1 = x$; $y_2 = 2x$; $y_3 = x^2$.

3) Покажите, что функции $y_1 = \begin{cases} x^2, & -1 \leq x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ и $y_2 = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ линейно независимы, а соответствующий определитель Вронского тождественно равен нулю.

4) Составьте линейное дифференциальное уравнение по заданной фундаментальной системе решений: e^x , xe^x .

5) Покажите, что система функций e^{2x} , e^{-3x} является фундаментальной для уравнения $y'' + y' - 6y = 0$, и запишите соответствующее общее решение этого уравнения.

6) Методом степенных рядов решите задачу Коши:

$$y'' + \frac{1}{1-x}y = x, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1) Найдите определитель Вронского для системы функций: $\frac{1}{x}$, $e^{\frac{1}{x}}$.

2) Покажите, что функции

$$y_1 = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases} \quad y_2 = \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & \frac{1}{2} < x \leq 1, \end{cases}$$

линейно независимы, а соответствующий определитель Вронского тождественно равен нулю. Постройте графики этих функций.

3) Составьте однородное линейное дифференциальное уравнение, если задана его фундаментальная система решений: $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^x$.

4) Методом степенных рядов найдите общее решение уравнения $y'' + xy = 0$.

Практическое занятие №11. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Метод неопределенных коэффициентов

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Каков общий вид линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами?

2. В какой области выполняются условия теоремы Коши (о существовании и единственности решения) для однородных линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами?

3. На каком множестве определены решения однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами?

4. Как выглядит характеристическое уравнение для дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$, где p, q – фиксированные числа?

5. Каков вид общего решения дифференциального уравнения $y'' + py' + qy = 0$ с постоянными коэффициентами, если дискриминант $D = p^2 - 4q$ характеристического уравнения:

- 1) положительное число;
- 2) равен нулю;
- 3) отрицательное число?

6. В чем состоит идея *метода неопределенных коэффициентов* при решении неоднородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами?

7. В каких случаях неоднородные линейные дифференциальные уравнения удобнее решать *методом неопределенных коэффициентов*, чем *методом вариации произвольных постоянных*?

8. В каком виде можно искать частное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами вида:

а) $y'' + py' + qy = e^{ax} P_m(x)$; (*)

б) $y'' + py' + qy = e^{ax} [P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x]$? (**)

9. Какова структура общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами вида (*) (вида (**)) ?

10. Каково дифференциальное уравнение свободных (вынужденных) колебаний груза в среде без сопротивления?

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1) Составьте линейное однородное дифференциальное уравнение, зная его характеристическое уравнение: $k^2 + 3k + 2 = 0$.

2) Зная корни характеристического уравнения $k_1 = 3 - 2i, k_2 = 3 + 2i$, найдите общее решение однородного уравнения.

3) Найдите частное решение дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 4y = 0$ при условии, что $y(0) = 3, y'(0) = -1$.

4) Найдите частное решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \cos x$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(\pi) = \pi e^\pi, y'(\pi) = e^\pi$.

5) Определите вид частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения, если известны корни его характеристического уравнения $k_1 = -2, k_2 = 2$ и правая часть $f(x) = 5xe^{2x}$.

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1) Составьте линейное однородное дифференциальное уравнение, зная его характеристическое уравнение: $3k^2 - k - 2 = 0$.

2) Решите дифференциальное уравнение $y'' + y' - 2y = 0$.

3) Найдите частное решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 7, y'(0) = 8$.

4) Составьте общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения вида $5y'' - 6y' + 5y = f(x)$, для чего предварительно найдите его частное

решение либо подбором, либо методом вариации произвольных постоянных, если

$$f(x) = e^{\frac{3}{5}x} \cos x.$$

5) Определите вид частного решения неоднородного линейного дифференциального уравнения, если известны корни его характеристического уравнения $k_1 = 2i$, $k_2 = -2i$ и правая часть $f(x) = A \sin 2x + B \cos 2x$, где $A = \text{const}$, $B = \text{const}$.

Практическое занятие №12-13. Понятие нормальной системы дифференциальных уравнений. Основные приемы решения.

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Дайте определение системы дифференциальных уравнений.
2. Какая система дифференциальных уравнений называется нормальной?
3. Каким образом обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка сводится к нормальной системе дифференциальных уравнений?
4. Что называется решением системы дифференциальных уравнений?
5. Как ставится задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений?
6. Сколько решений может иметь задача Коши для нормальной системы дифференциальных уравнений?
7. Сформулируйте теорему Коши-Пикара для нормальной системы дифференциальных уравнений.
8. Расскажите о решении системы дифференциальных уравнений методом исключения.
9. Расскажите о решении системы дифференциальных уравнений методом интегрируемых комбинаций.

II. Задания для аудиторной работы студентов.

Решить систему дифференциальных уравнений.

$$\text{а) } \begin{cases} y' = \frac{x}{z} \\ z' = -\frac{x}{y} \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y' = \frac{y^2}{x} \\ z' = \frac{z}{x} - yz^2 \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 2zy' = y^2 - z^2 + 1 \\ z' = z + y \end{cases}$$

$$\text{г) } \frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{z} \quad \text{д) } \frac{dx}{y-x} = \frac{dy}{x+y+z} = \frac{dz}{x-y}$$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

Решить систему дифференциальных уравнений.

$$\text{а) } \begin{cases} y' = \frac{y^2}{z-x} \\ z' = y+1 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} y' = \frac{z}{x} \\ z' = \frac{z(y+2z-1)}{x(y-1)} \end{cases} \quad \text{в) } \frac{dx}{2y-z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

$$\text{г) } \frac{dx}{y+z} = \frac{dy}{x+z} = \frac{dz}{x+y} \quad \text{д) } \frac{dx}{x(y+z)} = \frac{dy}{z(z-y)} = \frac{dz}{y(y-z)}$$

Занятие №14-15. Однородные системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Дайте определение системы линейных дифференциальных уравнений.
2. Какую линейную систему называют однородной (неоднородной)?
3. Что называют матрицей системы линейных уравнений?
4. Запишите систему линейных дифференциальных уравнений в векторно-матричной форме.
5. Дайте определение фундаментальной системы решений для системы линейных дифференциальных уравнений.
6. Какова структура общего решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений?

7. Сформулируйте определение Вронскиана системы линейных дифференциальных уравнений.

8. Как составляется характеристическое уравнение для однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами?

9. Расскажите о методе Эйлера решения однородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

II. Задания для аудиторной работы студентов.

Решить систему линейных дифференциальных уравнений.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} + x + 5y = 0 \\ \frac{dy}{dt} - x - y = 0 \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + z - y \\ \frac{dy}{dt} = x + y - z \\ \frac{dz}{dt} = 2x - y \end{cases} \\ \text{г) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y - z \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - z \\ \frac{dz}{dt} = x - y + 2z \end{cases} & \text{д) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 2z - y \\ \frac{dy}{dt} = x + 2z \\ \frac{dz}{dt} = y - 2x - z \end{cases} \end{array}$$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

Решить систему линейных дифференциальных уравнений.

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y \\ \frac{dy}{dt} = y - 4x \end{cases} & \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} - 5x - 3y = 0 \\ \frac{dy}{dt} + y + 3x = 0 \end{cases} & \text{в) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y + z \\ \frac{dy}{dt} = x + y + z \\ \frac{dz}{dt} = 4x - y + 4z \end{cases} \\ \text{г) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y \\ \frac{dy}{dt} = x + 3y - z \\ \frac{dz}{dt} = 2y + 3z - x \end{cases} \end{array}$$

Занятие №16. Неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка

I. Контрольные вопросы и задания.

1. Какова структура общего решения неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений?

2. Какие способы поиска частного решения системы вы знаете?

3. Расскажите подробно о методе вариации произвольных постоянных применительно к системам линейных уравнений.

4. Расскажите о методе подбора частного решения в линейной системе по виду неоднородности.

5. Каковы особенности метода подбора частного решения для системы линейных уравнений по сравнению с одним уравнением?

II. Задания для аудиторной работы студентов.

1. Решить систему линейных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + tg^2t - 1 \\ \frac{dy}{dt} = -x + tgt \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + \frac{1}{\cos t} \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y \end{cases}$$

2. Решить систему линейных дифференциальных уравнений, применяя метод подбора частного решения.

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - 5 \cos t \\ \frac{dy}{dt} = 2x + y \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + y - e^{2t} \\ \frac{dy}{dt} = y - 2x \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^t \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^{4t} \end{cases}$$

III. Задания для самостоятельной работы студентов.

1. Решить систему линейных дифференциальных уравнений, применяя метод вариации произвольных постоянных.

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - x \\ \frac{dy}{dt} = 4y - 3x + \frac{e^{3t}}{e^{2t} + 1} \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y + 15e^t \sqrt{t} \end{cases}$$

2. Решить систему линейных дифференциальных уравнений, применяя метод подбора частного решения.

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y + 2e^t \\ \frac{dy}{dt} = x + t^2 \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y \\ \frac{dy}{dt} = y - 2x + 18t \end{cases}$$

Самостоятельная работа

Задания для самостоятельной работы приводятся в планах практических занятий.

6. Критерии оценивания результатов освоения дисциплины (модуля)

6.1. Оценочные средства и критерии оценивания для текущей аттестации

Текущая аттестация осуществляется на каждом практическом занятии в процессе фронтального опроса, выполнения заданий для аудиторной работы, в процессе проверки домашней самостоятельной работы.

Проведение текущего контроля осуществляется также посредством проведения аудиторных разноуровневых самостоятельных работ.

Оценочные средства

I. Контрольные вопросы для проверки теоретической подготовки к практическому занятию.

Перечень вопросов приводится в планах практических занятий.

Критерии оценки ответа на теоретический вопрос

Показатель	Количество баллов
1) Полнота и глубина ответа (усвоенные теории, понятия, факты и пр.)	1
2) Сознательность ответа (понимание излагаемого материала)	1
3) Логика изложения материала (умение строить целостный, последовательный рассказ, грамотно пользоваться специальной терминологией)	1
4) Умение приводить примеры использования описанных явлений, теорий и устройств	1
5) Использование при подготовке ответа на вопрос дополнительных источников информации	0,5
6) Наличие конспекта ответа на вопрос	0,5
Итоговая (суммарная) оценка	Max - 5

II. Задания для самостоятельной работы.

Перечень практических заданий для самостоятельной работы приводится в планах практических занятий.

Критерии оценивания выполнения заданий для самостоятельной работы

Показатель	Количество баллов
1) Полнота и глубина изложения ответа (усвоенные теории, понятия, факты)	1
2) Логика изложения материала	1
3) Примеры использования описанных явлений, теорий и устройств	1
4) Использование при подготовке ответа на вопрос дополнительных источников информации	1
5) Оформление работы	1
Итоговая (суммарная) оценка	Max - 5

6.2. Оценочные средства и критерии оценивания для промежуточной аттестации

Промежуточная аттестация осуществляется посредством проведения экзамена.

Вопросы для подготовки к экзамену и образцы экзаменационных заданий.

Вопросы к экзамену

1. Понятие дифференциального уравнения и его порядка. Определение решения обыкновенного дифференциального уравнения.
2. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка. Теорема Коши.
3. Определение общего решения (общего интеграла) дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$. Понятие особого решения дифференциального уравнения.
4. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка.
5. Уравнение Бернулли.
6. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ и его решений.
7. Метод изоклин решения дифференциальных уравнений вида $y' = f(x, y)$.
8. Уравнения в полных дифференциалах.
9. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.
10. Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$, однородное относительно x и y .
11. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной.
12. Составление дифференциального уравнения 1-го порядка по его общему интегралу.
13. Задача Коши и теорема Коши (без доказательства) для уравнений высшего порядка.
14. Понятия общего и частного решений дифференциальных уравнений высшего порядка.
15. Решение уравнений высших порядков вида $y^{(n)} = f(x)$.
16. Уравнения высшего порядка, явно не содержащие независимой переменной.
17. Уравнения высшего порядка, явно не содержащие искомой функции.
18. Понятие линейного дифференциального уравнения высшего порядка. Теорема Коши для линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка.
19. Однородные линейные уравнения 2-го порядка. Фундаментальная система решений.
20. Построение общего решения однородных линейных уравнений 2-го порядка.
21. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка. Структура общего решения.
22. Отыскание частного решения неоднородного линейного уравнения 2-го порядка методом вариации произвольных постоянных.
23. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений при помощи степенных рядов.
24. Однородные линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Построение общего решения.
25. Линейные неоднородные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Отыскание общего решения методом вариации произвольных постоянных.
26. Решение уравнения $y'' + py' + qu = \exp(ax) \cdot P_m(x)$ методом неопределенных коэффициентов.

27. Решение уравнения $y'' + py' + qy = \exp(ax) \cdot [A_m(x) \cdot \cos bx + B_n(x) \cdot \sin bx]$ методом неопределенных коэффициентов.
28. Применение линейных дифференциальных уравнений к изучению колебательных движений. Свободные колебания и явление резонанса.
29. Нормальная система дифференциальных уравнений. Задача Коши и теорема о существовании и единственности решения.
30. Сведение дифференциальных уравнений n -го порядка к нормальной системе уравнений.
31. Системы линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка. Структура общего решения.
32. Матричный метод решения систем линейных уравнений 1-го порядка.
33. Решение однородных систем линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами методом Эйлера.
34. Дифференциальное уравнение с частными производными и понятие о его общем решении.
35. Квазилинейные (линейные) уравнения 2-го порядка с двумя независимыми переменными и их классификация.
36. Приведение к канонической форме линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с двумя переменными.
37. Основные уравнения математической физики. Понятие о начальных и краевых условиях.
38. Гиперболические уравнения. Задача о свободных колебаниях конечной струны и ее решение методом Фурье.
39. Задачи Коши для однородного волнового уравнения на прямой и метод её решения.
40. Понятие корректности постановки задач уравнений математической физики.
41. Интегральные преобразования Фурье.
42. Параболические уравнения. Решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности. Формула Пуассона.
43. Уравнения эллиптического типа. Постановки основных задач.
44. Гармонические функции на плоскости и их свойства.
45. Задача Дирихле для гармонических функций двух переменных. Теорема единственности и устойчивости.
46. Решение задачи Дирихле для круговых областей методом разделения переменных.

Образец экзаменационного задания

1. Задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка. Теорема Коши.
1. Решение задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности. Формула Пуассона.
2. Решите дифференциальное уравнение $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x$.
3. Решите систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + z, \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z, \\ \frac{dz}{dt} = x + y - z. \end{cases}$$

4. Внутри единичного круга $0 \leq r \leq 1$ найдите гармоническую функцию $u(r, \varphi)$, принимающую на границе Γ данного круга значения: $u|_{\Gamma} = \cos 2\varphi$, $-\pi \leq \varphi \leq \pi$.

Критерии оценивания ответа на экзамене

1. Нормы оценивания ответа

№п/п	Структурная часть билета	Количество баллов
1	Правильный ответ на вопрос	1 балл

(*) Возможна градация в 0,25, 0,5 и 0,75 балла.

2. Шкала оценивания работы:

п/п	Оценка	Количество баллов
1	Отлично	4,75-5
2	Хорошо	3,75-4,5
3	Удовлетворительно	3-3,5
4	Неудовлетворительно	менее 3

7. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

7.1. Список основной литературы

1. *Аксенов, А. П.* Дифференциальные уравнения: учебник для вузов / А. П. Аксенов. — 2-е изд. — Москва: Издательство Юрайт, 2025. — 592 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-21439-0. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/571419> (дата обращения: 25.11.2025).

2. *Боровских, А. В.* Дифференциальные уравнения: учебник и практикум для вузов / А. В. Боровских, А. И. Перов. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2025. — 568 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-21132-0. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/559423> (дата обращения: 25.11.2025).

3. *Ефремов, Ю. С.* Методы математической физики в пакете символьной математики Maple: учебник для вузов / Ю. С. Ефремов, М. Д. Петропавловский. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2025. — 300 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-05278-7. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563483> (дата обращения: 25.11.2025).

4. *Зайцев, В. Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения в 2 ч. Часть 1: справочник для вузов / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2025. — 385 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02685-6. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/561995> (дата обращения: 25.11.2025).

5. *Зайцев, В. Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения в 2 ч. Часть 2: справочник для вузов / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2025. — 196 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02690-0. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/562627> (дата обращения: 25.11.2025).

6. *Зайцев, В. Ф.* Дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка: учебник для вузов / В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2025. — 413 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02377-0. — Текст: электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/558842> (дата обращения: 25.11.2025).

7. *Королев, А. В.* Дифференциальные и разностные уравнения: учебник и практикум для вузов / А. В. Королев. — Москва: Издательство Юрайт, 2025. — 280 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-9916-9896-2. — Текст: электронный // Образовательная

платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/561221> (дата обращения: 25.11.2025).

8. *Муратова, Т. В.* Дифференциальные уравнения : учебник и практикум для вузов / Т. В. Муратова. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 524 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-19174-5. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/560212> (дата обращения: 25.11.2025).

9. *Стеклов, В. А.* Основы теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений : учебник для вузов / В. А. Стеклов. — Москва : Издательство Юрайт, 2025. — 427 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-02124-0. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/563164> (дата обращения: 25.11.2025).

10. *Расулов К.М.* Практикум по дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики. — Смоленск, изд-во СОИРО, 2015.

7.2. Список дополнительной литературы

Обыкновенные дифференциальные уравнения

11. *Агафонов С.А., Муратова Т.В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Академия, 2008.

12. *Григорьев М.П. и др.* Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах. — М.: Вузовская книга, 2006.

13. *Дмитриев В.И.* Лекции по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: КДУ, 2008.

14. *Еругин Н.П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. — Минск.: Наука и техника, 1979.

15. *Матвеев Н.М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. 5-е издание — М.: «Лань», 2007.

16. *Матвеев Н.М.* Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Издание седьмое, дополненное. — С.-Пб.: Лань, 2002.

17. *Матросов В.Л. и др.* Дифференциальные уравнения в школе и педвузе.— М.: Изд-во «Прометей», 1998.

18. *Понтрягин Л.С.* Дифференциальные уравнения и их приложения. — М.: УРСС, 2004.

19. *Петровский И.Г.* Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Едиториал УРСС, 2004..

20. *Расулов К.М.* Обыкновенные дифференциальные уравнения и уравнения с частными производными. — Смоленск: СмолГУ, 2010.

21. *Самойленко А.М., Кривошея С.А., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения: примеры и задачи. — М.: Высшая школа, 1989.

22. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. — М.: УРСС, 2007.

23. *Филиппов А.Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — М.: Едиториал УРСС, 2004.

24. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. — М.: Едиториал УРСС, 2003.

Уравнения математической физики

25. *Алиев Р.Г.* Уравнения в частных производных. — М.: ЭКЗАМЕН, 2006.

26. *Емельянов В.М., Рыбакина Е.А.* Уравнения математической физики. Практикум по решению задач. — С.-Пб.: Лань, 2008.

27. *Мартинсон Л.К., Малов Ю.И.* Дифференциальные уравнения математической физики. — М.: МГТУ им. Н.Э.Баумана, 1996.

28. *Михлин С.Г.* Курс математической физики. — С.-Пб.: Лань, 2009.

29. *Петровский И.Г.* Лекции об уравнениях с частными производными. – М.: УРСС, 2005.
30. *Расулов К.М.* Уравнения математической физики. – Смоленск: СмолГУ, 2008.
31. *Агошков В.И., Дубовский П.Б., Шутяев В.П.* Методы решения задач математической физики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.
32. *Голоскоков Д.П.* Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple. – С.-Пб.: Питер, 2004.
33. Сборник задач по математике. Часть V. Уравнения математической физики / *под ред. А.Д. Мышкиса и В.Б. Минасяна.* – М.: УРСС, 2002.
34. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. Изд. 4-е, испр. – М.: Наука, 1972.

7.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

- Система дистанционного обучения Смоленского государственного университета <http://moodle.smolgu.ru>
- Электронно-библиотечная система университета <http://biblioteka.smolgu.ru>
- Национальный открытый университет <http://www.intuit.ru>
- Образовательный математический сайт <http://exponenta.ru>
- Общероссийский математический портал <http://www.mathnet.ru>

8. Материально-техническое обеспечение

Учебная аудитория для проведения занятий лекционного типа, оснащенная стандартной учебной мебелью, мультимедиапроектором, ноутбуком, колонками и интерактивной доской.

Учебная аудитория для проведения занятий семинарского типа, групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации, оснащенная стандартной учебной мебелью.

Помещение для самостоятельной работы – компьютерный класс с доступом к сети «Интернет» и ЭИОС СмолГУ.

9. Программное обеспечение

Microsoft Open License (Windows XP, 7, 8, 10, Server, Office 2003-2016), лицензия 66975477 от 03.06.2016 (бессрочно).

Обучающимся обеспечен доступ к ЭБС «Юрайт», доступ в электронную информационно-образовательную среду университета.